

Le problème de conjugaison dans
le groupe d'une 3-variété ov.; géom.

J. Ph. Préaux

déc. 2002

Problèmes de Dehn (1911)

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \mid R_1, \dots, R_m \rangle$$

(WP) Problème du mot: Existe-t-il un algorithme permettant de décider pour tout couple de mots u, v sur S , si $u = v$ ds G ?

(CP) Problème de conjugaison: // // // //

// // // // si $u \sim v$ ds G ?
i.e. si $\exists h \in G$ tq $u = h.v.h^{-1}$ ("u est conjugué à v par h").

Vocabulaire: - Un tel algorithme est appelé une "solution" du problème.
- Le problème est résoluble si il existe une solution.
" " insoluble sinon.

Fait: L'existence d'une solution ne dépend pas de la prés. finie de G .

Thm: (Novikov '56): $\exists$ un gpe f.p. ayant un WP insoluble.

Corollaire: $\exists$ un gpe f.p. ayant un CP (et WP) insoluble.

Thm (Miller): $\exists$ un gpe f.p. ayant un WP résoluble et un CP insoluble.

Perspectives: - Etablir des solutions pour les classes les plus larges possibles de groupes -

Classes algébriques

	WP	CP
gpes fins, libres, (abeliens) nilpotents.	✓	✓
gpes résiduellement fins, résid ^t nilpotents	✓	X
Sous-gpes f.p. de $GL(n; \mathbb{Z})$	✓	?

✓ : problème résoluble. X : pbme insoluble pour un tel gpe.

Stabilité par construction élémentaire

Produit direct $A \times B$	✓	✓
Produit libre $A * B$	✓	✓
Produit amalgamé $A *_C B$	X	X
Extension HNN $A *_{\alpha}$	(✓ si conditions sur C)	
Extension fini Sous-gpe d'indice fini	✓	X

✓ : résoluble si résoluble dans A et B . X insoluble en général.

Classes provenant de géométrie des groupes.

gpes à petite simplification (Dehn...) ⇒ gpes de surface.	✓	✓
gpes hyperboliques (Gromov) ⇒ plupart des précédents gpes de var. fermées de courbure < 0 .	✓	✓
gpes biautomatiques (Epstein, Thurston) ⇒ les précédents gpes de var. de courbure ≤ 0	✓	✓
gpes automatiques (Eps.; Thu.) ⇒ précédents + bcp de gpes de 3-var.	✓	?

Conjecture de géométrisation de Thurston -

Décomposition topologique d'une 3-variété orientable M .

Décomposer M le long de : - S^2 essentiels (Kneser-Milnor)

- D^2 essentiels

- $S^1 \times S^1$ essentiels (JSJ)

Jusqu'à l'obtention de pièces 2-irréductibles, qui sont soit :

- des fibrés de Seifert

- atoroidales

Hypothèse de géométrisation de Thurston (HGT)

Les pièces obtenues dans la décomposition topologique de M , admettent une métrique Riemannienne complète, localement homogène -

(Thurston) $\rightarrow$ Elles sont modélisées sur les géométries :

- $\mathbb{E}^3$, S^3 , H^3 , $H^2 \times \mathbb{R}$, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{SL_2 \mathbb{R}}$, Nil, Sol -

Conjecture (Thurston) : Toute 3-variété vérifie HGT.

(Prouvée dans de nombreux cas ...)

Remarques : - La conjecture de Thurston entraîne la conj. de Poincaré

- Elle permet une classification des 3-variétés.

Réduction du problème de conjugaison.

1) M une 3-variété, $\partial M \neq \emptyset$.

$2M$ la 3-variété obtenue en "doublant" M le long de son bord.



On a un plongement naturel: $\pi_1(M) \hookrightarrow \pi_1(2M)$

Lemme: $u, v \in \pi_1(M)$. $u \sim v$ dans $\pi_1(M)$

ssi $u \sim v$ dans $\pi_1(2M)$.

$\Rightarrow$ On pourra supposer que $\partial M = \emptyset$.

2) M une 3-variété fermée.

Décomposition de Kneser-Milnor: $M = M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n$

Chacun des M_i est soit $S^1 \times S^2$, soit irréductible (i.e. Toute sphère plongée borde une boule). On a: $\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) * \dots * \pi_1(M_n)$

Or CP est stable par produit libre, et $\pi_1(S^1 \times S^2) = \mathbb{Z}$ a un CP résoluble.

