

1) Inversions

- Soit  $E$  le plan euclidien,  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A$  et de rayon  $r$ . On considère l'application :

$$\gamma_{\mathcal{C}} : E \setminus \{A\} \longrightarrow E \setminus \{A\}$$

$$M \longmapsto M' \quad \text{avec } M' \in [A; M) \text{ et } AM \cdot AM' = r^2$$

C'est une application involutive de  $E \setminus \{A\}$  dont l'ensemble des points fixes est  $\mathcal{C}$ .

- Expression analytique de  $\gamma_{\mathcal{C}}$  dans un repère d'origine  $A$ .

$$\gamma_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^{2*} \longrightarrow \mathbb{R}^{2*}$$

$$(x; y) \longrightarrow \left( r^2 \frac{x}{x^2 + y^2} ; r^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$z \longrightarrow r^2 \frac{z}{|z|^2} = \frac{r^2}{\bar{z}}$$

C'est une application différentiable, qui se prolonge sur  $\bar{E} = E \cup \{\infty\}$  par  $\gamma_{\mathcal{C}}(A) = \infty$  ;  $\gamma_{\mathcal{C}}(\infty) = A$

**Proposition :**  $\gamma_{\mathcal{C}}$  transforme les cercles-droites en cercles-droites.

dém :  $M(x; y)$  est sur un cercle droite

$$m' \quad A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

$$m' \quad A + B \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + C \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} + D \cdot \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \times \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$m' \quad M' \left( \frac{x}{x^2 + y^2} ; \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \text{ vérifie :}$$

$$A + B \cdot X + C \cdot Y + D(X^2 + Y^2) = 0$$

de plus : - 1 droite passant par 0 est envoyée sur elle-même

- Un cercle passant par 0 est envoyé sur une droite

- Un cercle centré en 0 est envoyé sur un cercle centré en 0

- 1 droite ne passant pas par 0 est envoyée sur 1 cercle passant par 0

- 1 cercle ne passant pas par 0 et envoyé sur 1 cercle ne passant pas par 0.

Proposition : Une involution, est une application conforme, qui renverse l'orientation

dem: d'abord  $\gamma : E \setminus \{0\} \rightarrow E$

d'après :  $\gamma(x,y) = k(x,y) \cdot O(x,y)$   $\forall (x,y) \neq (0,0)$   
 et  $\det(\gamma_r(x,y)) < 0$

où  $\gamma_r(x,y)$  est la matrice jacobienne de  $\gamma$  en  $(x,y)$ ,  $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 et  $O(x,y)$  est une matrice orthogonale

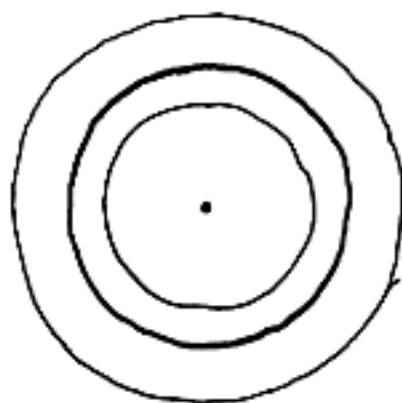
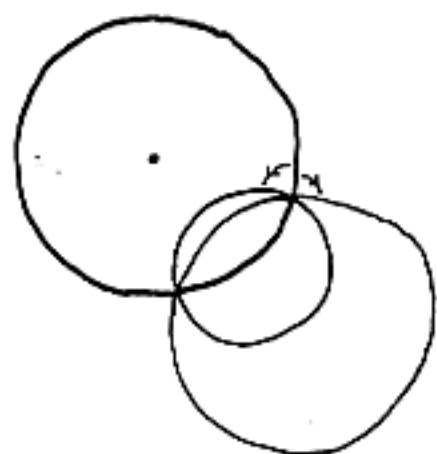
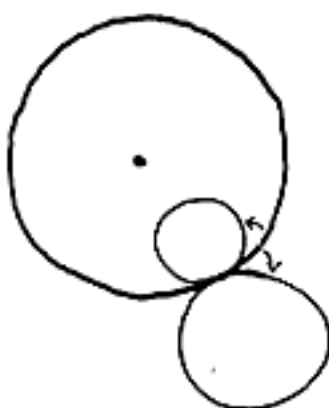
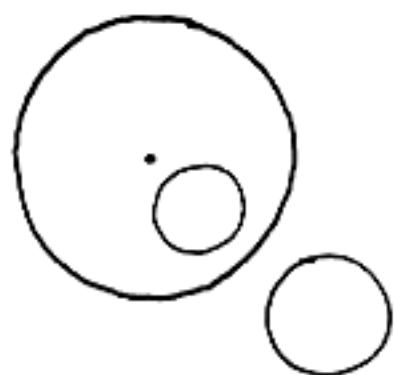
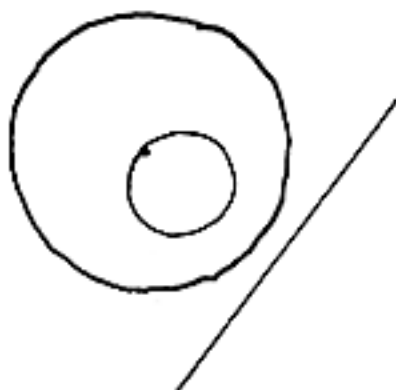
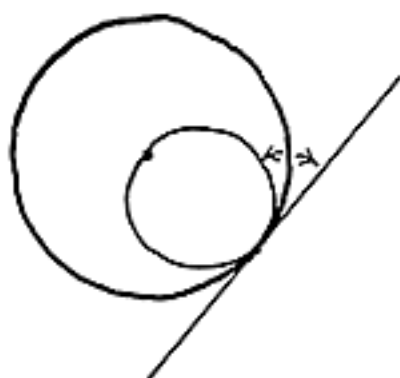
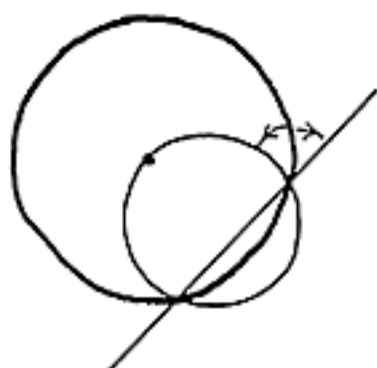
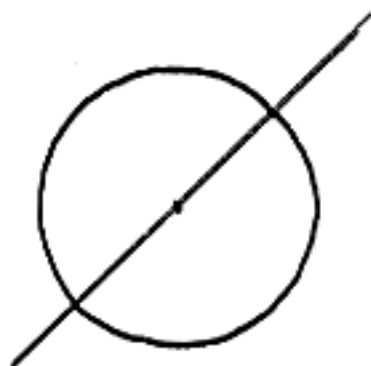
$$f_x(x,y) = r^2 \frac{x}{x^2+y^2} \quad f_y(x,y) = r^2 \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\gamma_r(x,y) = \begin{pmatrix} r^2 \frac{y^2-x^2}{Q} & -\frac{2xy}{Q} \cdot r^2 \\ -\frac{2xy}{Q} \cdot r^2 & r^2 \frac{x^2-y^2}{Q} \end{pmatrix} = \frac{r^2}{Q} \begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\gamma_r(x,y)) = -\frac{r^4}{(x^2+y^2)^2} < 0 \quad (Q = (x^2+y^2)^2)$$

$$\text{et } \frac{1}{\det(\gamma_r(x,y))} \cdot \gamma_r(x,y) \in O_2^- \quad \left( = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, a^2+b^2=1 \right)$$

cf d



# Le groupe de Möbius.

□.  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  et  $f: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

$f$  se prolonge par continuité en  $\bar{f}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$   
par  $\bar{f}(-\frac{d}{c}) = \infty$  ;  $\bar{f}(\infty) = \frac{a}{c}$

• On considère  $\mathcal{H} = \{ f: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} ; ad-bc \neq 0 ; a, b, c, d \in \mathbb{C} \}$   
muni de la loi de composition,  $\mathcal{H}$  a une structure de groupe.  
• loi interne:  $z \xrightarrow{f} \frac{az+b}{cz+d}$

$$\begin{aligned} g \circ f(z) &= \frac{\frac{\alpha(\frac{az+b}{cz+d}) + \beta}{\gamma(\frac{az+b}{cz+d}) + \delta}}{\frac{\alpha(\frac{az+b}{cz+d}) + \beta}{\gamma(\frac{az+b}{cz+d}) + \delta}} = \frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)} \\ &= \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d} \\ &\in \mathcal{H} \end{aligned}$$

• él<sup>é</sup> neutre :  $z \rightarrow z$

• Inverse :  $z = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow (cz+d)z - (az+b) = 0$   
 $\Leftrightarrow z(cz - a) + d - b = 0$   
 $\Leftrightarrow z = \frac{-d + b}{cz - a} \in \mathcal{H}$

• et bien sûr associative.

On a bien sûr naturellement un morphisme de groupe

$$\varphi: GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}, \text{ par } \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = "z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}"$$

Montrons que  $\mathcal{H} \cong PSL_2(\mathbb{C})$

Si l'on considère  $f: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$

et  $g: z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  pour quels paramètres a-t-on  
 $f = g$  ?

$$f=g \iff \forall z \quad f(z)=g(z)$$

$$\iff \forall z \quad (az+b)(\gamma z+\delta) = (\alpha z+\beta)(cz+d)$$

$$\iff \forall z \quad a\gamma z^2 + (a\delta+b\gamma)z + b\delta = \alpha c z^2 + (\alpha d+\beta c)z + \beta d$$

$$\iff \begin{cases} a\gamma - \alpha c = 0 & \textcircled{1} \\ b\delta - \beta d = 0 & \textcircled{2} \\ a\delta + b\gamma = \alpha d + \beta c & \textcircled{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{\alpha}{\gamma} \\ \frac{b}{d} = \frac{\beta}{\delta} \end{cases}$$

soit  $a = k.c$  et  $b = l.d$  pour  $k$  et  $l$  de  $\mathbb{C}$   
 $\alpha = k.\gamma$   $\beta = l.\delta$

$$\textcircled{3} \iff k.c\delta + l.d\gamma = k.\gamma d + l.\delta c$$

$$(k-l)c\delta - (k-l)d\gamma = 0$$

$$(k-l)(c\delta - d\gamma) = 0$$

soit  $k=l$  impossible, car alors  $ad-bc = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$

soit  $c\delta - d\gamma = 0$

$$\iff \frac{c}{d} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{\alpha}{\delta} \quad (\text{et } \frac{b}{d} = \frac{\beta}{\delta})$$

soit  $g = A.f$  pour un  $A \in \mathbb{C}^*$

Et donc le morphisme :  $\Psi: \begin{matrix} GL_2\mathbb{C} & \xrightarrow{f} & f \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{matrix}$  passe au quotient par  $\tilde{\mathbb{C}}^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^* \right\} \subset GL_2\mathbb{C}$ , pour donner un isomorphisme : (i.e.  $\ker \Psi = \tilde{\mathbb{C}}^*$ )

$$(LF(2, \mathbb{C})^{\neq}) / \sim \cong GL_2\mathbb{C} / \tilde{\mathbb{C}}^* \cong \frac{SL_2\mathbb{C}}{\pm Id} \cong PSL(2, \mathbb{C})$$

1

- On appelle groupe de Möbius, le groupe des transf<sup>s</sup> de  $E^* = E \cup \{\infty\}$  engendré par les inversions et les symétries. On le note  $\mathcal{M}$ .
- On note  $\mathcal{M}^+$ , le sous-groupe de  $\mathcal{M}$  des éléments qui préservent l'orientation.

