Transformations de Möbius

JPh PRÉAUX 97

1 Inversions

. Soit E le plan euclidien. $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. On considère l'application :

$$\gamma_c : E \setminus \{A\} \longrightarrow E \setminus \{A\}$$
$$M \longmapsto M' \quad \text{avec } M' \in [A;M) \text{ et } AM.AM' = r^2$$

C'est une application involutive de $E \setminus \{A\}$ dont l'ensemble des points fixes est $\mathcal{C}$.

. Expression analytique de γ_c dans un repère d'origine A.

$$\gamma_c : \mathbb{R}^{2*} \longrightarrow \mathbb{R}^{2*}$$
$$(x;y) \longrightarrow \left(r^2 \frac{x}{x^2+y^2} ; r^2 \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$
$$: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$z \longrightarrow r^2 \frac{z}{|z|^2} = \frac{r^2}{\bar{z}}$$

C'est une application différentiable, qui se prolonge sur $\bar{E} = E \cup \{\infty\}$ par $\gamma_c(A) = \infty$; $\gamma_c(\infty) = A$

Proposition	: γ_c transforme les cercles-droites en cercles-droites.

dem : $M(x;y)$ est sur un cercle droite

ssi $A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$

ssi $A + B.\frac{x}{x^2+y^2} + C.\frac{y}{x^2+y^2} + D.\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \times \frac{1}{x^2+y^2}$

ssi $M'\left(\frac{x}{x^2+y^2} ; \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ vérifie :

$$A + B.X + C.Y + D(X^2+Y^2) = 0$$

de plus : – 1 droite passant par O est envoyée sur elle-même

– Un cercle passant par O est envoyé sur une droite

– Un cercle centré en O est envoyé sur un cercle centré en O

– 1 droite ne passant pas par O est envoyé sur 1 cercle passant par O

– 1 cercle ne passant pas par O est envoyé sur 1 cercle ne passant pas par O.

Proposition : Une inversion, est une application conforme, qui renverse l'orientation

dém : Il suffit de montrer $\gamma : E \setminus \{0\} \longrightarrow E$

à montrer : $J_\gamma(x;y) = k(x;y) \cdot O_{(x;y)}$ $\quad \forall (x;y) \neq (0;0)$.

et $\det(J_\gamma(x;y)) < 0$

où $J_\gamma(x;y)$ est la matrice jacobienne de γ en $(x;y)$, $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ et $O_{(x;y)}$ est une matrice orthogonale

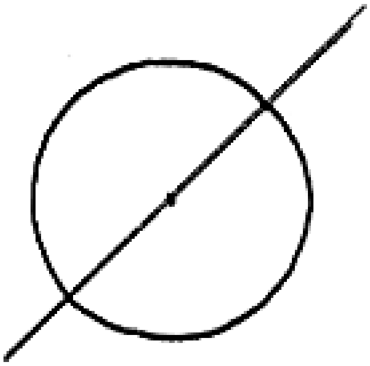
$f_x(x;y) = r^2 \dfrac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad f_y(x;y) = r^2 \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

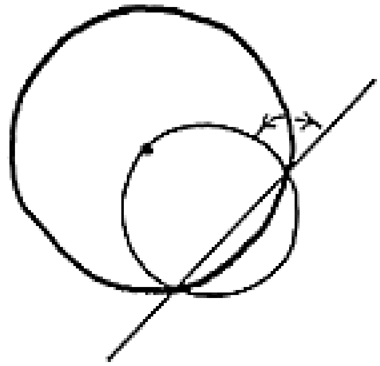
$$J_\gamma(x;y) = \begin{pmatrix} r^2 \dfrac{y^2-x^2}{Q} & -\dfrac{2xy}{Q} \cdot r^2 \\ -\dfrac{2xy}{Q} \cdot r^2 & r^2 \dfrac{x^2-y^2}{Q} \end{pmatrix} = \frac{r^2}{Q} \cdot \begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

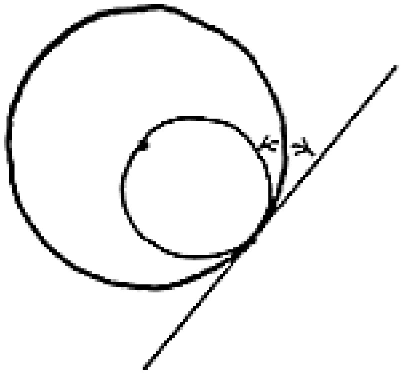
$$\Rightarrow \det(J_\gamma(x;y)) = -\frac{r^4}{(x^2+y^2)^2} < 0 \qquad (Q = (x^2+y^2)^2)$$

