

Groupes discrets, Topologie & Géométrie

J-Ph. Préaux
preaux@cmi.univ-mrs.fr

1- Les groupes

- Un groupe est un ensemble G muni d'une opération (associative) interne, qui admet un élément neutre, et telle que tout élément est inversible.

- Ils apparaissent initialement dans le courant du XIXe siècle sous la forme des groupes finis (Galois, Cauchy)
- Parallèlement apparaissent les groupes infinis « continus » (groupes de Lie). Mais ces derniers disposent de beaucoup plus de structure (variétés différentielles) et leur traitement nécessite d'autres outils que l'algèbre.

Classification des groupes finis

- Un sous-groupe H de G est dit normal si

$$\boxed{\forall g \in G, g.H.g^{-1} = H}$$

On note : $H \triangleleft G$

- Un groupe est dit simple s'il ne contient aucun sous-groupe normal autre que $\{1\}$ ou lui-même.

Ex : $\mathbb{Z}_p$ lorsque p est premier, le groupe alterné d'ordre 5 A_5 .

Classification des groupes finis

- Si un groupe fini G n'est pas simple, il doit contenir un sous-groupe normal H_1 d'ordre strictement inférieur.
- Si H_1 n'est pas simple il doit contenir un sous-groupe normal H_2 .

Classification des groupes finis

- Si un groupe fini G n'est pas simple, il doit contenir un sous-groupe normal H_1 d'ordre strictement inférieur.
- Si H_1 n'est pas simple il doit contenir un sous-groupe normal H_2 .
- On continue ainsi jusqu'à obtenir un sous-groupe simple H_s .

$$G = \left(\left(H_s \rtimes \frac{H_n}{H_{n-1}} \right) \rtimes \dots \right) \rtimes \frac{G}{H_1}$$

Tous les groupes sont d'ordre $< |G|$

Classification des groupes finis

- Dans le courant du XXe siècle, a été achevée la classification des groupes finis simples (« the enormous theorem »).
- Ils se répartissent en 5 classes dont les deux plus simples sont:
 - Les groupes cycliques d'ordre premier
 - Les groupes alternés d'ordre au moins 5.

Groupes infinis discrets

- Les groupes infinis « non continus » apparaissent tout d'abord comme sous-groupes discrets de groupes de Lie.
- Poincaré (& Klein) résout le difficile problème de l'intégration des équ. diff. linéaires à coef. algébriques, en utilisant les groupes *fuchsians* et *kleiniens* (ss-gps discrets de $PSL(2, \mathbb{R})$ et $PSL(2, \mathbb{C})$) respectivement gp d'isométrie des esp. *Hyperboliques* de dim. 2 et 3.
- Il est le premier à mettre en application la *géométrie hyperbolique*.

Groupe libre

- Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble fini.

Un *mot sur X* , est une suite finie d'éléments de X ou de ses inverses.

Ex: $x_1 x_3^{-1} x_1 x_2^{-1}$

- L'ensemble $F(X)$ des mots sur X muni de l'opération de concaténation est un groupe si l'on pose :
- L'élément neutre est le mot vide ε
 - Quelque soit i , $x_i x_i^{-1} = x_i^{-1} x_i = \varepsilon$

C'est le *groupe libre* de rang n

Présentation de groupe

- Soit X comme précédemment, et R un ensemble (fini...) de mots sur X .
- Une *présentation de groupe* $\langle X \mid R \rangle$ définit un groupe G :
 - Soit $N(R)$ la clôture normale de R dans $F(X)$.
 - Alors G est le quotient :

$$G \cong \frac{F(X)}{N(R)}$$

- Exs: $F(X) \cong \langle x_1, \dots, x_n \mid \rangle$

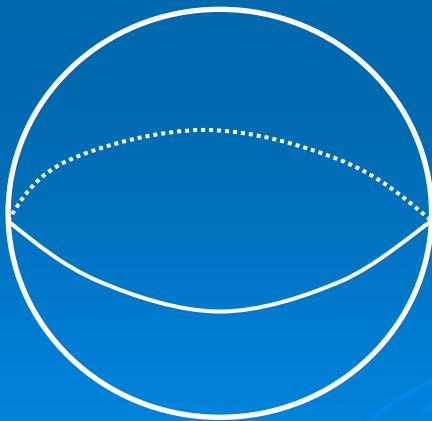
$$\mathbb{Z}_5 \cong \langle x \mid x^5 \rangle$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

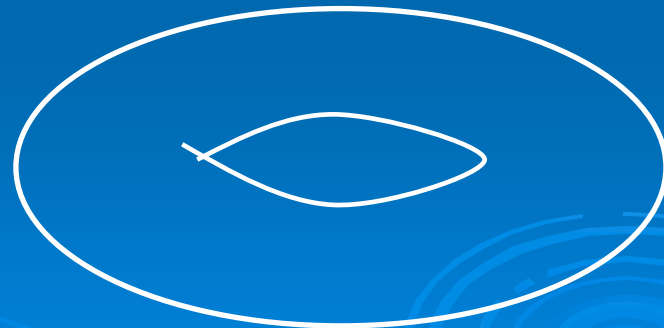
Topologie des variétés

- Une *variété (topologique)* de dim. N est un espace topologique séparé, localement homéomorphe à $\mathbb{R}^N$

Exs (en dim 2) :



S^2



$S^1 \times S^1$

Groupe fondamental

- Soit X un espace topologique connexe par arc, et $x \in X$
- Un lacet basé en x : $f : (S^1, 0) \rightarrow (X, x)$
- L'ensemble des classes d'homotopie de lacets basés en x est un groupe lorsqu'on le munit du produit naturel des lacets.
noté : $\pi_1(X, x)$
- La classe d'isomorphisme du groupe ne dépend pas du point x choisi. On note $\pi_1(X)$

➤ ***Théorème de Schreier :***

Un sous groupe d'un groupe libre est libre.