On note  $\sigma: z \rightarrow \bar{z}$ .  $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \subset \mathcal{M}$

Proposition:  $\mathcal{M}^+ = \mathcal{H} \cong \text{PSL}(2; \mathbb{C})$   
de plus  $\mathcal{M} = \langle \sigma \rangle \rtimes \mathcal{H} \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \text{PSL}(2; \mathbb{C})$

Demo:  $\mathcal{M}$  est engendré par les inversions et les symétries, qui sont orientation-reversing.

Donc  $\mathcal{M}^+$  contient les translations, les rotations, et les homothéties (composées de 2 inversions concentriques)

en particulier: rotations de centre 0:  $z \rightarrow e^{i\theta} z$

homothéties " :  $z \rightarrow k \cdot z$   $k \in \mathbb{R}$

translations :  $z \rightarrow z + c$

Montrons que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}^+$

soit  $f: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$   $ad-bc=1$

~~$f \in \mathcal{M}$~~   ~~$f \in \mathcal{M}^+$~~

$z \mapsto cz+d \in \mathcal{M}^+$  (homothétie, rotation, translation)

$z \mapsto \frac{1}{cz+d} \in \mathcal{M}^+$  ( $z \mapsto \frac{1}{z}$  composé de  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$  et  $z \mapsto \bar{z}$ )

$z \mapsto \frac{1}{\frac{1}{cz+d}} + \frac{a}{c} = \frac{c \cdot az + ad - 1}{c(cz+d)} = \frac{caz + cb}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{M}^+$

et donc  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{M}^+$

• Montrons que  $\mathcal{M}^+ \subset \mathcal{H}$

il est suffisant de montrer que  $\mathcal{M} \subset \langle \sigma; \mathcal{H} \rangle$

Les elt<sup>s</sup> de  $\mathcal{M}$  sont engendrés par les symétries et les inversions, il suffit donc de montrer que les symétries et les inversions sont dans  $\langle \sigma; \mathcal{H} \rangle$

- Cas d'une symétrie : soit une symétrie par une droite  $\ell$ ,  
on peut la décrire comme suit :

(do  $\mathcal{H}$ ) - une translation, suivie d'une rotation ramène  $\ell$  sur l'axe réel

(do  $\sigma$ ) - on effectue la symétrie  $z \mapsto \bar{z}$

- on ramène  $\ell$  sur l'axe réel

(conjugaison par  $\text{top}$  de  $z \mapsto \bar{z}$ )

- Cas d'une inversion ds un cercle  $c$

- on ramène le centre sur 0 (translation)

- on change le rayon en 1 par une homothétie.

- inversion  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$

- on ramène sur  $c$

$$cz+d \neq 0$$

Proposition : Soit  $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$   
 et  $(\varnothing; \eta; \varepsilon) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$   
 Alors il existe un unique élément de  $\mathcal{M}^+$   
 qui envoie  $(\alpha; \beta; \gamma) \rightarrow (\varnothing; \eta; \varepsilon)$

Démo : Il suffit de montrer que donné  $(\alpha; \beta; \gamma)$ , il existe  
 un unique elt de  $\mathcal{M}^+$  qui l'envoie sur  $(\infty; 0; 1)$

Considérons  $\phi: z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$

avec  $a = \frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}$

alors  $\phi(\alpha) = \infty$

$b = \frac{\alpha-\gamma}{1-\gamma/\beta}$

$\phi(\beta) = 0$

$c = -1$

$\phi(\gamma) = 1$

$d = \alpha$

uniquement : et dans la preuve il apparaît que c'est unique !  
 (résolution de système.)

$\phi(\alpha) = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} = \infty$

$\phi(\beta) = \frac{a\beta+b}{c\beta+d} = 0$

$\phi(\gamma) = \frac{a\gamma+b}{c\gamma+d} = 1$

$\phi(\gamma) = \frac{a\gamma+b}{c\gamma+d} = 1$

$\frac{\gamma}{\gamma-\beta} + \frac{\beta}{\beta-\gamma} = 1$

Remarque : Donnés 3 pts distincts il existe un unique cercle-droite  
 passant par ces points.  $\Rightarrow \mathcal{M}^+$  agit librement et transitivement  
 sur l'ensemble des cercles-droites.



Corollaire :

- Un élé de  $M^+$  qui fixe 3 pts est l'identité
- Un élé de  $M$  qui fixe 3 pts est soit l'identité soit l'inversion-symétrie dans le cercle-droite passant par ces 3 pts.

Démo:

La première assertion est claire.

Soit un élé  $\alpha$  de  $M$  qui fixe 3 pts  $(\alpha; \beta; \gamma)$ .

ne préserve pas l'orientation

Soit  $c$  le cercle-droite (unique) passant par  $(\alpha; \beta; \gamma)$  et  $\gamma$  l'inversion-symétrie dans  $c$ .

alors  $\gamma \circ \alpha$  préserve l'orientation et fixe  $(\alpha; \beta; \gamma)$

$$\Rightarrow \gamma \circ \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \gamma^{-1} = \gamma$$

$\alpha$  est l'inversion dans  $c$ .

2

On note  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C}$   
 et  $H \triangleq \{h \in M^+ \mid h(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}\}$  ; l'ensemble des transfos  
 de Möbius, o.p., qui fixent la droite réelle.

Prop<sup>o</sup>:  $H = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} ; \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ ad-bc \neq 0 \end{matrix} \right\} \approx GL(2; \mathbb{R}) / \mathbb{R}^* \\ \approx \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ |ad-bc|=1 \end{matrix} \right\}$

démo:  $\cdot ? GL(2; \mathbb{R}) / \mathbb{R}^* \subset H$

Donc  $\psi: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad ad-bc \neq 0, \psi \in M^+$

et avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, \psi(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \psi \in H$

$\cdot ? H \subset GL(2; \mathbb{R}) / \mathbb{R}^*$

donnez  $(\alpha; \beta; \gamma) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$

$(\delta; \eta; \varepsilon) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$

Il existe une transformation de  $GL(2; \mathbb{R}) / \mathbb{R}^*$  qui envoie  $(\alpha; \beta; \gamma)$   
 sur  $(\delta; \eta; \varepsilon)$ . Il suffit de trouver  $f \in GL(2; \mathbb{R}) / \mathbb{R}^*$  tq  
 $\psi: (\alpha; \beta; \gamma) \rightarrow (\infty; 0; 1)$  ( $\forall \alpha; \beta; \gamma$  de  $\overline{\mathbb{R}}$ , distincts)

$\psi_1$  envoie  $\alpha$  sur l'inf :  $z \xrightarrow{\psi_1} \frac{z}{z-\alpha}$

$\psi_2 \circ \psi_1$  envoie  $\alpha \rightarrow \infty$   
 $\beta \rightarrow 0$  :  $z \xrightarrow{\psi_2} z - \frac{\beta}{\beta-\alpha}$

$\psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1$  envoie  $\alpha \rightarrow \infty$   
 $\beta \rightarrow 0$   
 $\gamma \rightarrow 1$  :  $z \mapsto z \times \frac{1}{\frac{\gamma}{\gamma-\alpha} - \frac{\beta}{\beta-\alpha}}$

et  $\psi_1; \psi_2; \psi_3; \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1 \in GL(2; \mathbb{R}) / \mathbb{R}^*$   
 $f = \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1$

$\Rightarrow$  Donc un élément  $h \in H$  qui envoie  $(\alpha; \beta; \gamma)$  sur  $(\delta; \eta; \varepsilon)$   
 , par unicité  $h \in GL(2; \mathbb{R}) / \mathbb{R}^*$  c.f.d =

On note  $\mathbb{H}^2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0 \}$

$\mathcal{H}^+$  le groupe hyperbolique o.p. ;  $\mathcal{H}^+ = \{ h \in \mathcal{M}^+ \mid h(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2 \}$

$\mathcal{H}$  le groupe hyperbolique ;  $\mathcal{H} = \{ h \in \mathcal{M} \mid h(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2 \}$

Proposition :  $\mathcal{H}^+ = \text{PSL}(2; \mathbb{R})$

démo : soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  tp  $f(z) = \text{Im}(h(z))$  où  $h \in \mathcal{H}$

C'est une application continue  $\Rightarrow$  T.V.I  $\mathbb{H}^2$  est  
envoyé sur lui-même ou sur  $-\mathbb{H}^2$ .

Il suffit donc de vérifier pour  $z=i$ .

$$h(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(ai+b)(d-ci)}{c^2+d^2} = \frac{1}{c^2+d^2} [ac+bd + i(ad-bc)]$$

$\text{Im}(h(i))$  a même signe que  $ad-bc$

$$\text{i.e. : } \mathcal{H} = \langle \sigma \rangle \ltimes \mathcal{H}^+ \simeq \mathbb{Z}_2 \ltimes \text{PSL}(2; \mathbb{R})$$

$$\mathcal{H}^+ = \text{PSL}(2; \mathbb{R})$$

Proposition :  $\mathcal{H} = \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathcal{H}^+ = \mathbb{Z}_2 \ltimes \text{PSL}(2; \mathbb{R})$

démo : soit  $h \in \mathcal{H}$ . Si  $h$  est orienté.pres. alors  $h \in \mathcal{H}^+$

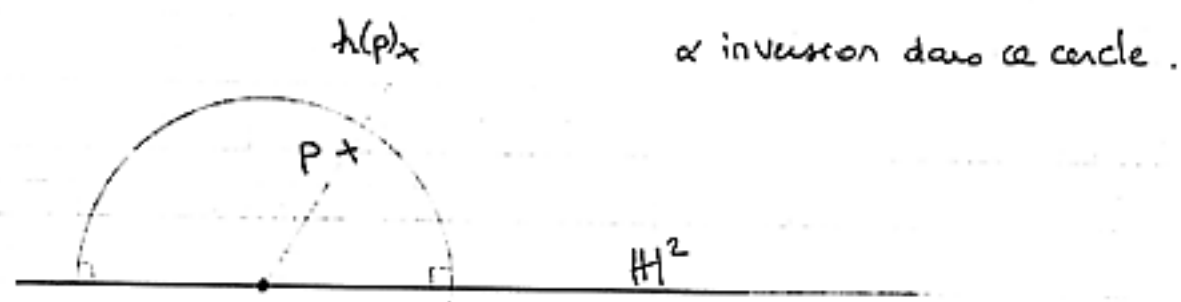
sinon on compose par une invers<sup>o</sup> de un cercle de  
centre sur  $\mathbb{R}$ , ou une symétrie par une droite  $\perp$  à  
à  $\mathbb{R} \Rightarrow \gamma h$  est o.p.  $\Rightarrow \gamma h \in \mathcal{H}^+$

en particulier  $\mathbb{Z}_2$  peut-être engendré par n'importe  
laquelle de ces transformations

- On appelle droite hyperbolique l'intersection d'un cercle  $\perp^{\text{al}}$  à  $\mathbb{R}$  ou d'une droite verticale avec  $\mathbb{H}^2$ .
- On appelle symétrie hyperbolique (ou réflexion h.), une inversion - réflexion par une droite hyperbolique. Ce sont des elt<sup>s</sup> du groupe hyperbolique.

Thème: les réflexions hyperboliques engendrent le groupe hyperbolique  
De plus tout élément se décompose en au plus 3 réflex<sup>o</sup>

démo: Soit  $h$  élément du groupe hyperbolique, et  $P \in \mathbb{H}^2$   
Soit  $h$  fixe  $P$ , soit on compose  $h$  par  $\alpha$  réflexion qui envoie  $h(P)$  en  $P$ .  $h' = \alpha \circ h$ .  $h'$  fixe  $P$ .