$\Rightarrow$ On pourra supposer que M est irréductible.

3) M fermée, irréductible, vérifiant HGT. Alors M est soit:

— Hyperbolique

— fibré de Seifert.

— Modèle sur Sol

— Haken (i.e. $M \supset$ surface incomp.)

Réduction du problème de conjugaison.

1) M une 3-variété, $\partial M \neq \emptyset$.

$2M$ la 3-variété obtenue en "doublant" M le long de son bord.



On a un plongement naturel: $\pi_1(M) \hookrightarrow \pi_1(2M)$

Lemme: $u, v \in \pi_1(M)$. $u \sim v$ dans $\pi_1(M)$
ssi $u \sim v$ dans $\pi_1(2M)$.

$\Rightarrow$ On pourra supposer que $\partial M = \emptyset$.

2) M une 3-variété fermée.

Décomposition de Kneser-Milnor: $M = M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n$

Chacun des M_i est soit $S^1 \times S^2$, soit irréductible (i.e. toute sphère plongée borde une boule). On a: $\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) * \dots * \pi_1(M_n)$

Or CP est stable par produit libre, et $\pi_1(S^1 \times S^2) = \mathbb{Z}$ a un CP résoluble.

$\Rightarrow$ On pourra supposer que M est irréductible.

3) M fermée, irréductible, vérifiant HGT. Alors M est soit:

CP? - Résoluble. $\pi_1(M)$ est hyperbolique au sens de Gromov.

✓ Hyperbolique

— fibré de Seifert.

— Facile (nous le traitons)

* $\pi_1(M)$ est $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ou l'analogue de 2 copies de $\pi_1(KB_2)$.

✓ Modèle sur Sol

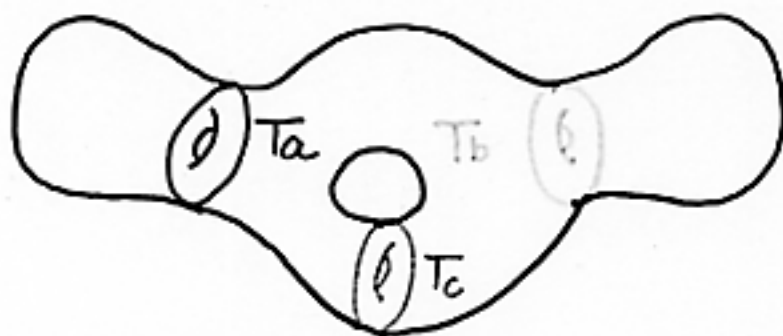
— Haken (i.e. $M \supset$ surface incomp.)

On pourra supposer que M n'est pas un tore sur le cercle. (sinon $S^1 \times S^2$ ou T^3)

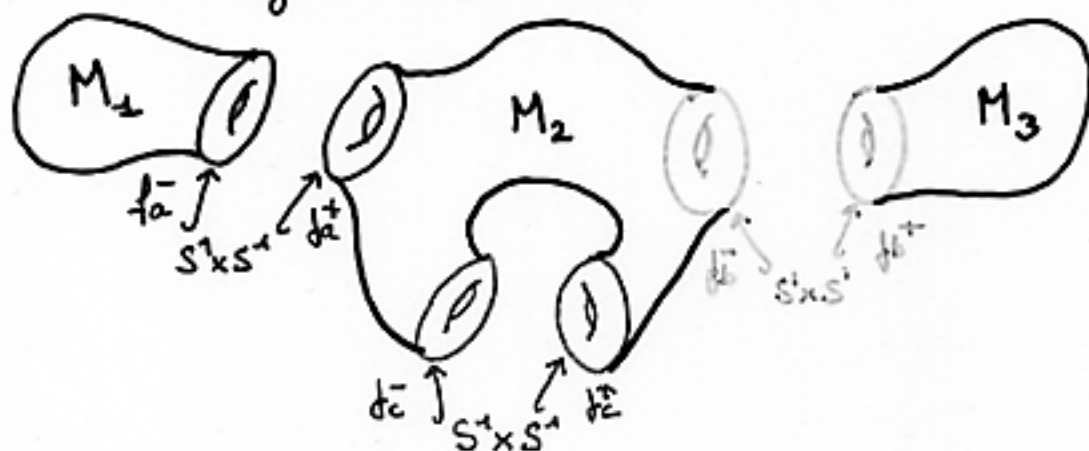
Décomposition JSJ d'une 3-variété Haken fermée M

- $\exists$ système de tores essentiels, plongés dans M , "minimal" à isotopie près.