➤ Démo (combinatoire) : laborieuse !

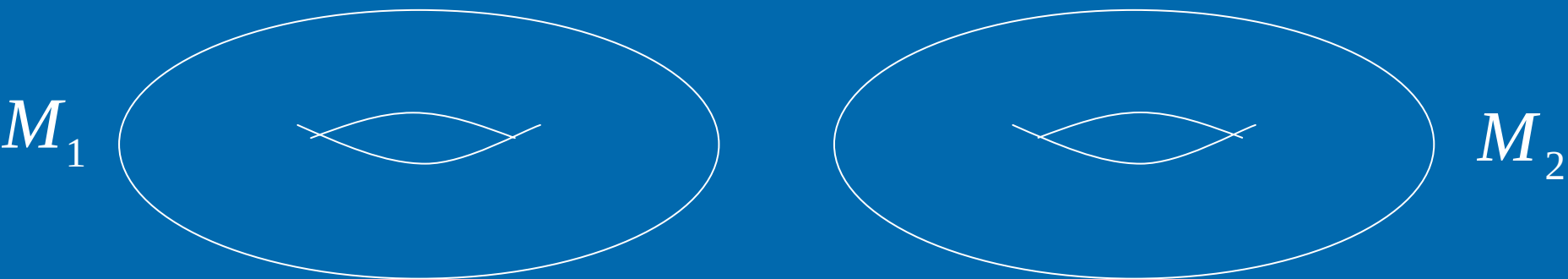
➤ Démo (topologique) :

le gpe fondamental d'un graphe X est un groupe libre F .

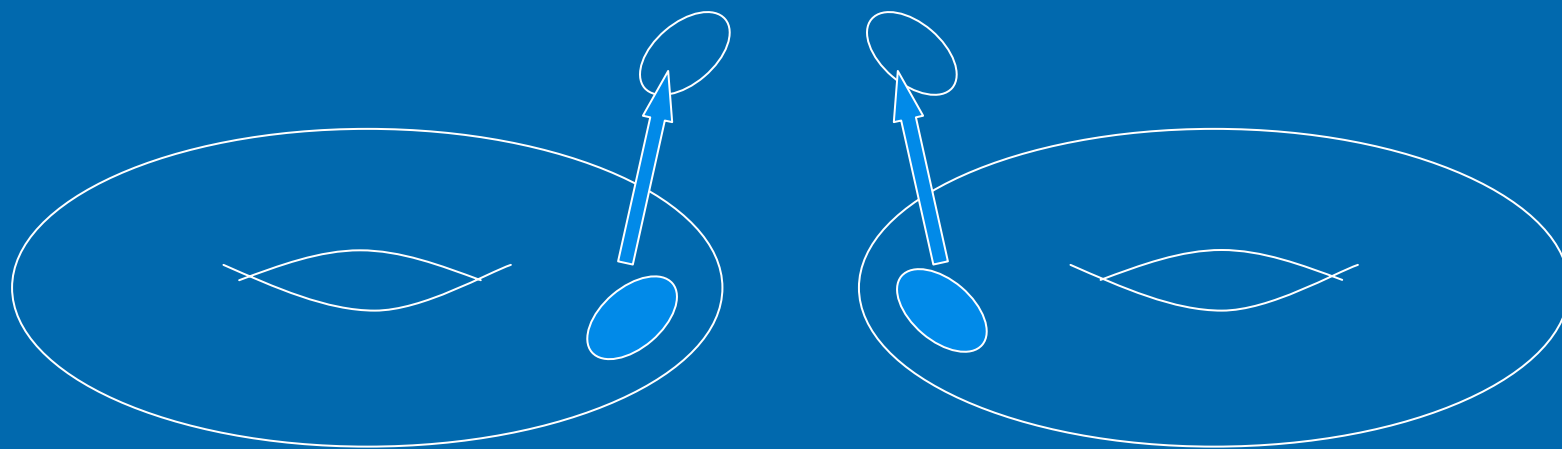
Un ss-gpe de F est le gpe fondamental d'un revêtement de X .

Le revêtement d'un graphe est un graphe.