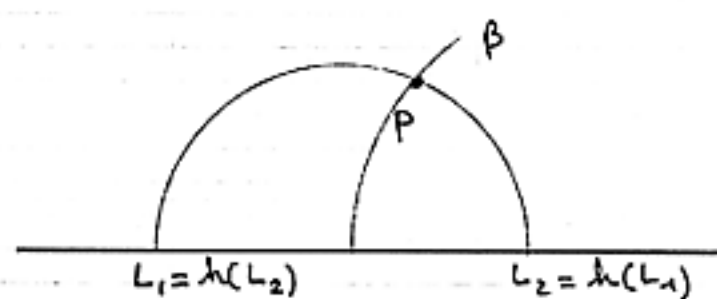
On peut donc considérer  $h$  qui fixe  $P$ . Soit  $l$  une droite hyperbolique passant par  $P$ . Soit  $h$  fixe globalement  $l$  soit ce n'est pas le cas.

lemme: Soit  $P$  un point de  $\mathbb{H}^2$ , et  $A, A'$  des points de  $\overline{\mathbb{R}}$   
 $\exists (!)$  réflexion hyperbolique qui fixe  $P$  et envoie  $A$  en  $A'$ .

dém: on peut aisément vérifier que lorsque l'on effectue toutes les réflexions h. dans toutes les droites passant par  $P$ ,  $A$  décrit  $\overline{\mathbb{R}}$  (injectivement).

Si  $h$  fixe globalement  $l$ , alors les points fixes  $L_1$  et  $L_2$  sont soit fixes soit interchangés.

Si ils sont interchangeables, on compose par la réflex<sup>n</sup> fixant  $P$  les interchangeant.



$$\begin{aligned} \gamma_P : P &\rightarrow P \\ L_1 &\rightarrow L_2 \\ L_2 &\rightarrow L_1 \end{aligned}$$

• Si  $h$  ne fixe pas  $L$ , alors  $\{L_1; L_2\} \cap \{h(L_1); h(L_2)\} = \emptyset$   
(car par 2 pts il ne passe qu'une seule droite  $h$ .)

On compose  $h$  par l'inversion envoyant  $P$  sur  $P$ , et  $h(L_1)$  sur  $L_1$ . Alors  $h' = \gamma_P \circ h$  fixe globale aussi  $L_2$  (même raison)

• On est arrivé à  $h$  qui fixe 3 pts de  $L$

Alors  $h$  est soit l'identité, soit l'inversion par  $L$

Si c'est le cas on compose par cette inversion pour finalement obtenir l'identité cqd  $\square$

# Le plan hyperbolique

□ On considère  $\mathbb{H}^2 = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ , muni d'une métrique Riemannienne, donnée par la formule :

$$ds^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2)$$

$\Rightarrow$  Ça fait de  $\mathbb{H}^2$  un espace métrique géodésique.

Quelles sont les géodésiques, les isométries ?

• les droites verticales sont des géodésiques :

donnés 2 pts  $A = a + iy_0$  ;  $B = a + iy_1$

On peut considérer  $\gamma$ , le chemin vertical :

$$\gamma : [y_0; y_1] \longrightarrow \mathbb{H}^2$$
$$t \longmapsto (a; t)$$

alors  $\text{Lgr}(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y} = \left| \ln \left\{ \frac{y_1}{y_0} \right\} \right|$

Considérons un autre lacet  $C^1$ , de  $A$  à  $B$   $l : (x(t); y(t))$

$$\text{Lgr}(l) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \stackrel{(*)}{\geq} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y} \left| \frac{dy}{dt} \right| dt \stackrel{(**)}{\geq} \left[ \ln y(t) \right]_{t_0}^{t_1} = \ln \left( \frac{y_1}{y_0} \right).$$

(\*) lorsque  $\exists t \mapsto \frac{dx}{dt}(t) > 0$ , puisque tout est continu.

(\*\*) On peut "couper"  $l$ , pour arriver à un sous-chemin de  $l$  de  $A$  à  $B$ , où  $\frac{dy}{dt} > 0$

$\Rightarrow$  la droite verticale est l'unique géodésique passant par  $A$  et  $B$ .

• Il est clair que toutes les symétries par des droites verticales sont des isométries de  $\mathbb{H}^2$ .

• remarque : une droite verticale est non bornée des 2 côtés avec la métrique hyperbolique.

- Montrons que les inversions dans les cercles de centre de  $\mathbb{R}^2$  sont des isométries.

Soit l'inversion dans le cercle de centre  $a \in \mathbb{R}$ , et de rayon  $r$

$$z \longrightarrow r^2 \times \frac{1}{z-a} + a$$

$$(x; y) \longrightarrow (u(x; y); v(x; y))$$

avec :

$$u(x; y) = a + r^2 \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + y^2}$$

$$v(x; y) = \frac{r^2 y}{(x-a)^2 + y^2}$$

On calcule  $\frac{1}{r^2} (du^2 + dv^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x; y) = r^2 \cdot \frac{y^2 - (x-a)^2}{((x-a)^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x; y) = -r^2 \cdot \frac{2y(x-a)}{((x-a)^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x; y) = -r^2 \cdot \frac{2y(x-a)}{((x-a)^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x; y) = r^2 \cdot \frac{(x-a)^2 - y^2}{((x-a)^2 + y^2)^2}$$

On pose  $Q = ((x-a)^2 + y^2)^2$

$$du^2 = \frac{\partial u^2}{\partial x} \cdot dx^2 + \frac{\partial u^2}{\partial y} \cdot dy^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx \cdot dy$$

$$\neq \frac{r^4}{Q} \left[ (y^2 - (x-a)^2)^2 + 4y^3(x-a)^2 \right]$$

$$dv^2 = \frac{\partial v^2}{\partial x} \cdot dx^2 + \frac{\partial v^2}{\partial y} \cdot dy^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dx \cdot dy$$

... en remarquant que  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$  ;  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\begin{aligned}
 du^2 + dv^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (dx^2 + dy^2) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 (dx^2 + dy^2) \\
 &\quad + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx dy - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx dy \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (dx^2 + dy^2) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 (dx^2 + dy^2) \\
 &= \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) (dx^2 + dy^2) \\
 &= \frac{1^4}{Q^2} \cdot ((y^2 - (x-a)^2)^2 + 4y^2(x-a)^2) \cdot (dx^2 + dy^2) \\
 &= \frac{1^4}{Q^2} \cdot ((y^2 + (x-a)^2)^2) \cdot (dx^2 + dy^2) \\
 &= \frac{1^4}{Q} \cdot (dx^2 + dy^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{du^2 + dv^2}{v^2} &= \frac{((x-a)^2 + y^2)^2}{1^4 \cdot y^2} \cdot \frac{1^4}{((x-a)^2 + y^2)^2} \cdot (dx^2 + dy^2) \\
 &= \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}
 \end{aligned}$$

et donc  $\text{Lgr}(\gamma(l)) = \int_{\gamma(l)} ds = \int_l ds = \text{Lgr}(l)$

$\Rightarrow$  L'inversion dans un cercle de centre  $a \in \mathbb{R}$  est une isométrie de  $\mathbb{H}^2$ .

Donc les éléments du groupe hyperbolique, agissent par isométrie sur  $\mathbb{H}^2$ . De plus les isométries transforment des géodésiques en des géodésiques. Donc, toutes les droites hyperboliques sont des géodésiques de  $\mathbb{H}^2$ .



Montrons que toutes les géodésiques sont des droites hyperboliques.

Soient  $P$  et  $Q$ . Ils sont reliés par une droite hyperbolique.

Supposons qu'il y ait une autre géodésique de  $P$  à  $Q$ .

On peut envoyer la droite  $(PQ)$  sur une droite verticale (inversion dans 1 cercle tangent, de rayon double), et on a alors une géodésique entre  $P'$  et  $Q'$  qui n'est pas la droite verticale; ce qui n'est pas possible.

**Thm:** Les géodésiques de  $H^2$  sont les droites hyperboliques.

**Thm:** Le groupe hyperbolique est le groupe d'isométrie de  $H^2$ .

démo: Donnée une isométrie de  $H^2$ ,  $h$ .

Si  $h$  ne fixe pas  $P$ , on compose  $h$  par  $\alpha \in H$ , qui envoie  $h(P)$  sur  $P$ .  $h' = \alpha \circ h$ .

Donnée une géodésique  $l$  passant par  $P$ , on peut composer  $h$  par  $\beta \in H$ , de façon à ce que  $h$  fixe les extrémités (de  $\partial H^2 = \mathbb{R}$ ). Alors  $h$  doit fixer  $l$  point par point. Ceci car  $l$  est une géodésique, tout point est uniquement repéré par sa distance à 2 points, et puisque  $h$  est une isométrie, tout point est fixé!

$h$  est continue  $H^2$ , il a 2 composants connexes, et donc  $h$  échange ou conserve les intérieurs et extérieurs de  $l$ .

On compose éventuellement par la symétrie par  $l$ , afin que  $h$  conserve intérieur et extérieur.

Pour conclure il nous suffit de montrer qu'une isométrie de  $H^2$  qui fixe une droite (point par point) et conserve intérieur et extérieur est l'identité.

Notations : On note  $d$  la distance "hyperbolique", et de la distance euclidienne.

**lemme :** Soient  $A, B, C$  de  $\mathbb{H}^2$ , sur la droite euclidienne  $y=y_0$ .  
Alors  $d(A;B) = d(B;C)$  si  $d_e(A;B) = d_e(B;C)$

démo :  $A(a+iy_0)$   $B(b+iy_0)$

Alors l'unique droite hyperbolique passant par  $A$  et  $B$  a pour centre  $O(\frac{a+b}{2}; 0)$ . Puisque  $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  on peut supposer que c'est le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $(0;0)$  et de rayon 1 (composer par une translation, puis par une homothétie).

Puisque une symétrie

par la droite  $\Delta$  verticale

passant par  $O$  est une

isométrie de  $\mathbb{H}^2$ , et

qu'elle envoie  $A$  sur  $B$

et  $\mathbb{I}$  sur  $\mathbb{I}$  (où  $\mathbb{I} = \Delta \cap \mathcal{C}$ )

on a :  $d(A;B) = 2d(\mathbb{I};B)$

$\mathcal{C}$  a pour expression  $y = \sqrt{1-x^2} = f(x)$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(A;B) = 2 \int_0^{x_0} \frac{1}{f(x)} \sqrt{1+f'(x)^2} dx = 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{1-x^2}$$

on pose  $x = \cos \theta$

donc  $dx = -\sin \theta \cdot d\theta$

$$x_0 = \frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow d(A;B) = 2 \int_{\arccos(0)}^{\arccos(x_0)} \frac{-\sin \theta}{1-\cos^2 \theta} d\theta = -2 \int_{\arccos(0)}^{\arccos(x_0)} \frac{d\theta}{\sin \theta}$$

$$\text{On pose } x = \frac{\cos \theta}{2} \Rightarrow d\theta = 2 \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}} \quad dx = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} dx = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow d(A;B) = -2 \int_{\operatorname{tg}(\arccos(0)/2}^{\operatorname{tg}(\arccos(n_0)/2)} \frac{dx}{x} = -2 \ln \left( \frac{\operatorname{tg}(\arccos(n_0)/2)}{\operatorname{tg}(\arccos(0)/2)} \right)$$

$$= -2 \ln \frac{\operatorname{tg}(\arccos(n_0)/2)}{\operatorname{tg}(\pi/4)}$$

$$= -2 \ln \operatorname{tg}(\arccos(n_0)/2)$$

$$A(a; y_0), B(b; y_0), C(c; y_0).$$

$$d(A;B) = -2 \ln \left( \operatorname{tg} \left( \arccos \left( \frac{b-a}{4} \right) \right) \right)$$

$$d(B;C) = -2 \ln \left( \operatorname{tg} \left( \arccos \left( \frac{c-b}{4} \right) \right) \right)$$

~~ensemble de~~

~~$\ln, \operatorname{tg}$  et  $\arccos$  sont des bijections sur leur définition.~~

$$\Rightarrow d(A;B) = d(B;C) \Leftrightarrow b-a = c-b$$



$x_0$  ne dépend que de l'angle  $\widehat{AOB}$ .