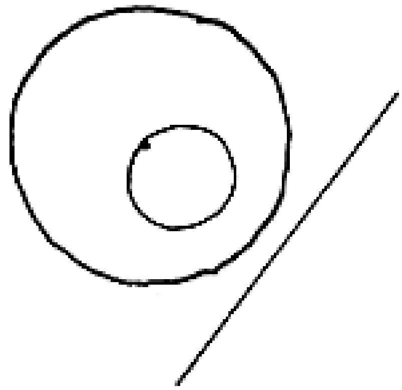
et $\dfrac{1}{\det(J_\gamma(x;y))} \cdot J_\gamma(x;y) \in O_2^-$ $\quad \left(= \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} , a^2+b^2=1 \right)$

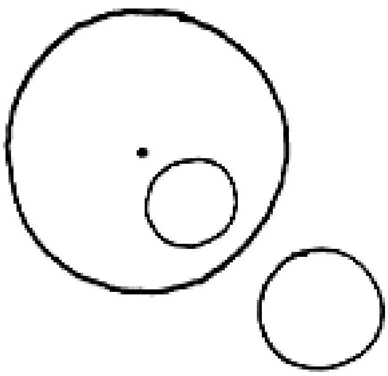
cqfd ■

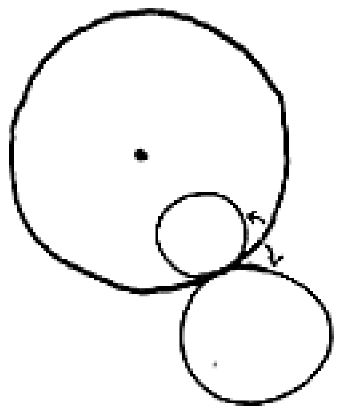


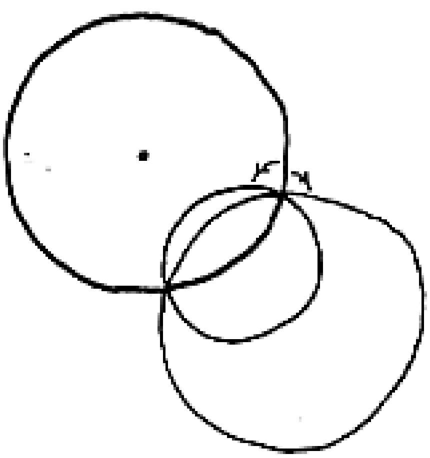


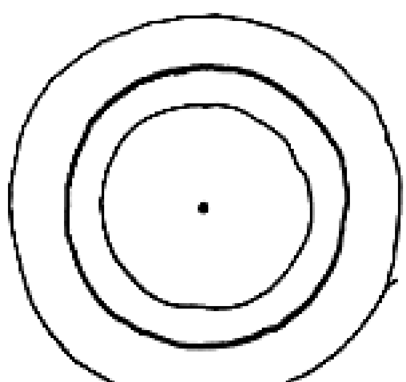












Le groupe de Möbius.

$\boxed{0}$. $a; b; c; d \in \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

f se prolonge par continuité en $\bar{f} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
par $\bar{f}(-\frac{d}{c}) = \infty$; $\bar{f}(\infty) = \frac{a}{c}$ —

- On considère $\mathcal{H} = \left\{ f : z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \right.$; $ad - bc \neq 0$; $a; b; c; d \in \mathbb{C}$

muni de la loi de composition, $\mathcal{H}$ a une structure de groupe

. loi interne : $z \xrightarrow{f} \frac{az+b}{cz+d}$

$$Z \xrightarrow{g} \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$$

$$g \circ f(z) = \frac{\frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{cz+d}}{\frac{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)}{cz+d}} = \frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)}$$

$$= \frac{(\alpha a + \beta c) z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c) z + \gamma b + \delta d}$$

$$\in \mathcal{H}$$ —

. élt neutre : $z \longrightarrow z$

. Inverse : $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ $\iff (cz+d)Z - (az+b) = 0$

$\iff z(cZ - a) + dZ - b = 0$

$\iff z = \frac{-dZ+b}{cZ-a}$ "$\in \mathcal{H}$" —

. et bien sûr associative.