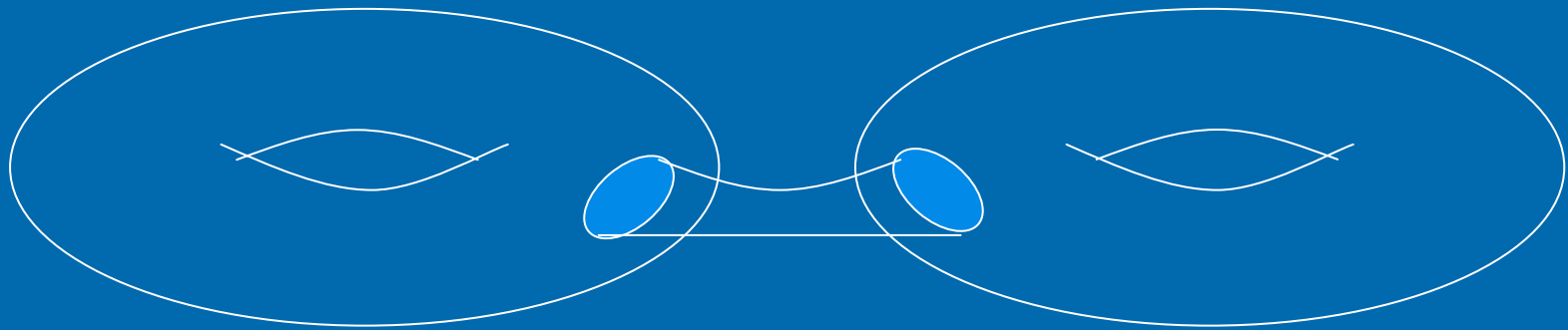
Somme connexe



Somme connexe



Somme connexe



$M_1 \# M_2$

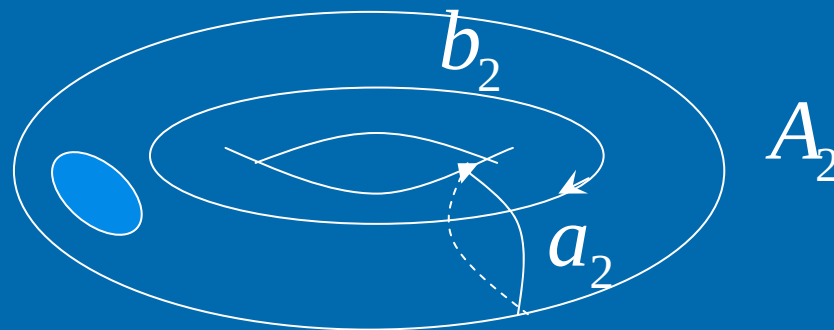
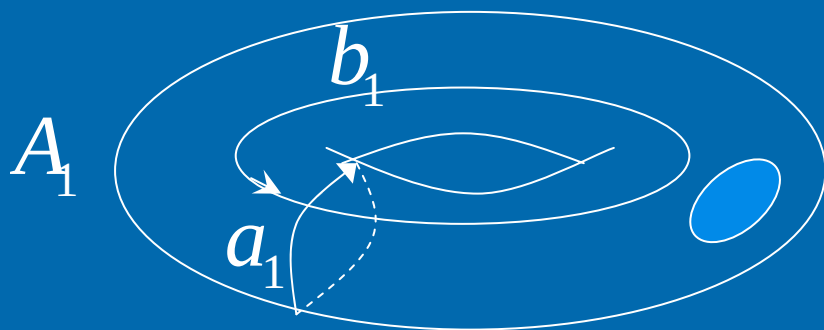


Surface de genre 2

Somme connexe

$$\pi_1(A_1) = \langle a_1, b_1 \mid \rangle$$

$$\pi_1(A_2) = \langle a_2, b_2 \mid \rangle$$



$M_1 \# M_2$

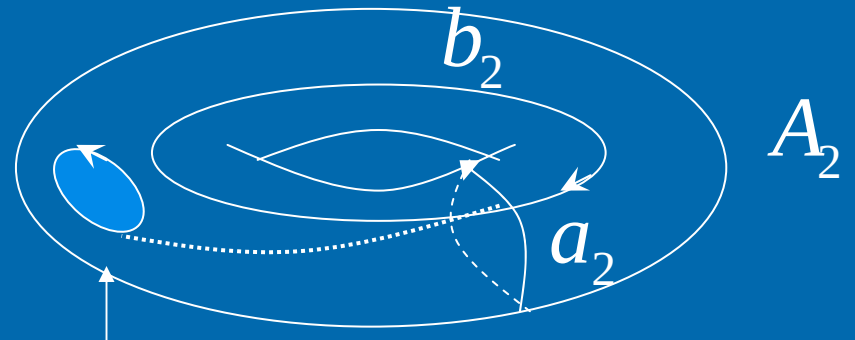
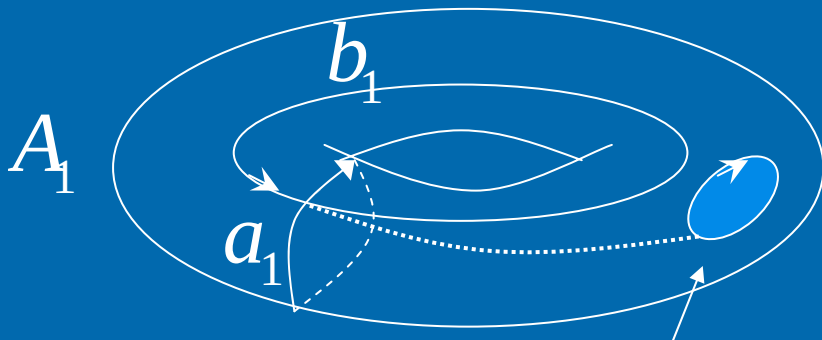


Surface de genre 2

Somme connexe

$$\pi_1(A_1) = \langle a_1, b_1 \mid \rangle$$

$$\pi_1(A_2) = \langle a_2, b_2 \mid \rangle$$



$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$$

$$a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$$

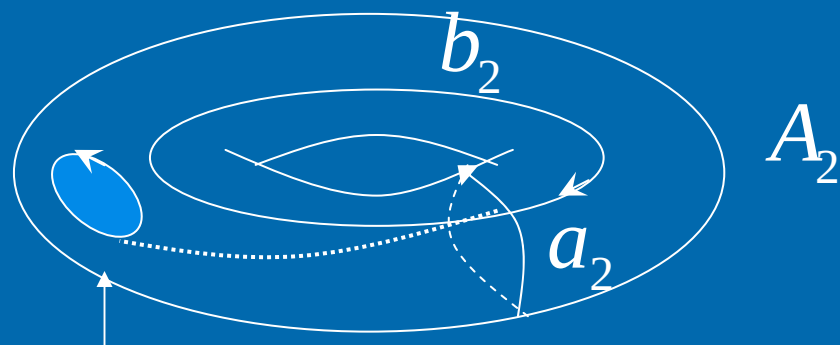
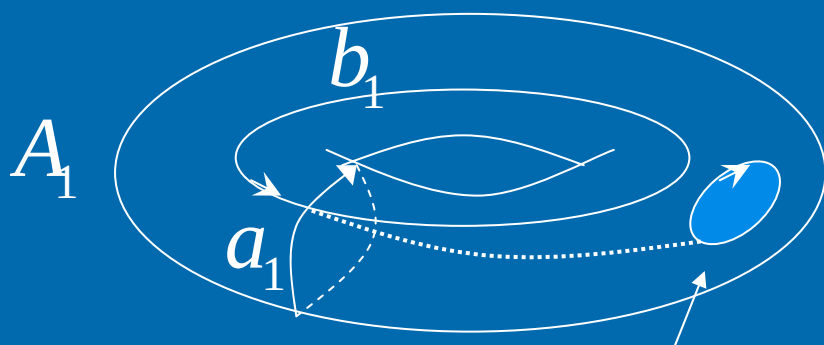
$$M_1 \# M_2$$