$\ln, \operatorname{tg}$  et  $\arccos$  réalise des bijections sur

$$\Rightarrow d(A;B) = d(B;C) \text{ m } d_e(A;B) = d_e(B;C)$$

les ensemble défini

c)

**Lemme:** Une transformation de  $\mathbb{H}^2$ , qui fixe tous les points d'une droite hyperbolique, et ne permute pas intérieur et extérieur est l'identité.

dem: (on le fait dans le cas d'un cercle ...)

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle (que l'on peut prendre basé en  $O$ ), laisse fixe par  $h \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ .

Soit  $\Delta$  la droite verticale passant par  $O$ .

Soit  $A = \Delta \cap \mathcal{C}$

et  $B$  sur  $\Delta$  dans "l'intérieur" de  $\mathbb{H}^2, \mathcal{C}$

si  $P \in \mathcal{C}$ , on note  $P' = \mathcal{S}_\Delta(P)$ .

soit  $h(B)$ .  $h(B)$  est sur la droite  $y = y_0$

soient  $P$  et  $P' \in \mathcal{C} \cap "y = y_0"$

alors  $d(B; P) = d(B; P') \Rightarrow d(h(B); P) = d(h(B); P')$

(avec le lemme précédent)  $\Rightarrow d_e(h(B); P) = d_e(h(B); P')$

$\Rightarrow h(B) \in \Delta$ .

On  $d(A; B) = d(A; h(B))$  et  $B$  et  $h(B)$  sont tous deux intérieurs à  $\mathcal{C} \Rightarrow h(B) = B$ . Donc  $h$  fixe 2 points distincts de  $\Delta$ , et alors, puisque c'est une isométrie,  $h$  fixe tous les points de  $\Delta$ .

$\Rightarrow$  Donc  $h$  fixe toutes les droites hyperboliques intersectant  $\Delta$  et  $\mathcal{C}$

$\Rightarrow h$  fixe toute la partie hachurée.

$\rightarrow$  (en considérant des géod. verticales)

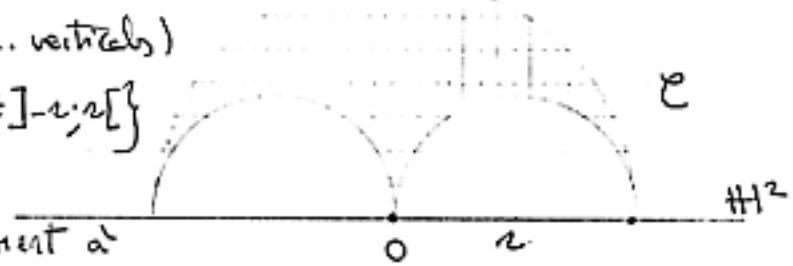
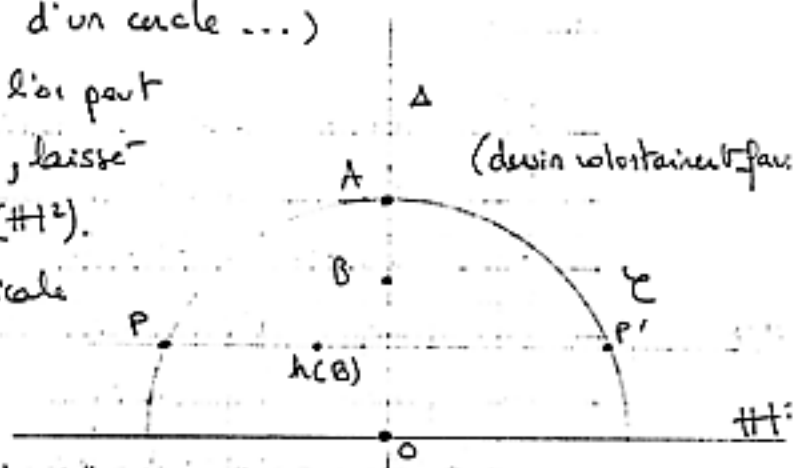
$h$  fixe  $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Re}(z) \in ]-r, r[ \}$

: une bande verticale.

On tout point de  $\mathbb{H}^2$  appartient à

une géodésique qui passe par cette bande, et qui est donc fixée par  $h$

$\Rightarrow h$  fixe tout  $\mathbb{H}^2$ . Soit terminer la demo du Théorème.  $\square$

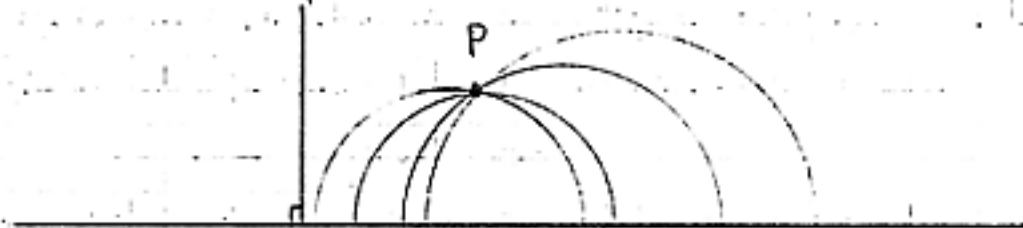


## 1. Le plan hyperbolique :

$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  muni de la métrique riemannienne

Alors :

- Les points sont les éléments de  $\mathbb{H}^2$
- Les droites sont les droites hyperboliques.
- Par 2 points distincts il passe une et une seule droite
- Le groupe d'isométrie de  $\mathbb{H}^2$  est le groupe hyperbolique
- Le groupe hyperbolique agit transitivement sur  $\{(p; d) \mid p \in \mathbb{H}^2, d \text{ droite passant par } p\}$   
i.e :  $\mathbb{H}^2$  est homogène et isotrope
- Par un point il passe une infinité de droites n'intersectant pas une droite donnée.
- $\mathbb{H}^2$  est complet



i.e , la géométrie de  $\mathbb{H}^2$  est non-euclidienne

• Homogénéité et isotropie

—  $(X; d)$  espace métrique,  $G$  groupe d'isométrie de  $X$ .

On dit que  $X$  est homogène lorsque :

$\forall x, y \in X, \exists g \in G$  tq  $y = g.x$ , i.e.,  $G$  agit transitivement sur  $X$ .

Si  $G$  agit transitivement sur  $X$ , tous les stabilisateurs de points sont conjugués de  $G$ , i.e.:  $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$   
stabilisateur de  $x$  (ou groupe d'isotropie de  $x$ )

$\forall x, y \in X, \exists h \in G$  tq  $G_y = h.G_x.h^{-1}$  (il suffit de prendre  $h \in G$  avec  $x = h.y$ ).

$X$  est dit isotrope si le stabilisateur de tout point est  $O(2)$  (groupe des matrices  $2 \times 2$ , orthogonales.)

(— Exerc: Autre définition :  $X$  est dit (homogène) et isotrope lorsque  $G$  agit transitivement sur  $\{(\gamma; d) \mid \gamma \in X, d \text{ une géodésique passant par } \gamma\}$  )

Intuitivement : — homogène : "la géométrie est la même en tout point"

— isotrope : "la géométrie est la même dans toutes les directions."

**Proposition :** Le stabilisateur d'un point est  $O(2)$

démon : Toute isométrie de  $H^2$  est de la forme :

$$o.p : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad ad-bc=1$$

$$o.r : z \mapsto \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} \quad \alpha \delta - \beta \gamma = -1$$

$H^2$  est homogène  $\Rightarrow$  on s'intéresse au stabilisateur de  $i$

$$? Z(i). \quad \frac{ai+b}{ci+d} = i \Leftrightarrow a=d, b=-c \quad (a^2+b^2=1)$$

$$\text{ou } \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} = z \iff \begin{matrix} \alpha = -\delta \\ \beta = \gamma \end{matrix} \quad (\alpha^2 + \beta^2 = 1)$$

On considère :  $\varphi : \mathbb{Z}(i) \rightarrow O(2)$

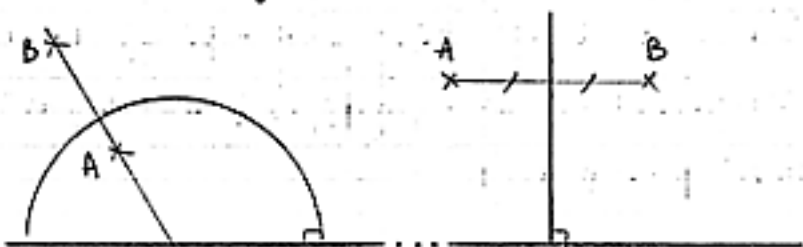
défini par :  $\frac{ai+b}{-bi+a} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad a^2+b^2=1$

$$\frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\beta \bar{z} - \alpha} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Il suffit de montrer que  $\varphi$  est un morphisme de groupe pour montrer que  $\mathbb{Z}(i) \approx O(2)$  (exercice)

Proposition :  $G$  agit transitivement sur  $\{x, d \mid x \in \mathbb{H}^2, d \text{ géod.}\}$

1)  $G$  agit transitivement sur  $\mathbb{H}^2$



On peut toujours trouver une réflexion qui envoie A sur B.

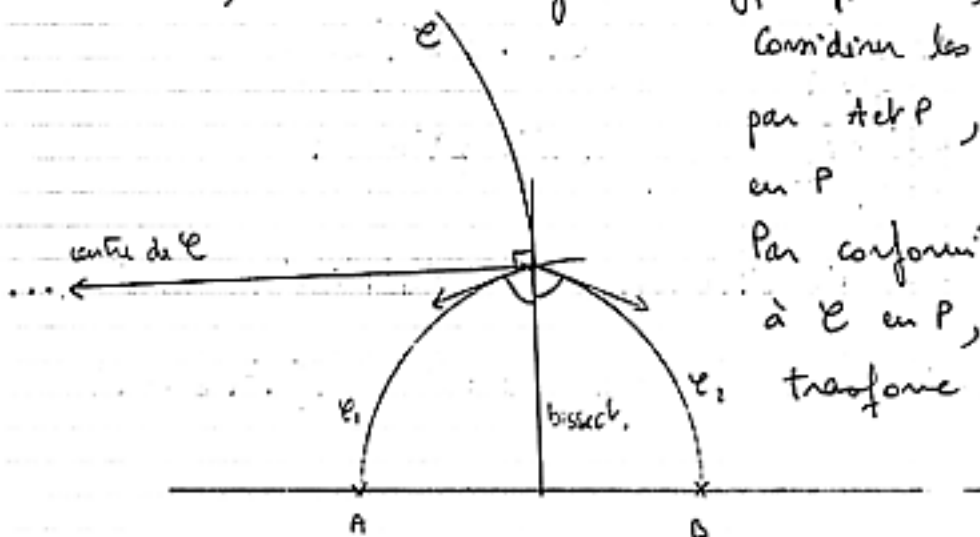
2)  $G$  agit transitivement sur les directions

On doit montrer : donnés  $d$  et  $d'$  des droites hyperboliques passant par  $P$ , il existe une transformation fixant  $P$ , envoyant  $d$  sur  $d'$ .

Il suffit de montrer : donnés 2 points  $A, B \in \mathbb{R}$  et  $P \in \mathbb{H}^2$ , il existe une réflexion hyp. fixant  $P$ , envoyant A sur B.

Considérons les droites hyperboliques passant par A et P, et B et P et leurs tangentes en P.

Par conformité on peut tracer la tangente à  $\mathcal{C}$  en P, où l'inversion dans  $\mathcal{C}$  transforme A en B, et fixe P.