On a bien sûr naturellement un morphisme de groupe

$\varphi : GL_2\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{H}$, par $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = $ "$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$"

Montrons que $\mathcal{H} \simeq PSL_2\mathbb{C}$

Si l'on considère $f : z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$

et $g : z \longrightarrow \frac{\alpha z + b}{cz+d}$ pour quels paramètres a-t-on

$f = g$?

$$f = g \iff \forall z \quad f(z) = g(z)$$

$$\iff \forall z \quad (az+b)(\gamma z+\delta) = (\alpha z+\beta)(cz+d)$$

$$\iff \forall z \quad a\gamma z^2 + (a\delta + b\gamma) z + b\delta$$
$$= \alpha c z^2 + (\alpha d + \beta c) z + \beta d$$

$$\iff \begin{cases} a\gamma - \alpha c = 0 & (1) \iff \frac{a}{c} = \frac{\alpha}{\gamma} \\ b\delta - \beta d = 0 & (2) \iff \frac{b}{d} = \frac{\beta}{\delta} \\ a\delta + b\gamma = \alpha d + \beta c & (3) \end{cases}$$

soit $\begin{array}{l} a = kc \\ \alpha = k\gamma \end{array}$ et $\begin{array}{l} b = l \cdot d \\ \beta = l \cdot \delta \end{array}$ pour k et l de $\mathbb{C}$

$(3) \iff k.c\delta + l d\gamma = k\gamma d + l\delta c$

$(k-l) c\delta - (k-l) d\gamma = 0$

$(k-l)(c\delta - d\gamma) = 0$

soit $k = l$ impossible, car alors $ad - bc = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$

soit $c\delta - d\gamma = 0$

$\iff \frac{c}{d} = \frac{\gamma}{\delta} \implies \frac{a}{d} = \frac{\alpha}{\delta} \quad \left(\text{et } \frac{b}{d} = \frac{\beta}{\delta}\right)$

Soit $g = A . f$ pour un $A \in \mathbb{C}^*$

Et donc le morphisme : $\varphi : \begin{array}{ccc} GL_2\mathbb{C} & \longmapsto & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longrightarrow & \text{"}\frac{az+b}{cz+d}\text{"} \end{array}$ passe au quotient par $\tilde{\mathbb{C}}^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} a \in \mathbb{C}^* \right\} \subset GL_2\mathbb{C}$, pour donner un isomorphisme : (i.e $\ker \varphi = \tilde{\mathbb{C}}^*$)

$$(LF(2;\mathbb{C}) \overset{N}{=}) \ \mathcal{H} \cong GL_2\mathbb{C}/\tilde{\mathbb{C}}^* \cong \frac{SL_2\mathbb{C}}{\pm \mathbb{1}d} \cong PSL(2,\mathbb{C})$$

$\blacksquare$

$\boxed{1}$

- On appelle <u>groupe de Möbius</u>, le groupe des transf$^{\text{ons}}$ de $E^* = E \cup \{\infty\}$ engendré par les inversions et les symétries. On le note $\mathcal{M}$.
- On note $\mathcal{M}^+$, le sous-groupe de $\mathcal{M}$ des éléments qui préservent l'orientation.

- On note $\sigma : z \longrightarrow \bar{z}$. $\langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \subset \mathcal{M}$

<u>Proposition</u> : $\mathcal{M}^+ = \mathcal{H} \simeq PSL(2;\mathbb{C})$

de plus $\mathcal{M} = \langle \sigma \rangle \ltimes \mathcal{H} \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes PSL(2;\mathbb{C})$

<u>Démo</u> : $\mathcal{M}$ est engendré par les inversions et les symétries, qui sont orientation-reversing.

Donc $\mathcal{M}^+$ contient les translations, les rotations, et les homothéties (composées de 2 inversions concentriques)

en particulier : . rotations de centre O : $z \longrightarrow e^{i\theta} . z$

. homothéties " : $z \longrightarrow k.z \quad k \in \mathbb{R}$

. translations : $z \longrightarrow z + c$

- Montrons que $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}^+$

soit $f : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc = 1$

$z \longmapsto cz + d \quad \in \mathcal{M}^+$ (homothétie $\circ$ rotation $\circ$ translation)

$z \longmapsto \dfrac{1}{cz+d} \quad \in \mathcal{M}^+$ ($z \to \dfrac{1}{z}$ composé de $z \to \dfrac{1}{\bar{z}}$ et $z \to \bar{z}$)