Somme connexe

$$\pi_1(A_1) = \langle a_1, b_1 \mid \rangle$$

$$\pi_1(A_2) = \langle a_2, b_2 \mid \rangle$$



$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$$

$$a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$$

$$M_1 \# M_2$$

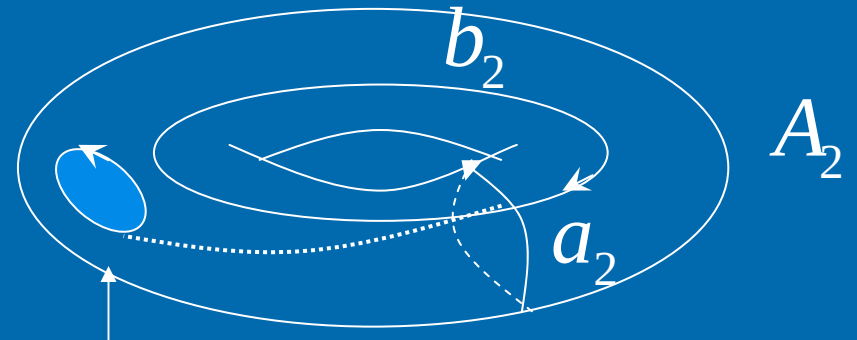
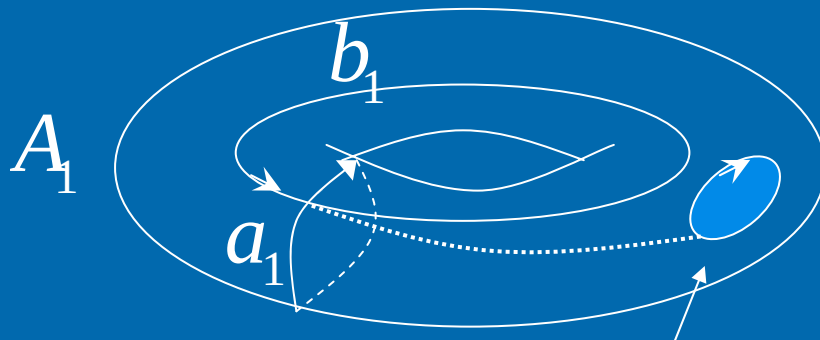


$$\pi_1(M_1 \# M_2) = \pi_1(A_1) *_{\mathbb{Z}} \pi_1(A_2)$$

Somme connexe

$$\pi_1(A_1) = \langle a_1, b_1 \mid \rangle$$

$$\pi_1(A_2) = \langle a_2, b_2 \mid \rangle$$



$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$$

$$a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$$

$$M_1 \# M_2$$



$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \rangle$$

Classification des surfaces

$$\chi > 0$$

$$\chi = 0$$

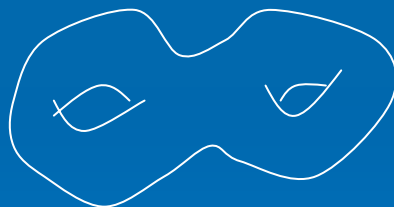
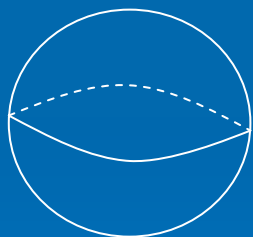
$$\chi < 0$$

$$S^2$$

$$T = S^1 \times S^1$$

$$T \# T$$

$$T \# T \# T$$



$$\pi_1 : \{1\}$$

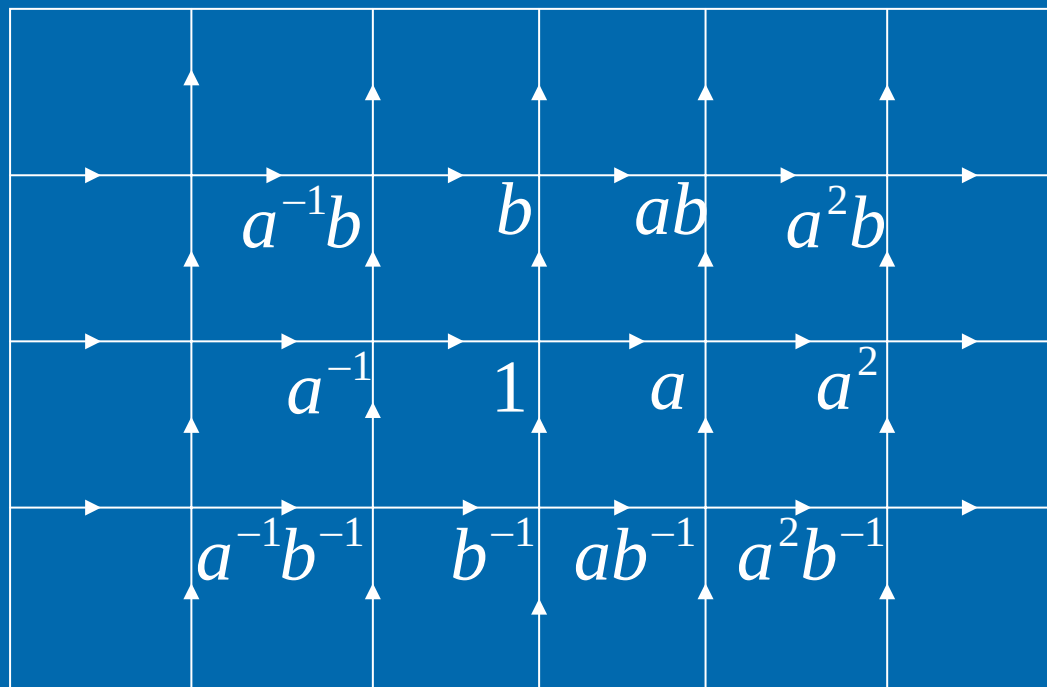
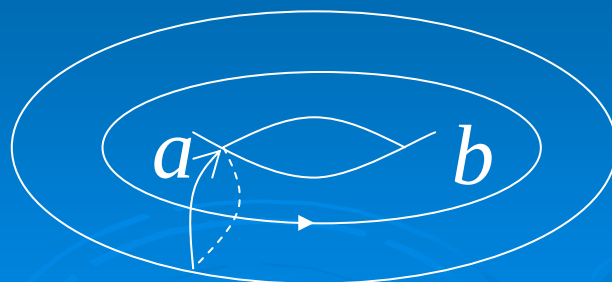
$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$F_2 *_{\mathbb{Z}} F_2$$