•  $\mathbb{H}^2$  est complet

Lemme : dans un espace métrique  $E$ , si il existe  $\varepsilon > 0$ ,  
t<sub>p</sub>  $\forall x \in E$   $\overline{B(x; \varepsilon)}$  est compact, alors  $E$  est complet.

dem : soit  $(x_n)$  suite de Cauchy.

Pour  $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\exists n_0$  t<sub>p</sub>  $\forall n \geq n_0$ ,  $d(x_n; x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$   
donc  $(x_n)_{n \geq n_0} \subset \overline{B(x_{n_0}; \varepsilon)}$  qui est compact  
donc  $(x_n)$  a une valeur d'adhérence, et converge  
donc vers cette valeur (car de Cauchy) ■

Les boules hyperboliques, sont des "boules euclidiennes décentrées"  
, dont l'adhérence dans  $\mathbb{H}^2$  (muni de la topologie métrique) est  
une boule (euclidienne, "décentrée") fermée (en fait,  $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$   
,  $\forall x \in \mathbb{H}^2$ , la boule hyperbolique centrée en  $x$ , de rayon  $r$ ,  
est à distance non nulle de  $\partial \mathbb{R}$ , et alors compacte), compacte  
et donc avec le lemme  $\mathbb{H}^2$  est complet -



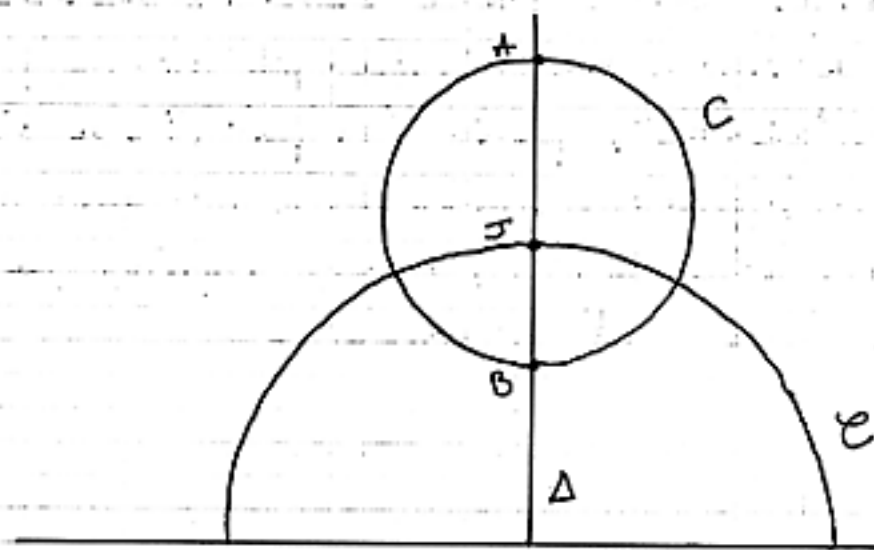
## Un peu de géométrie Hyperbolique

### ① Quels sont les cercles hyperboliques?

On considère un point  $J$  de  $\mathbb{H}^2$  (que l'on prend d'abaisse nulle), et  $A$  et  $B$  sur la droite verticale  $\Delta: x=0$ , tq  $J$  soit le milieu (au sens hyp.) de  $[A;B]$ .

On se donne  $C$ , le cercle (euclidien) de diamètre  $[A;B]$ , et  $\mathcal{C}$ , la droite hyperbolique "centrée en  $o$ ", passant par  $J$ .

Alors l'inversion par  $\mathcal{C}$  fixe  $J$ , envoie  $A$  sur  $B$  et permut  $C$ .

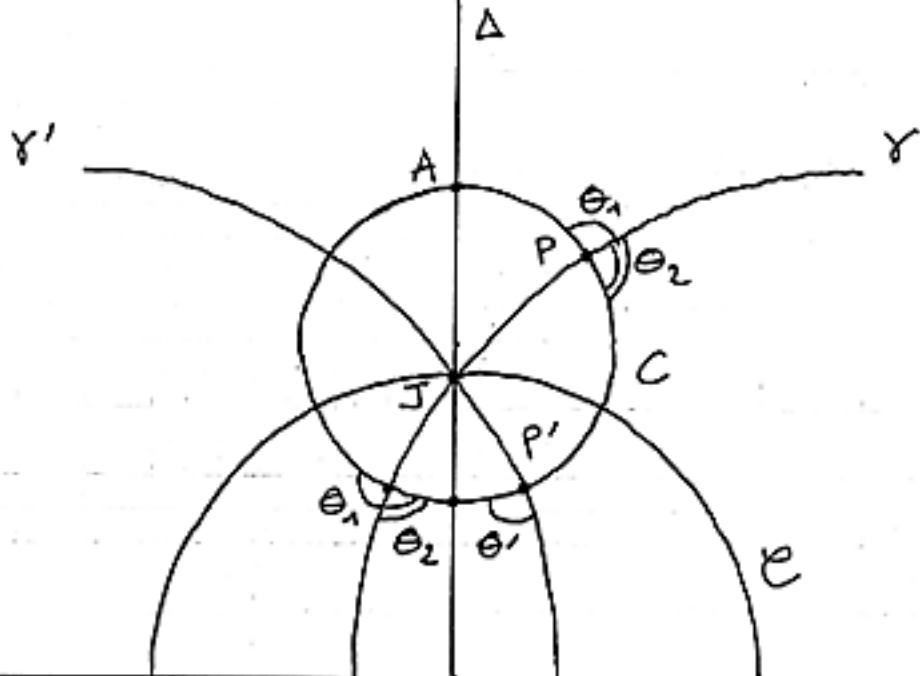


On se propose de montrer que  $C$  est en fait un cercle hyperbol. centré en  $J$ , i.e.  $C = \{ M \in \mathbb{H}^2 \mid d(J;M) = r \}$ ;  $r = d(J;A)$ .

bonne: toute droite hyperbolique passant par  $J$ , intersecte  $C$  orthogonalement.

démo: On se donne  $\gamma$ , droite hyperbolique passant par  $J$  (on peut supposer que  $\gamma \neq \Delta$ )

- Premièrement, on remarque que lorsque 2 cercles s'intersectent en 2 points, ils découpent en ces 2 points des angles égaux.  $\gamma$  et  $C$  découpent les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .



- Deuxièmement, On considère l'inversion par  $\mathcal{C}$ .

$J$  est fixe et  $\Delta$  est préservé, et donc par conformité,  $\gamma$  est envoyé sur  $\gamma'$ , son symétrique par rapport à  $\Delta$ .

$C$  est préservé par l'inversion, et donc  $P$  est envoyé sur  $P'$ , et par conformité  $\theta_1 = \theta_1'$

- Troisièmement, la symétrie par rapport à  $\Delta$ , envoie  $\gamma$  sur  $\gamma'$  et préserve  $C$ , et donc  $\theta_1' = \theta_2$

On a donc  $\theta_1 + \theta_2 = 2\theta_1 = \pi \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$  qfd  $\Rightarrow$

**Proposition :**  $C$  est un cercle hyperbolique, centre en  $J$ .

dém: - Soit  $P \in C$ . On veut montrer que  $d(J;P) = d(J;A)$

On considère l'inversion dans le cercle  $\gamma$ , fixant  $J$ , envoyant  $P$  sur  $A$ . Puisque  $\gamma$  est orthogonal à  $C$ ,  $C$  est préservé par l'inversion par  $\gamma$ , et donc  $P$  est envoyé sur  $A$  qfd  $\Rightarrow$

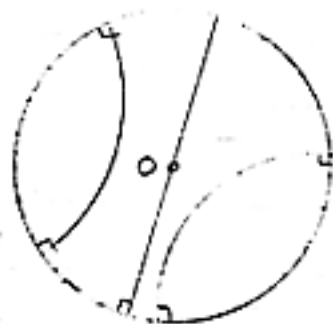
- Soit  $P \in \mathbb{H}^2$  tq  $d(J;P) = d(J;A)$

Donc il existe une inversion par un cercle  $\gamma'$ , fixant  $J$  et envoyant  $P$  sur  $A$ . On  $\gamma'$  préserve  $C$  ( $C \perp \gamma'$ ) et  $\gamma'$  envoie  $A$  sur  $P$ , et donc  $P \in C$  qfd  $\Rightarrow$

## Le modèle de Poincaré : $D^2$

On considère l'application :

$$\varphi: \begin{aligned} \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$



C'est une application conforme (transformation de Möbius) qui envoie  $\mathbb{H}^2$  sur le disque ouvert de centre  $O$ , de rayon 1.

On admettra que la métrique induite par  $\varphi$  est donnée par la forme différentielle :  $ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$

### ② L'isométrie d'un cercle, Aire d'un disque.

$\mathbb{C}$  un cercle hyperbolique, centre en  $i$ , de rayon  $R$ .  
Dans le modèle de Poincaré, c'est un cercle euclidien, centre en  $O$  (image de  $i$  par  $\varphi$ ) et de rayon  $r$ .

a) Trouver la distance hyperbolique de l'origine à un point à distance euclidienne  $r$  de l'origine.

Il est suffisant de calculer la longueur de  $c$  :

$$\begin{aligned} c: [0, r] &\longrightarrow D^2 \\ t &\longrightarrow (t; 0) \end{aligned}$$

c'est un lacet géodésique

$$dz = dx + i dy$$

$$|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

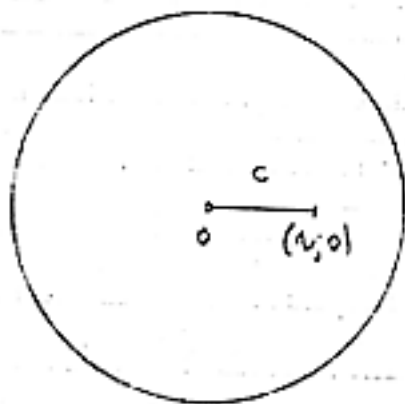
$$ds = \frac{2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - (x^2 + y^2)}$$

$$x(t) = t$$

$$dx(t) = dt$$

$$y(t) = 0$$

$$dy(t) = 0$$



$$ds = \frac{2 dt}{1-t^2}$$

$$\begin{aligned} R = d_h(0; P) &= \int_C ds = \int_0^1 \frac{2 dt}{1-t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \right] \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1-t} + \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \\ &= \left[ \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) \right]_0^1 = \ln \left( \frac{1+1}{1-1} \right) \end{aligned}$$

b) Circonférence d'un cercle.

On a une paramétrisation de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{D}^2$

$$x = r \cdot \cos \theta \quad dx = -r \cdot \sin \theta d\theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta \quad dy = r \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow ds = \frac{2r}{1-r^2} d\theta$$

$$l = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1-r^2} d\theta = 4\pi \cdot \frac{r}{1-r^2}$$

$$R = \ln \left( \frac{1+r}{1-r} \right) \Leftrightarrow r = \frac{e^R - 1}{1 + e^R}$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{1-r^2} &= \frac{\frac{e^R - 1}{1 + e^R}}{1 - \left( \frac{e^R - 1}{1 + e^R} \right)^2} = \frac{(e^R - 1)(e^R + 1)}{(1 + e^R)^2 - (e^R - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2R} - 1}{4 \cdot e^R} = \frac{e^R - e^{-R}}{4} = \frac{1}{2} \sinh(R) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l = 2\pi \cdot \sinh(R)$$

c) Aire d'un disque

$$\begin{aligned} A &= \int_0^R 2\pi \sinh(x) dx = 2\pi \int_0^R \sinh(x) dx \\ &= 2\pi \left[ \cosh(x) \right]_0^R \\ &= 2\pi \left( \frac{e^R + e^{-R}}{2} - 1 \right) \\ &= 2\pi \left( \frac{(e^{R/2} - e^{-R/2})^2}{2} \right) \\ &= 4\pi \cdot \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right) \end{aligned}$$

**Proposition :** Soit un cercle hyperbolique, de rayon  $R$ .  
Sa circonférence est  $2\pi \cdot \sinh(R)$ .  
L'aire du disque est  $4\pi \cdot \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right)$ .