M :



- "Couper" M le long de $T_a \cup T_b \cup T_c$.



- Chacun des M_i est Haken à bord non vide, et soit:
 - Un fibré de Seifert.
 - Hyperbolique de volume $< \infty$

$$\pi_1(M) = \pi_1 \left(\begin{array}{c} \xleftarrow{d_a^-} \bullet \xrightarrow{d_a^+} \bullet \xleftarrow{d_b^-} \bullet \xrightarrow{d_b^+} \bullet \\ \pi_1(M_1) \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \pi_1(M_2) \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \pi_1(M_3) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \quad \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \quad \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

$\pi_1(M)$ est le "groupe fondamental d'un graphe de groupe".

$$\begin{array}{l} \pi_1(M_1), \pi_1(M_2), \pi_1(M_3) \hookrightarrow \pi_1(M) \quad \text{- sous-groupes de sommet -} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_1(M_1), \pi_1(M_2), \pi_1(M_3) \quad \text{- sous-groupes d'arête -} \end{array}$$

Théorème de conjugaison dans un amalgame $A *_C B$

$$- A *_C B = \pi_1(M), \quad M = M_A \amalg_{M_C} M_B$$

Algébriquement

Topologiquement

- u et v des mots sur les gènes de $A \amalg B$.
- $u \sim v$ dans $A *_C B$

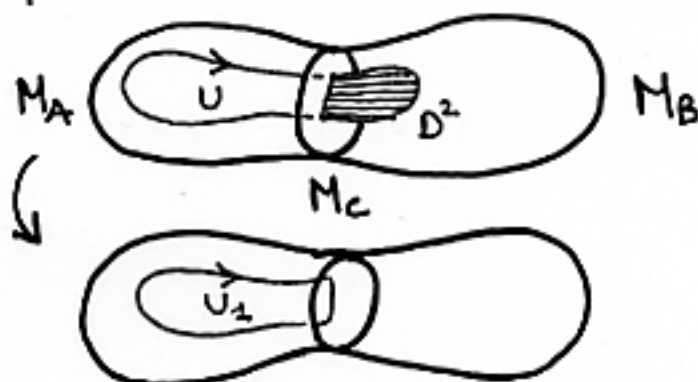
- u et v des lacets de M .
- u et v bordent un anneau sing. de M

- "Réduction cyclique" de u et v en u_1 et v_1 , conjugués respectifs.

$$u \sim v \iff u_1 \sim v_1$$

- Constructibilité de ce procédé:
se réduit à l'algorithme qui décide $\forall w \in A \cup B, \exists i w \in C$.
(i.e. $\mathcal{GWP}(C; A)$ et $\mathcal{GWP}(C; B)$.)

- Simplification de u et v en u_1 et v_1 qui leur sont (resp.), lib^t homotopes



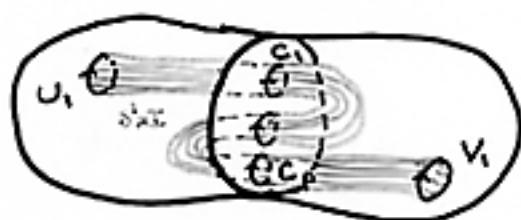
①

$u_1 \sim v_1$ dans A



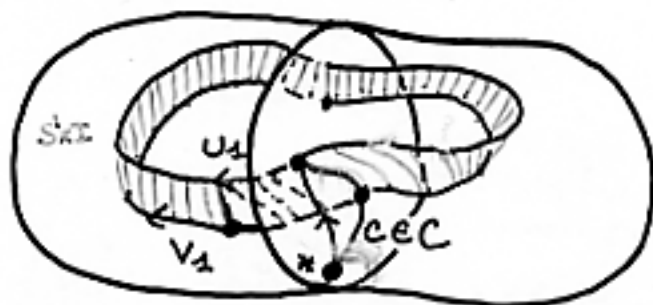
②

$u_1 \sim c_1$ dans A ; $c_1 \in C$
 $v_1 \sim c_p$ dans B ; $c_p \in C$
 $\exists$ suite $(c_1; c_2; \dots; c_p)$ de C ,
 2 termes consécutifs sont conj. de $A \cup B$



③

u_1 est conjugué à un
 "conjugué cyclique" de v_1
 par un élément $c \in C$
 $u_1 = c \cdot v_1 \cdot c^{-1}$



Théorème de Conjugaison dans un graphe de groupe.