$z \longmapsto \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{-1}{cz+d}\right) + \dfrac{a}{c} = \dfrac{c.az + ad - 1}{c(cz+d)} = \dfrac{caz + cb}{c(cz+d)}$

$= \dfrac{az+b}{cz+d} \qquad \in \mathcal{M}^+$

et donc $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{M}^+$ ▬

- Montrons que $\mathcal{M}^+ \subset \mathcal{H}$

il est suffisant de montrer que $\mathcal{M} \subset \langle \sigma ; \mathcal{H} \rangle$

Les élts de $\mathcal{M}$ sont engendrés par les symétries et les inversions, il suffit donc de montrer que les symétries et les inversions sont dans $\langle \sigma ; \mathcal{H} \rangle$

- Cas d'une symétrie : soit une symétrie par une droite l, on peut la décomposer comme suit :

(ds $\mathcal{H}$) – une translation, suivi d'une rotation ramène l sur l'axe réel

ds $\langle\sigma\rangle$ – on effectue la symétrie $z \to \bar{z}$

– on ramène alors sur l.

(conjugaison par top de $z \to \bar{z}$) ▬

- Cas d'une inversion ds un cercle c

– on ramène le centre sur 0 (translat°)

– on change le rayon en 1 par une homothétie.

– inversion $z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}}$

– on ramène sur c ▬

cqfd ▬

Proposition : Soit $(\alpha;\beta;\gamma) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$
et $(\partial;\eta;\varepsilon) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$
Alors il existe un unique élément de $\mathcal{M}^+$ qui envoie $(\alpha;\beta;\gamma) \longrightarrow (\partial;\eta;\varepsilon)$

Démo : Il suffit de montrer que donné $(\alpha;\beta;\gamma)$, il existe un unique él^t de $\mathcal{M}^+$ qui l'envoie sur $(\infty;0;1)$

Considérer $\phi : z \longrightarrow \dfrac{az+b}{cz+d}$

avec $a = \dfrac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}$ alors $\phi(\alpha) = \infty$

$b = \dfrac{\alpha-\gamma}{1-\gamma/\beta}$ $\phi(\beta) = 0$

$c = -1$ $\phi(\gamma) = 1$

$d = \alpha$

unique : et dans la preuve il apparaît que c'est unique !
(résolut$^\circ$ de système.)

[illegible] $\phi(\alpha) = \infty$

$\phi(\beta) = \left[\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}\right)\beta + \dfrac{\alpha-\gamma}{1-\gamma/\beta}\right] \times \dfrac{1}{\beta-\alpha}$

$= \left[\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}\right)\beta + \dfrac{\beta(\alpha-\gamma)}{\beta-\gamma}\right] \times \dfrac{1}{\alpha-\beta} = 0$

$\phi(\gamma) = \left[\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}\right)\gamma + \dfrac{\alpha-\gamma}{1-\gamma/\beta}\right] \times \dfrac{1}{\alpha-\gamma}$

$= \dfrac{\gamma}{\gamma-\beta} + \dfrac{\beta}{\beta-\gamma} = \dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\beta} = 1$

Rmque : Donnés 3 p^{ts} distincts il existe un unique cercle-droite passant par ces points. $\Rightarrow$ $\mathcal{M}^+$ agit librement et transitivement sur l'ensemble des cercles-droites.

Corollaire :

- Un élét de $\mathcal{M}^+$ qui fixe 3 pts est l'identité
- Un élét de $\mathcal{M}$ qui fixe 3 pts est soit l'identité soit l'inversion-symétrie dans le cercle-droite passant par ces 3 pts. —

Démo : La première assertion est claire.

Soit un élt α de $\mathcal{M}$ qui fixe 3 pts $(\alpha;\beta;\gamma)$, et ne préserve pas l'orientation ;

Soit c le cercle-droite (unique) passant par $(\alpha;\beta;\gamma)$

et γ l'inversion-symétrie dans c.

alors $\gamma.\alpha$ préserve l'orientation et fixe $(\alpha;\beta;\gamma)$

$\Rightarrow \gamma.\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \gamma^{-1} = \gamma$

α est l'inversion dans c —

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$

et $H \triangleq \{ h \in \mathcal{M}^+ \mid h(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}} \}$; l'ensemble des transf^{os} de Möbius, o.p., qui fixent la droite réelle.