### ③ Les triangles et leurs angles intérieurs

**Proposition :** Pour un triangle, la somme des angles intérieurs est inférieure à  $\pi$ .

De plus données  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$  tq  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ , il existe un triangle ayant pour angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .

**dém :** Dans le  $\frac{1}{2}$  plan supérieur. Donner un triangle, il existe toujours une isométrie envoyant un des côtés sur une droite verticale  $\Delta$ . On peut donc supposer que c'est déjà le cas.

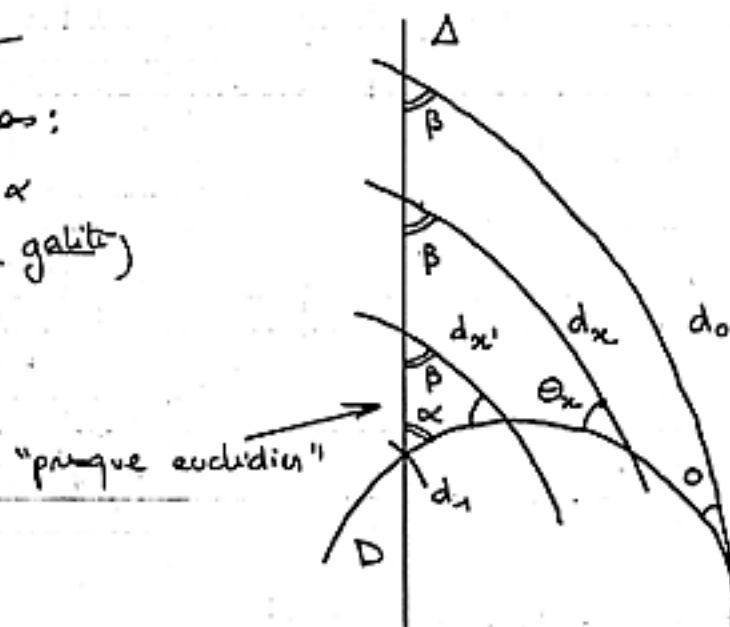
On considère  $\Delta$ , et  $D$  une droite l'intersectant avec l'angle  $\alpha$ . On a une infinité de droites intersectant  $\Delta$  avec l'angle  $\beta$ , et formant avec  $\Delta$  et  $D$  un triangle. On considère la famille  $\{d_x; x \in I\}$  de toutes ces droites.

$$0 < \alpha < \pi$$

et dans ce cas :

$$0 < \beta < \pi - \alpha$$

(sans perte de généralité)



Qd  $x$  décrit  $I$ , l'angle entre  $D$  et  $d_x$  varie continuellement entre  $0$ , et  $\pi - (\alpha + \beta)$  (bornes exclues)

$\Rightarrow$  1<sup>er</sup> : donné un triangle et  $\alpha, \beta, \gamma$  ses angles intérieurs.  
(\*)  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

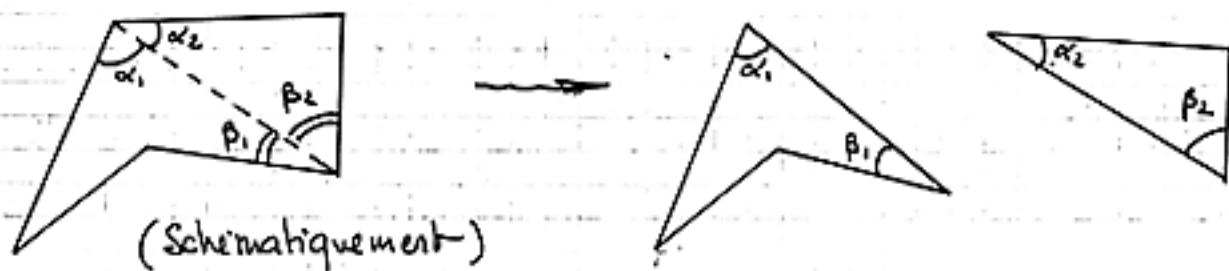
2<sup>es</sup> : Par le T.V.I ; données  $\alpha, \beta, \gamma$  vérifiant (\*)

,  $\exists$  un triangle ayant pour angles  $\alpha, \beta, \gamma$  qfd  $\Rightarrow$

**Corollaire** : Pour un polygone à  $n$  côtés, la somme des angles intérieurs est (st.) inférieure à  $(n-2)\pi$

dem : procéder par récurrence sur le nbre de côtés.

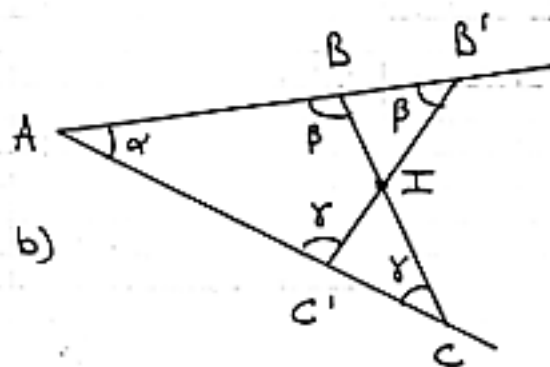
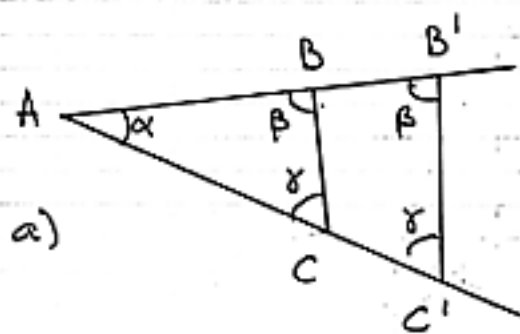
"Décomposer" un  $(n+1)$ -gône en un  $n$ -gône et un triangle.



**Corollaire** : Deux triangles sont congruents ssi ils ont même angles..

don : Donnes deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  d'angles  $\alpha; \beta; \gamma$ .

On isométrie permet de ramener  $A'$  sur  $A$ ,  $[A'B')$  sur  $[AB)$  et  $[A'C')$  sur  $[AC)$ . On a alors éventuellement l'un des cas : (Schématiquement!)



Dans le cas a), le quadrilatère  $BB'C'C$  a pour somme des angles  $2\pi$ .

Dans le cas b), le triangle  $BB'I$  a une somme des angles au moins égale à  $\pi$ .

Donc l'unique possibilité est  $B=B'$  et  $C=C'$

#### ④ Aire d'un triangle.

On montre :

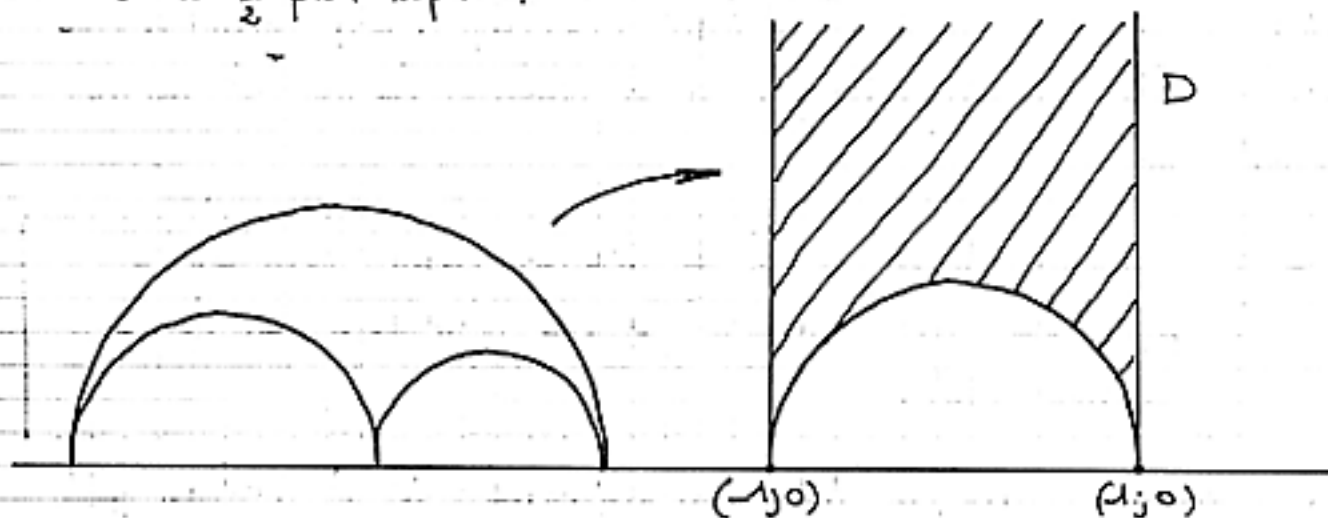
Thm : Un triangle a pour aire  $\pi$  moins la somme de ses angles intérieurs.

(dém. due à Gauss)

• On appellera triangle idéal, un "triangle" dont tous les sommets sont à l'infini ( $\mathbb{R}$  dans le  $\frac{1}{2}$  plan supérieur)

Lemme : Tous les triangles idéaux sont congruents et ont pour aire  $\pi$ .

dém : Tout triangle idéal peut être transformé par isométrie en un triangle idéal de sommets  $(-1;0)$ ;  $(1;0)$  et  $\infty$   
Dans le  $\frac{1}{2}$  plan sup. :



Donné un triangle idéal, si ses 3 sommets sont sur  $\mathbb{R}$ , on le transforme, par une involution dans un cercle de centre l'un de ses sommets, en un triangle idéal ayant  $\infty$  pour sommet. Par une translation "horizontale" suivie d'une homothétie de centre  $(0;0)$  on le transforme en un triangle ayant pour sommets  $(1;0)$ ;  $(-1;0)$  et  $\infty$ . Tous les triangles idéaux sont donc congruents.



Le domaine  $D$  délimité par ce triangle est,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 ; \sqrt{1-x^2} \leq y\}$$

La différentielle d'aire est donnée dans le  $\frac{1}{2}$  plan sup. par:

$$da = \frac{dx}{y} \times \frac{dy}{y} = \frac{1}{y^2} \cdot dx \cdot dy.$$

L'aire du triangle est donc:

$$A = \iint_D da = \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \cdot dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

On pose  $x = \sin \theta$

$$\Rightarrow A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \cdot d\theta}{\cos \theta} = \pi \quad \text{q.f.d.} \quad \square$$

- On appelle triangle à  $\frac{2}{3}$  idéal, un triangle pour lequel au moins 2 sommets sont à l'infini (i.e.  $\overline{\mathbb{R}}$ ). On appellera sommet réel d'un triangle à  $\frac{2}{3}$  idéal, le sommet ne se trouvant pas à l'infini.

**lemme :** Deux triangles à  $\frac{2}{3}$  idéaux sont congruents si ils ont même angle intérieur en leur sommet réel.

dem: Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  2 triangles à  $\frac{2}{3}$  idéaux, ayant pour sommet réel resp<sup>t</sup>  $A$  et  $A'$ . Après avoir éventuellement composé par une isométrie, on peut supposer que  $A=A'$ . (et bien sûr les isom. préservent le fait d'être à  $\frac{2}{3}$  idéal). On compose alors par une isométrie envoyant  $[A'B']$  sur  $[AB]$ , et alors, par égalité des angles,  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont soit confondus soit images l'un de l'autre par la réflexion d'axe  $(AB)$ .