$$F_4 *_{\mathbb{Z}} F_2$$

- Le groupe fondamental se voit dans le revêtement universel $\widetilde{M}$ de la variété M :
- Fixer un point $x_0 \in \widetilde{M}$
- $G = \pi_1(M)$ agit de façon libre sur $\widetilde{M}$
- Construire un graphe plongé dans $\widetilde{M}$:
 - y est un sommet de label $g \in G$ si $y = g.x_0$
 - Arête=relèvement d'un lacet de M représentant un générateur de G , avec pour label ce générateur.

C'est le graphe de Cayley. Il peut aussi se définir combinatoirement.

$\mathbb{R}^2$

 $S^1 \times S^1$

 $\pi_1 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Théorème d'uniformisation de Riemann

$$\chi > 0$$

$$\chi = 0$$

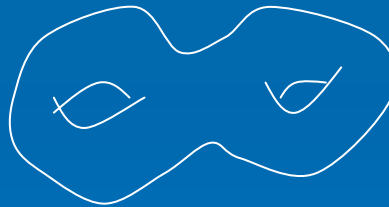
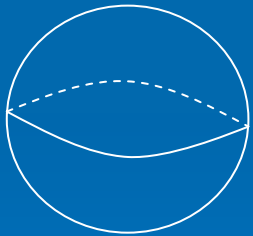
$$\chi < 0$$

$$S^2$$

$$T = S^1 \times S^1$$

$$T \# T$$

$$T \# T \# T$$



$$\pi_1 : \{1\}$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$F_2 *_{\mathbb{Z}} F_2$$

$$F_4 *_{\mathbb{Z}} F_2$$

Théorème d'uniformisation de Riemann

Courbure =1 Courbure =0

Courbure =-1

$$\chi > 0$$

$$\chi = 0$$

$$\chi < 0$$

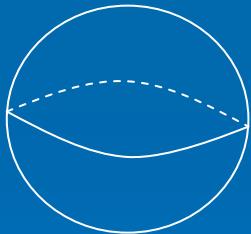


$$S^2$$

$$T = S^1 \times S^1$$

$$T \# T$$

$$T \# T \# T$$



$$\pi_1 : \{1\}$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$F_2 *_{\mathbb{Z}} F_2$$