$\boxed{\text{Prop}^{\circ}}$: $\boxed{H = \left\{ z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \; ; \; \begin{array}{l} a;b;c;d \in \mathbb{R} \\ ad-bc \neq 0 \end{array} \right\} \approx GL(2;\mathbb{R})/_{\widetilde{\mathbb{R}^*}} \approx \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} a;b;c;d \in \\ |ad-bc| = 1 \end{array} \right\}}$

démo : .? $GL(2;\mathbb{R})/_{\widetilde{\mathbb{R}^*}} \subset H$

Donné $\varphi : z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad ad-bc \neq 0$, $\varphi \in \mathcal{M}^+$

et avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\varphi(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \varphi \in H$

.? $H \subset GL(2;\mathbb{R})/_{\widetilde{\mathbb{R}^*}}$

donnés $(\alpha;\beta;\gamma) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$

$(\delta;\eta;\varepsilon) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$

Il existe une transformation de $GL(2;\mathbb{R})/_{\widetilde{\mathbb{R}^*}}$ qui envoie $(\alpha;\beta;\gamma)$ sur $(\delta;\eta;\varepsilon)$. Il suffit de trouver $f \in GL(2;\mathbb{R})/_{\widetilde{\mathbb{R}^*}}$ tq

$\varphi : (\alpha;\beta;\gamma) \longrightarrow (\infty;0;1)$ ($\forall \alpha;\beta;\gamma$ de $\overline{\mathbb{R}}$, distincts)

φ_1 envoie α sur l'∞ : $\quad z \xmapsto{\varphi_1} \frac{z}{z-\alpha}$

$\varphi_2 \circ \varphi_1$ ~~envoie~~ envoie $\begin{array}{l} \alpha \longrightarrow \infty \\ \beta \longrightarrow 0 \end{array}$: $\quad z \xmapsto{\varphi_2} z - \frac{\beta}{\beta-\alpha}$

$\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ envoie $\begin{array}{l} \alpha \longrightarrow \infty \\ \beta \longrightarrow 0 \\ \gamma \longrightarrow 1 \end{array}$ $\quad z \longmapsto z \times \frac{1}{\frac{\gamma}{\gamma-\alpha} - \frac{\beta}{\beta-\alpha}}$

et $\varphi_1 ; \varphi_2 ; \varphi_3 ; \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \in GL(2;\mathbb{R})/_{\widetilde{\mathbb{R}^*}}$

$f = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$

$\Longrightarrow$ Donné un élément $h \in H$ qui envoie $(\alpha;\beta;\gamma)$ sur $(\delta;\eta;\varepsilon)$, par unicité $h \in GL(2;\mathbb{R})/_{\mathbb{R}^*}$ $\quad$ cqfd

On note $\mathbb{H}^2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \}$

$\mathcal{H}^+$ le <u>groupe hyperbolique o.p.</u> ; $\mathcal{H}^+ = \{ h \in \mathcal{M}^+ \mid h(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2 \}$

$\mathcal{H}$ le <u>groupe hyperbolique</u> ; $\mathcal{H} = \{ h \in \mathcal{M} \mid h(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2 \}$

<u>Proposition</u> : $\boxed{\mathcal{H}^+ = PSL(2;\mathbb{R})}$

demo : Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tq $f(z) = \mathrm{Im}(h(z))$ où $h \in \mathcal{H}$. C'est une application continue $\Rightarrow$ T.V.I $\mathbb{H}^2$ est envoyé sur lui même ou sur $-\mathbb{H}^2$.

Il suffit donc de vérifier pour $z = i$.

$$h(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(ai+b)(d-ci)}{c^2+d^2} = \frac{1}{c^2+d^2} \cdot \left[ac+bd+i(ad-bc) \right]$$

$\mathrm{Im}(h(i))$ a même signe que $ad-bc$

i.e : $\mathcal{H} = \langle \sigma \rangle \ltimes \mathcal{H}^+ \simeq \mathbb{Z}_2 \ltimes PSL(2;\mathbb{R})$

$\mathcal{H}^+ = PSL(2;\mathbb{R})$ —

<u>Proposition</u> : $\boxed{\mathcal{H} = \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathcal{H}^+ = \mathbb{Z}_2 \ltimes PSL(2;\mathbb{R})}$

demo : soit $h \in \mathcal{H}$. Si h est orient°. pres. alors $h \in \mathcal{H}^+$