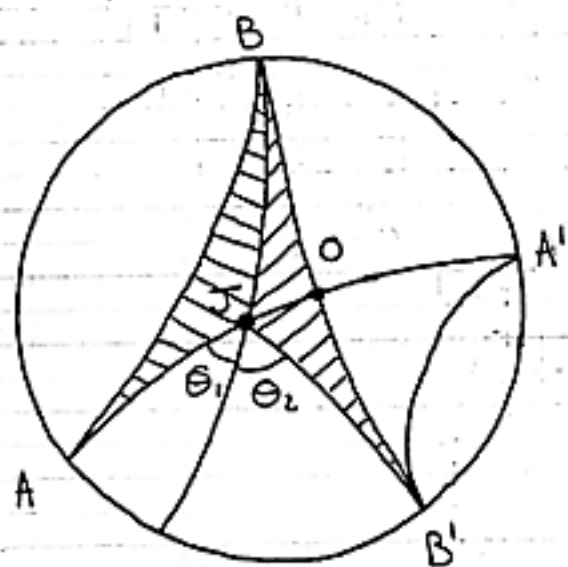
• Considérons un triangle à  $\frac{2}{3}$  idéal ayant pour angle  $\pi - \theta$  ( $\theta \in [0; \pi]$ ). On peut alors définir l'application  $A$ , qui à un tel triangle associe  $A(\theta)$ , son aire (bien défini avec les 2 lemmes précédents).

lemme :  $A(\theta) = \theta$

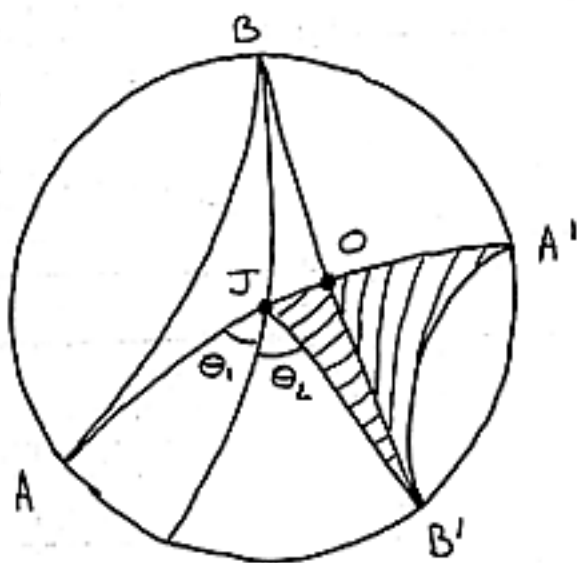
dem : 1°) ?  $A$  est une fonction additive

i.e :  $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1) + A(\theta_2)$

On se place dans le modèle de Poincaré.



Domaine d'aire  
 $A(\theta_1) + A(\theta_2)$



Domaine d'aire  
 $A(\theta_1 + \theta_2)$

On considère 2 triangles à  $\frac{2}{3}$  idéaux  $ABJ$  et  $BB'J$ , d'angle au sommet réel resp  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

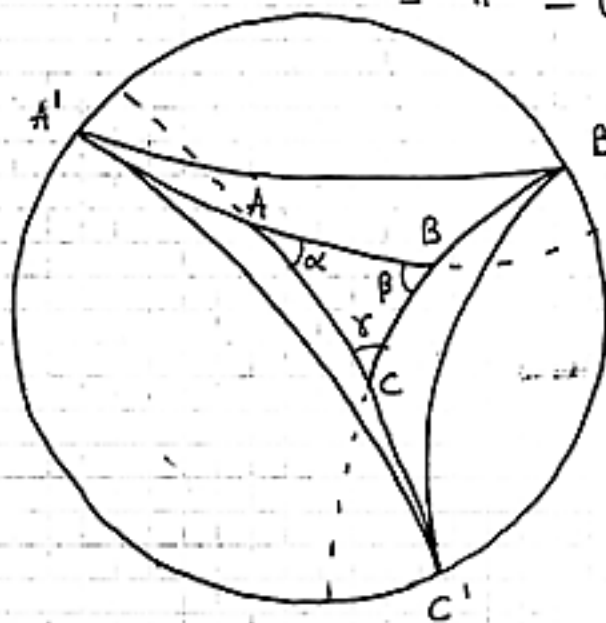
Les dessins illustrent la construction effectuée.

On considère les triangles à  $\frac{2}{3}$  idéaux  $OAB$  et  $OA'B'$  ; Ils ont même angle au sommet réel, et donc même aire

$$\begin{aligned} \text{ainsi : } A(\theta_1) + A(\theta_2) &= d(AJB) + d(BJB') \\ &= d(AOB) + d(JOB') \\ &= d(A'OB') + d(JOB') \\ &= d(JA'B') \\ &= A(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

20)  $A$  est additive sur  $[0; \pi]$ , et est donc  $\mathbb{Q}$ -linéaire.  
 $A$  est continue, et donc  $\mathbb{R}$ -linéaire (exercice).  $A$  peut se prolonger  
 par linéarité sur  $\mathbb{R}$ , en  $\tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 et alors  $\tilde{A}(x) = x \Rightarrow A(x) = x$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .  
 or  $A(\pi)$  est l'aire d'un triangle idéal, donc égale à  $\pi$   
 $\Rightarrow A(0) = 0$  qfd  $\square$

• démo du thme: On considère un (vrai) triangle  $ABC$  dans  
 le modèle de Poincaré. On se donne  $A', B'$  et  $C'$  à l'infini, comme  
 sur la figure. Alors:  $A(ABC) = A(A'B'C') - A(A'C') - A(C'B') - A(B'A')$   
 $= \pi - A(\alpha) - A(\beta) - A(\gamma)$   
 $= \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$



qfd  $\square$

**Corollaire:** L'aire d'un polygone à  $n$  côtés est  
 $(n-2)\pi - \sum \text{angles}$

dem: procéder par récurrence sur le nombre de côtés

## • Compactification de $\mathbb{H}^2$

On peut définir rigoureusement une notion de bord de  $\mathbb{H}^2$ ,  $\partial\mathbb{H}^2$  et le munir d'une topologie de façon naturelle. C'est à dire que  $\partial\mathbb{H}^2$  corresponde au cercle frontière du modèle de Poincaré, ou à  $\mathbb{R}$  dans le modèle du  $\frac{1}{2}$  plan supérieur.

Toute isométrie de  $\mathbb{H}^2$  s'étend sur  $\overline{\mathbb{H}^2} \stackrel{N}{=} \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2 \approx \mathbb{D}^2$  de manière conforme.

- Toute isométrie de  $\mathbb{H}^2$  s'étendant de façon naturelle en un automorphisme de  $\overline{\mathbb{H}^2}$ , avec le thme de Brouwer, toute isométrie a au moins un point fixe dans  $\overline{\mathbb{H}^2}$ .

Toute isométrie non triviale, préservant l'orientation admet au plus 2 points fixes (Un elt de  $M^+$  fixant 3 pts est l'identité.)

Considérons  $h$ , une isométrie  $\in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ , non triviale.

Si  $h$  fixe un point dans  $\mathbb{H}^2$ , alors  $h$  ne peut fixer aucun autre point de  $\overline{\mathbb{H}^2}$ . En effet, si c'était le cas, la géodésique  $(d)$  passant par les 2 points fixes serait fixée (pt par pt), ceci car tout point de cette géodésique est repéré par sa distance à  $P$  et par la composante de  $(d) \setminus P$  le contenant. On a alors :

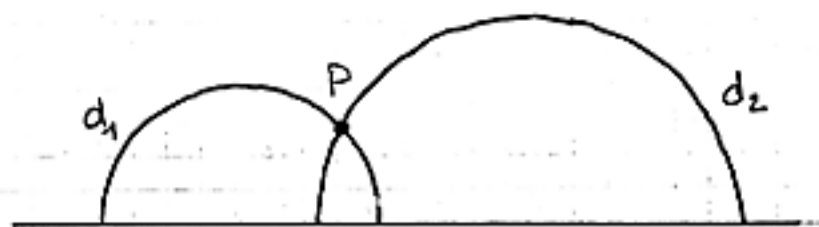
Théorème Def<sup>o</sup> : Soit  $h$  un élément non trivial de  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$

Alors :

- soit 1)  $h$  fixe un point de  $\mathbb{H}^2$ . Alors il ne fixe aucun autre point de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  :  $h$  est dit elliptique
- soit 2)  $h$  fixe un unique point de  $\partial\mathbb{H}^2$   
 $h$  est dit parabolique
- soit 3)  $h$  fixe 2 points de  $\partial\mathbb{H}^2$ .  $h$  est dit hyperbolique  
(ou loxodromique)

• Puisque toute isométrie de  $\mathbb{H}^2$  est la composée de moins de 3 réflexions, et qu'une réflexion renverse l'orientation, tout élément de  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  est la composée d'exactement 2 réflexions par  $d_1$  et  $d_2$ . Suivant que  $d_1$  et  $d_2$  soient sécantes, parallèles, ou ultraparallèles, on a les cas suivants pour  $h = \gamma_{d_2} \circ \gamma_{d_1}$ . Dans le modèle du  $\frac{1}{2}$  plan np. :

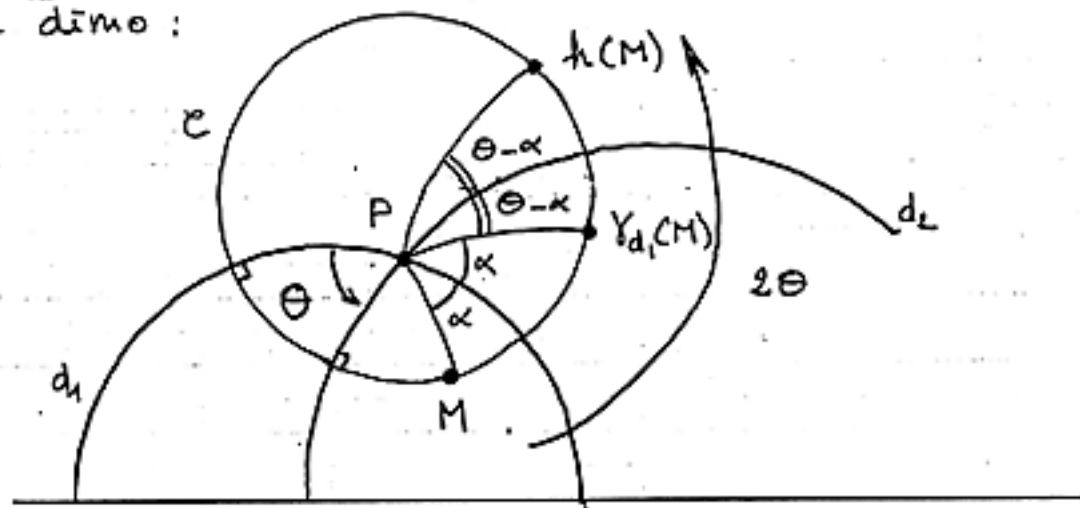
• a)  $d_1$  et  $d_2$  sont sécantes



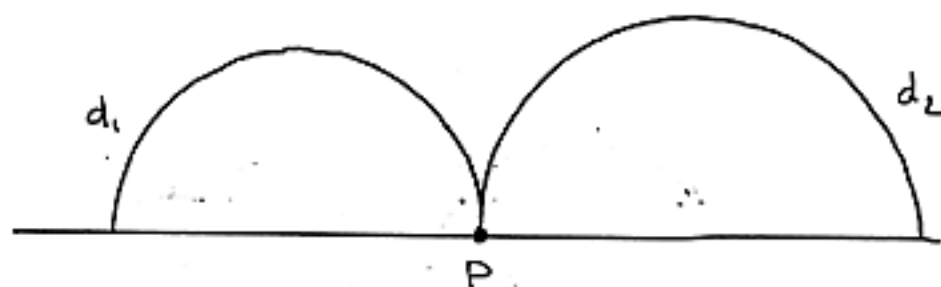
Alors  $h = \gamma_{d_2} \circ \gamma_{d_1}$  fixe  $P = d_1 \cap d_2$  (et donc que  $P!$ ),  $h$  est elliptique

Remarquons que  $h$  préserve tout cercle hyperbolique  $\mathcal{C}$ , centré en  $P$ . En effet  $\mathcal{C}$  est alors orthogonal à  $d_1$  et à  $d_2$ ,  $\gamma_{d_1}$  et  $\gamma_{d_2}$  préservent alors  $\mathcal{C}$ , et donc  $h$  préserve  $\mathcal{C}$ .