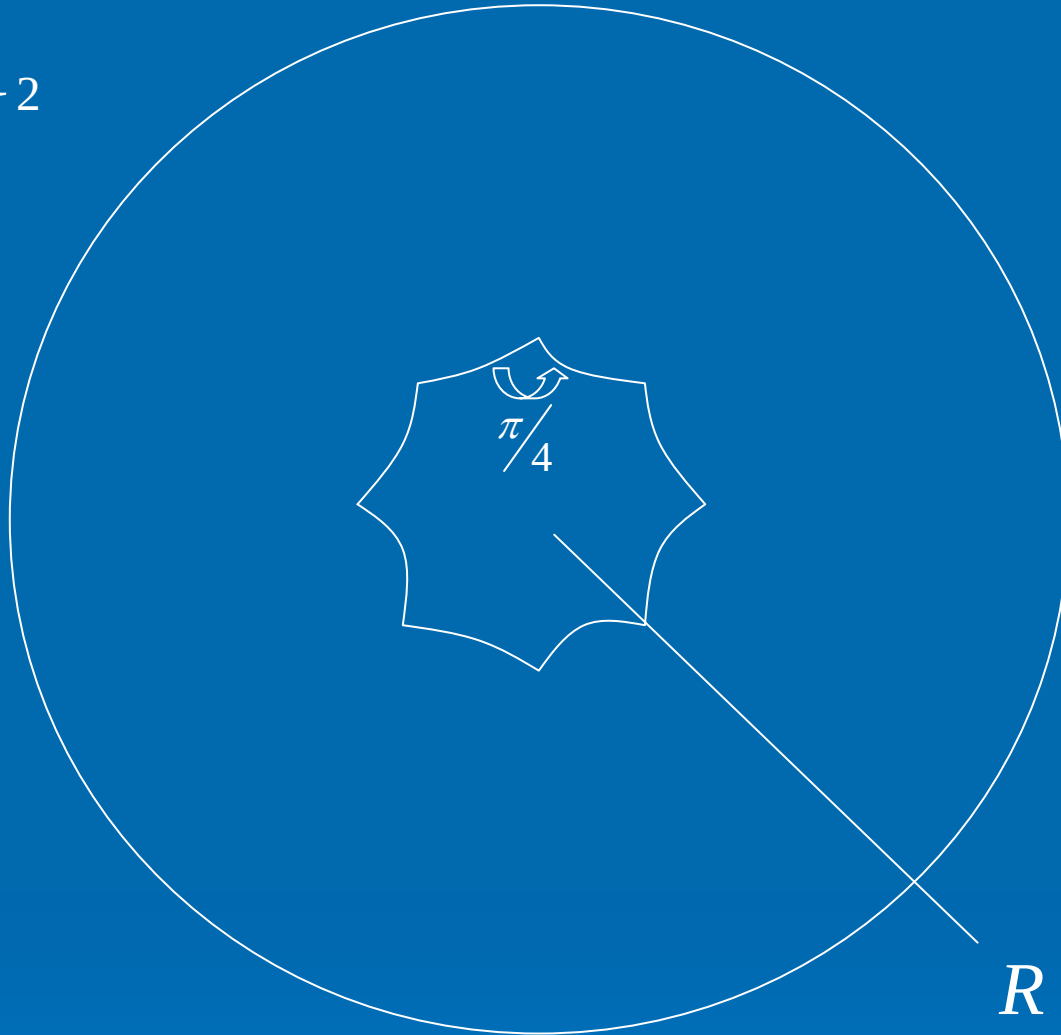
$$F_4 *_{\mathbb{Z}} F_2$$

Sphérique

Euclidien

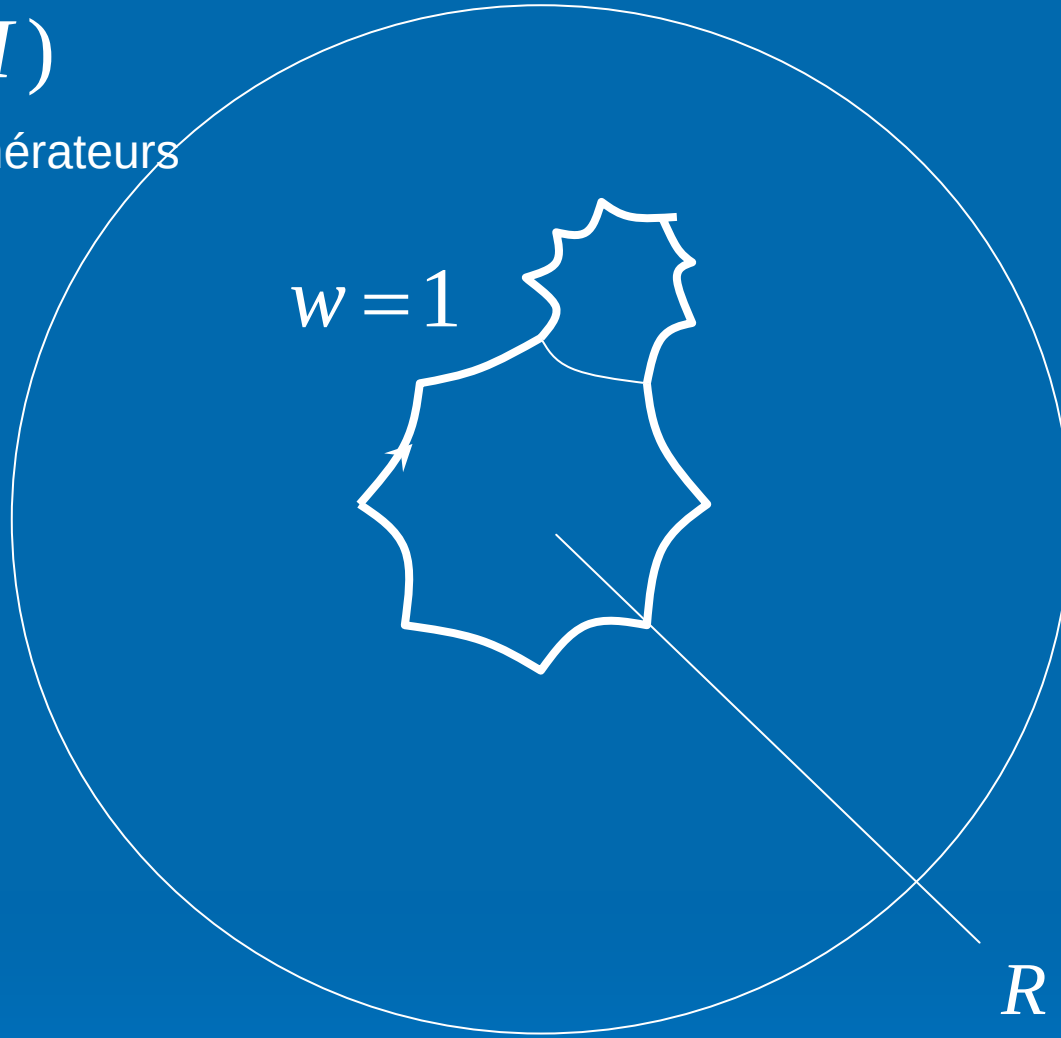
Hyperbolique

H^2

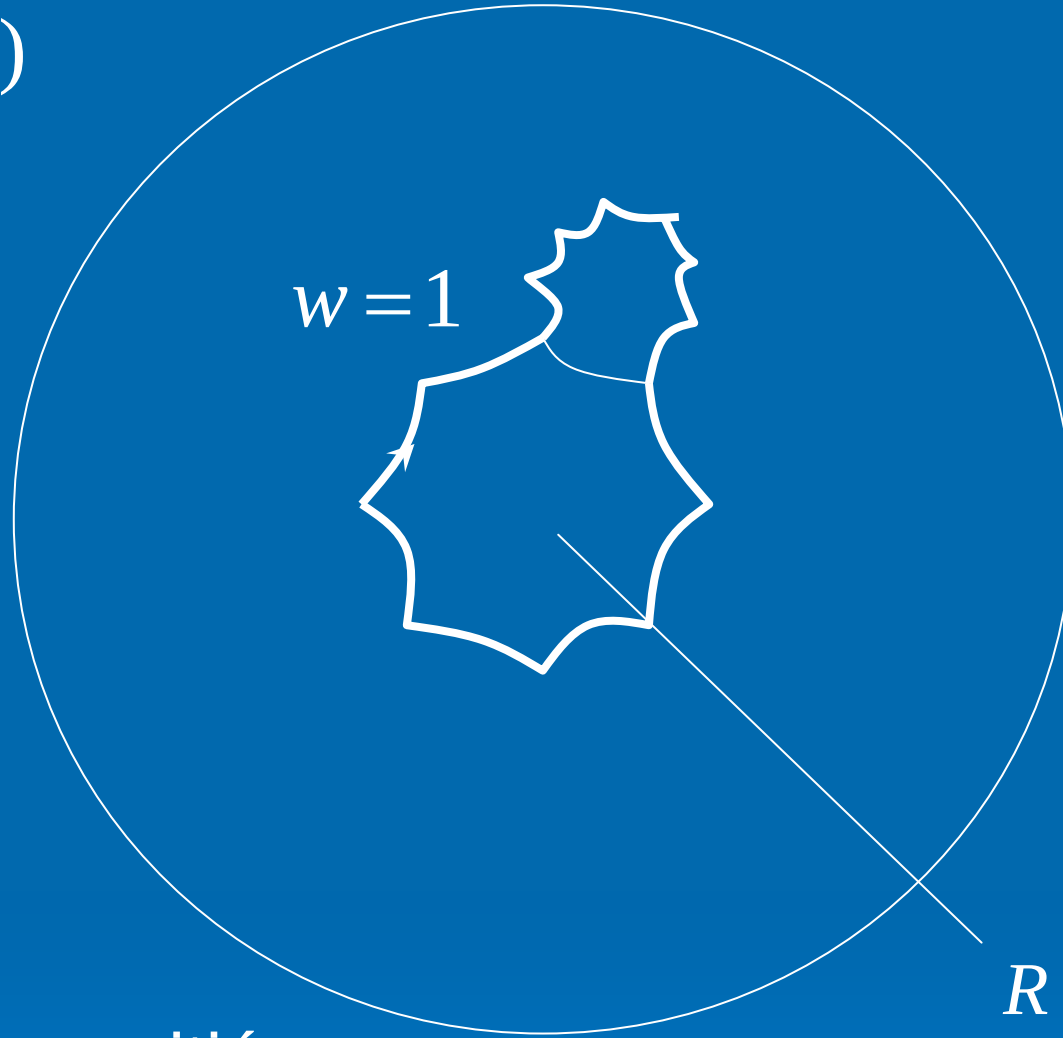


$$w \in \pi_1(M)$$

Mot sur les générateurs



$$w \in \pi_1(M)$$

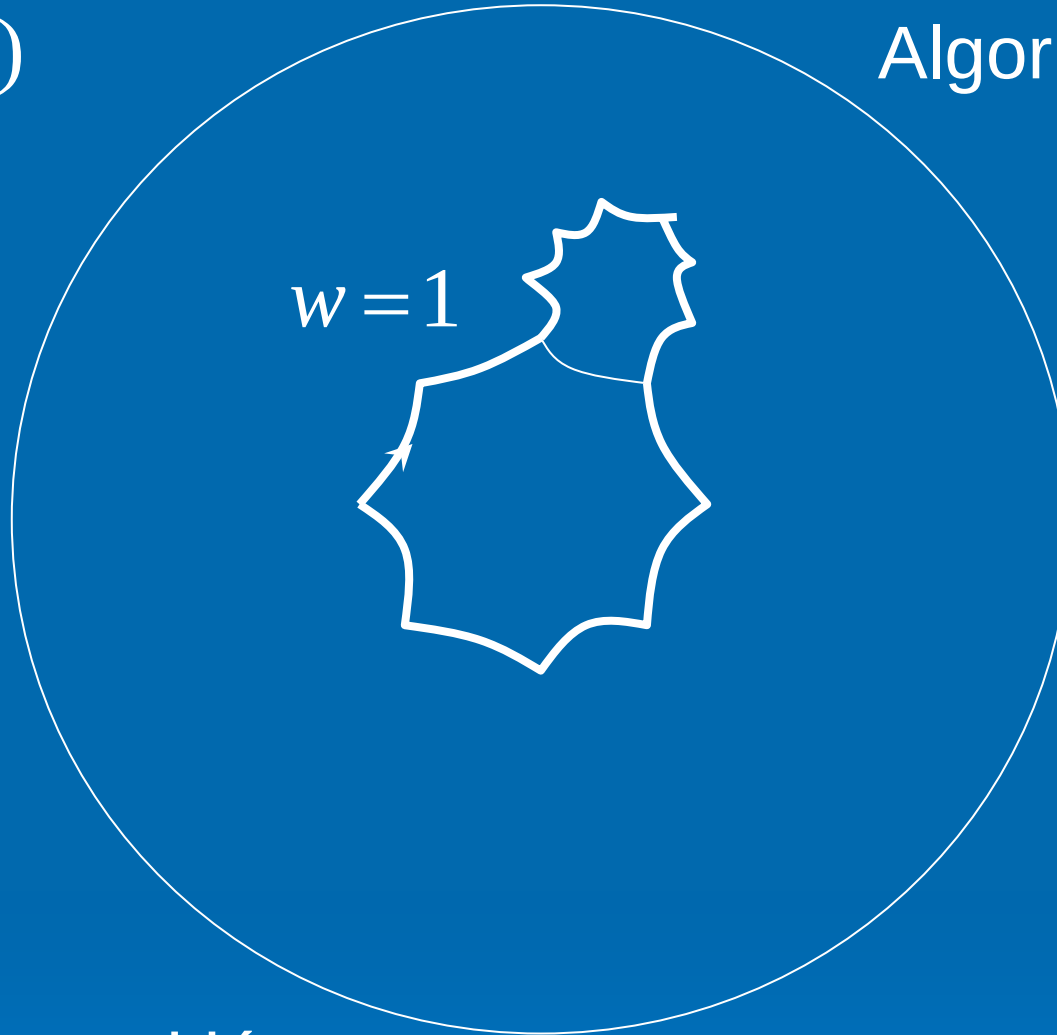


Plus de la moitié
du relateur R
doit apparaître
dans w



$$w \in \pi_1(M)$$

Algorithme de Dehn



Plus de la moitié
du relateur R
doit apparaître
dans w



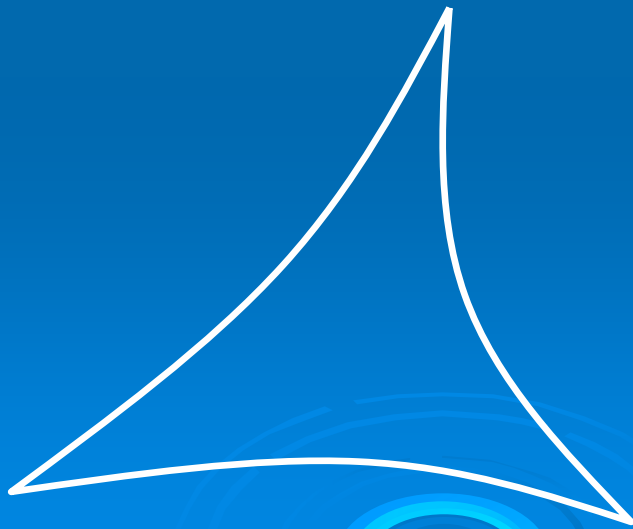
Procédure très
efficace pour
décider si un
mot est trivial

Métrique du mot

- On peut définir simplement une métrique dans un groupe de type fini :
 - Considérer son graphe de Cayley.