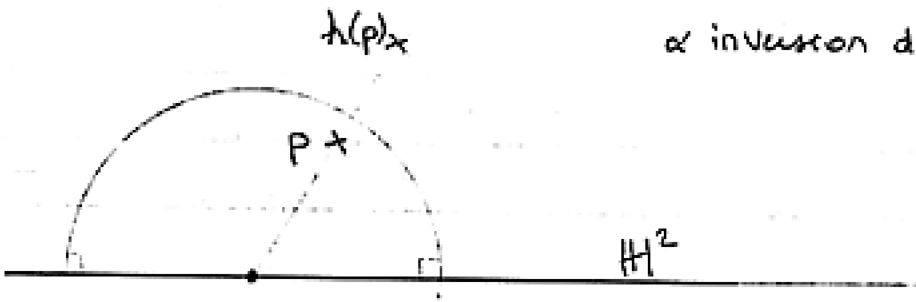
Sinon on compose par une inversion ds un cercle de centre sur $\overline{\mathbb{R}}$, ou une symétrie par une droite $\perp^{\text{ale}}$ à $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ γh est o.p $\Rightarrow$ $\gamma . h \in \mathcal{H}^+$

en particulier $\mathbb{Z}_2$ peut-être engendré par n'importe laquelle de ces transformations —

- On appelle <u>droite hyperbolique</u> l'intersection d'un cercle $\perp^{al}$ à $\mathbb{R}$ ou d'une droite verticale avec ~~le~~ $\mathbb{H}^2$.
- On appelle <u>symétrie hyperbolique</u> (ou réflexion h.), une inversion – reflexion par une droite hyperbolique. Ce sont des él^{ts} du groupe hyperbolique.

<u>Thme</u>: les reflexions hyperboliques engendrent le groupe hyperbo
De plus tout élément se décompose en au plus 3 reflex°

<u>démo</u>: Soit h élément du groupe hyperbolique, et $P \in \mathbb{H}^2$
Soit h fixe P, soit on compose h par α réflexion qui envoie $h(P)$ sur P. $h' = \alpha \circ h$. h' fixe P



α inversion dans ce cercle.

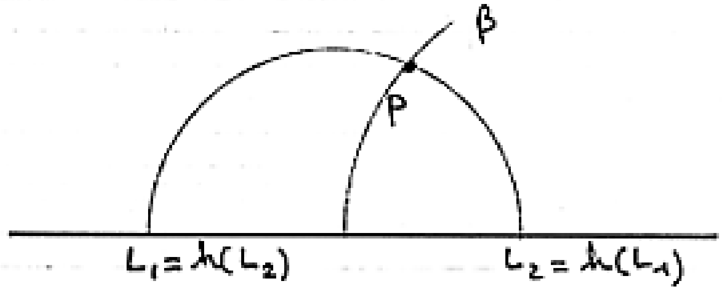
On peut donc considérer h qui fixe P. Soit l une droite hyperbolique passant par P. Soit h fixe globalement l soit ce n'est pas le cas.

<u>lemme</u>: Soit P un point de $\mathbb{H}^2$, et A, A' des points de $\overline{\mathbb{R}}$
$\exists (!)$ réflexion hyperbolique qui fixe P et envoie A sur A'.

<u>dém</u>: on peut aisément vérifier que lorsque l'on effectue toutes les réflexions h. dans toutes les droites passant par P, A décrit $\overline{\mathbb{R}}$ (injectivement)

Si h fixe globalement l, alors les points finaux L_1 et L_2 sont soit fixes soit interchangés.

S'ils sont interchangés, on compose par la réflex° fixant P les interchangeant.



γ_β : $P \longrightarrow P$
$L_1 \longrightarrow L_2$
$L_2 \longrightarrow L_1$

- Si h ne fixe pas L, alors $\{L_1 ; L_2\} \cap \{h(L_1) ; h(L_2)\} = \emptyset$
(car par 2 pts il ne passe qu'une seule droite h.)
On compose h par l'inversion envoyant P sur P, et $h(L_1)$ sur L_1. Alors $h' = \gamma \circ h$ fixe ~~globale~~ aussi L_2
(m̂ raison)

. On est arrivé à h qui fixe 3 pts de L
Alors h est soit l'identité, soit l'inversion par L
Si c'est le cas on compose par cette inversion pour finalement obtenir l'identité

cqfd ∎