On peut alors vérifier que  $h$  est une rotation au sens hyperbolique, de centre  $P$  et d'angle  $2\theta$ , où  $\theta$  est l'angle orienté entre  $d_1$  et  $d_2$ . La figure suivante illustre la demo :



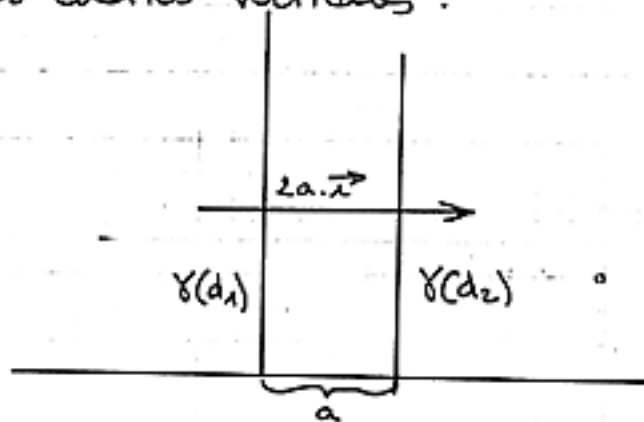
- b) Si  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles (i.e s'intersectent sur  $\partial\mathbb{H}^2$ )



Alors  $h = \gamma_{d_2} \circ \gamma_{d_1}$  fixe  $P$  sur  $\partial\mathbb{H}^2$ . On va montrer que c'est l'unique.

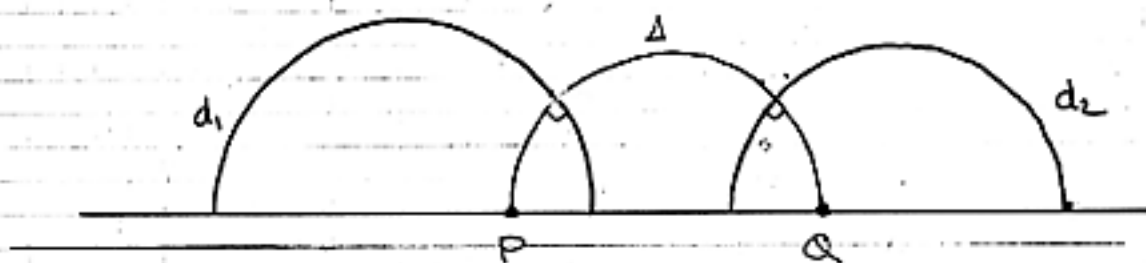
Remarquons que si  $\gamma_c$  est une réflexion, et  $g$  une isométrie, le conjugué de  $\gamma_c$  par  $g$ ,  $g \gamma_c g^{-1}$  est une réflexion par  $g(c)$ . En effet c'est un elt renversant l'orientation, qui fixe point par point la droite  $g(c)$ . De plus la conjugaison par une isométrie préserve les props d'être ell., par., hyp. .

Si l'on considère une droite "centrée en  $P$ ", et  $\gamma$  l'inversion dans cette droite,  $\gamma \cdot h \cdot \gamma^{-1}$  est la composée de deux reflex. par des droites verticales.



C'est alors une "translation euclidienne horizontale" de vecteur  $2a \cdot \vec{x}$ . L'unique point fixe est  $\infty$ .  $P$  est donc l'unique point fixe par  $h \Rightarrow h$  est une isométrie parabolique. et en conjuguant  $h$  par une isométrie envoyant  $P$  sur l' $\infty$ , on obtient une translation euclidienne horizontale.

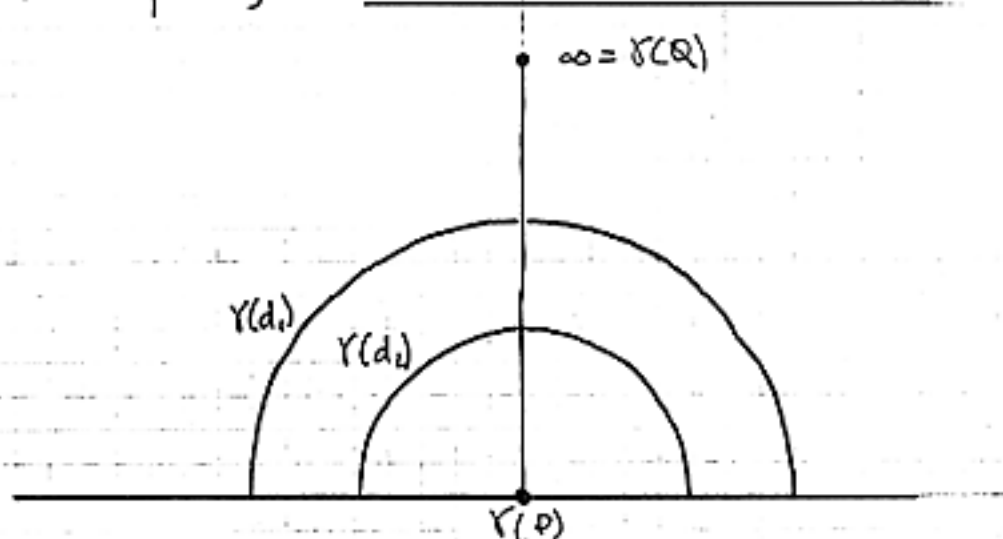
- c) si  $d_1$  et  $d_2$  sont ultraparallèles (ne s'intersectent pas sur  $\overline{H^2}$ )



Alors il existe une et une seule droite  $\Delta$  orthogonale à  $d_1$  et à  $d_2$  (la demo est similaire au thme sur la somme de angles d'un triangle. Remarquer que cette droite n'existe pas dans les cas a) et b)). Alors  $P$  et  $Q$ , les points finaux de  $\Delta$  sont fixes et  $\Delta$  est préservé ( $\Delta$  est appelé axe de l'isométrie. Remarquer que  $\Delta$  n'est pas fixé pt par pt.)

$\Rightarrow h$  est une isométrie hyperbolique.

Si l'on considère une droite "centrée en  $Q$ " et  $\gamma$  l'inversion dans cette droite.  $\gamma$  envoie  $(PQ)$  sur une droite "verticale", et  $d_1$  et  $d_2$  sur des droites orthogonales à  $(PQ)$ . Et donc  $\gamma$  conjugue  $h$  en la composée de 2 inversions par des cercles concentriques, i.e. une homothétie euclidienne.



$\Rightarrow$  remarquer que  $h$  agit par translations hyperboliques sur son a

• Analytiquement :

On considère  $\varphi: \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \rightarrow \text{PSL}_2 \mathbb{R}$

Proposition : soit  $h \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$

-  $h$  est elliptique si  $|\text{tr}(\varphi(h))| < 2$

-  $h$  est parabolique si  $|\text{tr}(\varphi(h))| = 2$

-  $h$  est hyperbolique si  $|\text{tr}(\varphi(h))| > 2$

dem:  $h$  donne ;  $h: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$   $a, b, c, d \in \mathbb{R}$   
 $ad - bc = 1$

$$(*) : h(z) = z \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

$$\Delta = (a+d)^2 - 4 = \text{tr}(\varphi(h))^2 - 4$$

-  $h$  est elliptique si  $(*)$  a 2 solutions complexes

$$\text{i.e.} \Leftrightarrow |a+d| < 2 \Leftrightarrow |\text{tr}(\varphi(h))| < 2$$

-  $h$  est parabolique si : - on a une ! solution réelle, i.e.  
si  $|a+d| = 2$  i.e.  $|\text{tr}(\varphi(h))| = 2$

- ou si  $h(\infty) = \infty$  (i.e.  $c=0$ ) : et  $az+b=dz$  n'a pas  
de solution, i.e.  $a=d$ , et alors puisque  $ad=1$   
 $\Rightarrow |\text{tr} \varphi(h)| = 2$

(si de surcroît  $b=0$ ,  $\varphi$  est l'identité)

-  $h$  est hyperbolique si - On a 2 solutions réelles

$$\Leftrightarrow |\text{tr} \varphi(h)| > 2$$

- ou si  $h(\infty) = \infty$  (i.e.  $c=0$ ) et  $az+b=dz$  a une  
unique solution. Alors  $a \neq d$  et  $ad=1$

$$\Rightarrow a+d = \frac{a^2+1}{a}$$

et  $\frac{a^2+1}{a}$  atteint sa valeur minimale 2, par  $a=1$  (et  $d=1$ )

donc si  $a \neq d$  et  $ad=1$   $a+d > 2$   $\square$



- Maintenant, donnée une isométrie renversant l'orientation, il induit un automorphisme de  $S^1 \approx \partial \mathbb{H}^2$  renversant l'orientation, et fixe donc 2 points sur  $\partial \mathbb{H}^2$ .

La droite passant par ces 2 points est préservée.

Si l'on compose par l'inversion dans cette droite, on obtient une isométrie préservant l'orientation, fixant 2 points sur  $\partial \mathbb{H}^2$ , et donc toute isométrie renversant l'orientation est soit une réflexion, soit une "glide reflection", i.e. la composée d'une isométrie hyperbolique, et d'une réflexion  $\perp$  par l'axe.

---

Proposition : Deux éléments non triviaux de  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  commutent si ils ont même points fixes (dans  $\mathbb{H}^2$ )

---

démo:  $\Rightarrow$  donnés  $\alpha, \beta \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  qui commutent

$$\beta \alpha \beta^{-1} = \alpha$$

et  $p$  est un point fixe de  $\alpha$  si  $\beta(p)$  est un point fixe de  $\beta \alpha \beta^{-1}$ .

$\Rightarrow$  si ils commutent  $\beta(p) = p$  pour tout point fixe

$\Leftarrow$  - Pour 2 elt<sup>s</sup> paraboliques :

si ils ont même points fixes, la conjugaison par un même élément les envoie sur 2 translations horizontales, qui commutent  $\Rightarrow$  ils commutent ( $\alpha$  et  $\alpha'$  commutent si  $\beta \alpha \beta^{-1}$  et  $\beta \alpha' \beta^{-1}$  commutent)

- Pour 2 elt<sup>s</sup> elliptiques :

si ils ont même point fixe  $P$ , ce sont 2 rotations de centre  $P$ , qui commutent alors.

- Pour 2 elt<sup>s</sup> hyperboliques :

si ils ont même points fixes, une conjugaison par un même elt<sup>s</sup> les envoie sur 2 homothéties de même centre, qui commutent donc, et donc ils commutent  $\Rightarrow$

Corollaire : Soit  $\alpha \in \mathcal{H}om^+(\mathbb{H}^2)$ .  $Z(\alpha)$  son centralisateur dans  $\mathcal{H}om^+(\mathbb{H}^2)$ .

- si  $\alpha$  est elliptique,  $Z(\alpha) \simeq S^1$
- sinon  $Z(\alpha) \simeq \mathbb{R}$

Corollaire : Un sous-groupe discret de  $\mathcal{H}om^+(\mathbb{H}^2)$  ne contient pas  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

démo: Les sous-gps <sup>non triviaux</sup> discrets de  $S^1$  sont  $\mathbb{Z}_n$   
" "  $\mathbb{R}$   $\mathbb{Z}$  -