 - Assigner une longueur 1 à chaque arête.
 - $d(g_1, g_2)$ est la longueur du plus court chemin dans le graphe de Cayley du sommet g_1 jusqu'au sommet g_2 .

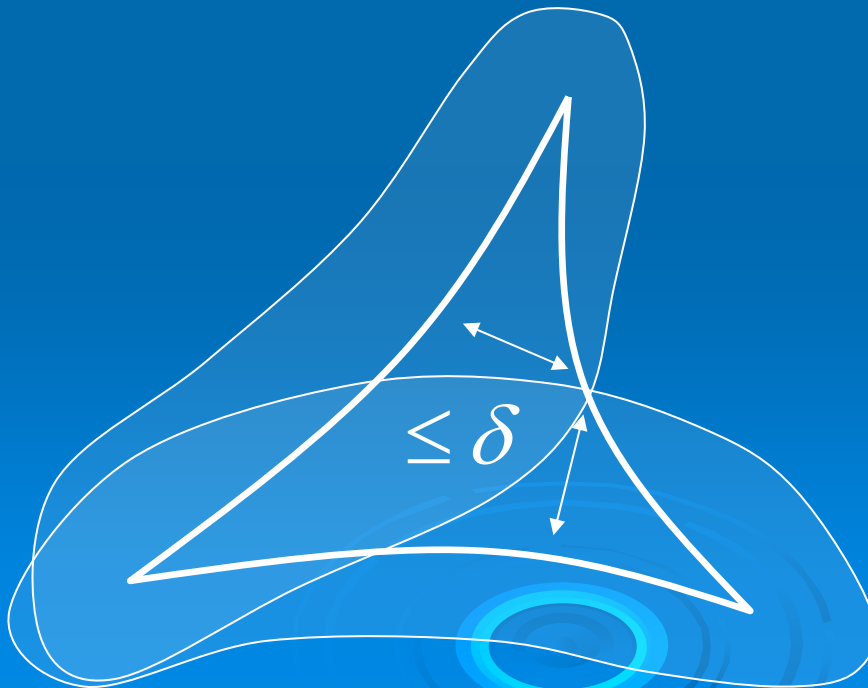
Triangles fins

- Dans un espace hyperbolique les triangles sont fins : il existe une constante $\delta \geq 0$ tel que dans tout triangle, chaque côté est dans un δ -voisinage des deux autres.



Triangles fins

- Dans un espace hyperbolique les triangles sont *fins* : il existe une constante $\delta \geq 0$ tel que dans tout triangle, chaque côté est dans un δ -voisinage des deux autres.



Groupes hyperboliques

- Un groupe de type fini est δ -hyperbolique si il existe une constante $\delta \geq 0$ tel que tout triangle géodésique dans le graphe de Cayley soit δ -fin.
- Un groupe est hyperbolique si il existe une constante δ tel qu'il soit δ -hyperbolique
- Etre hyperbolique ne dépend pas de la famille génératrice considérée.

- Tout groupe hyperbolique admet un algorithme de Dehn.
- Tout groupe admettant un algorithme de Dehn, est hyperbolique.
- Ces groupes se prêtent très bien aux résolutions algorithmiques. Ils sont bien compris et aisés à manipuler.

Exemples :

- Les groupes libres ne sont rien d'autre que les groupes 0-hyperboliques.
- Un groupes fini d'ordre c est c -hyperbolique
- Le π_1 d'une variété compacte riemannienne complète de courbure < 0 est hyperbolique.