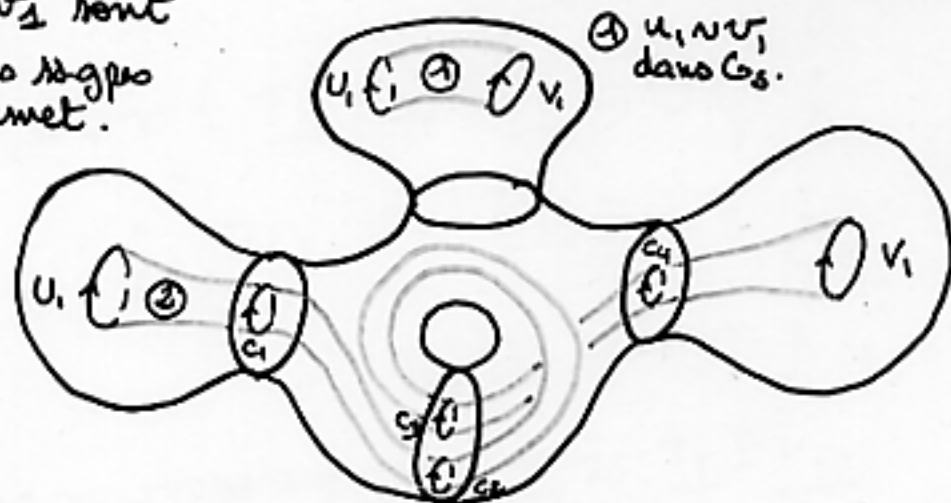
$G = \pi_1(\mathcal{G}; X)$. On note G_s un ss-grp de sommet, G_a un ss-grp d'arête.

→ On dispose d'une procédure de "réduction" de mots.

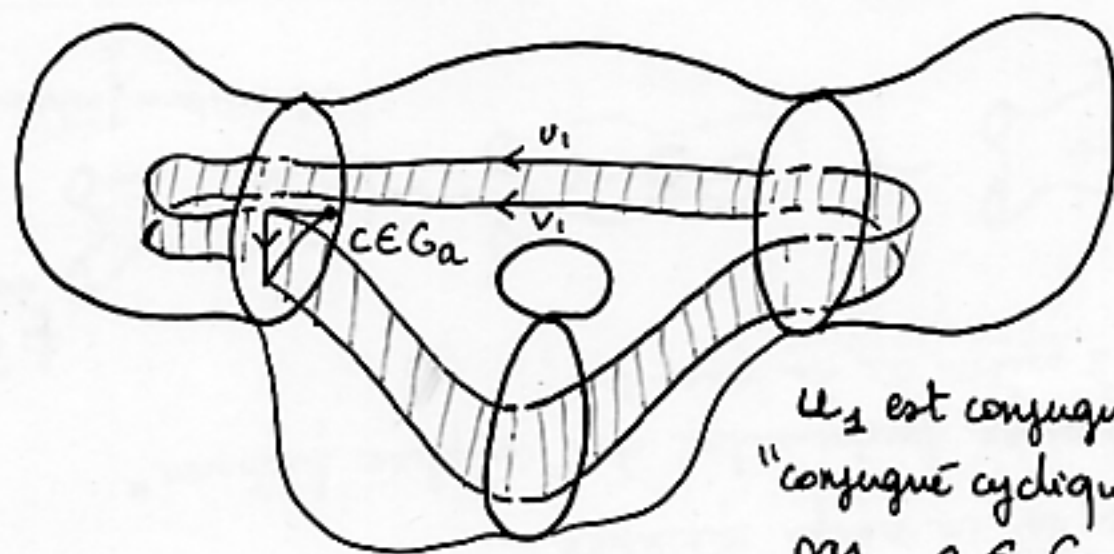
Sa constructibilité se réduit à $\mathcal{G}WA(G_a, G_s)$ pour tout sous-groupe d'arête G_a , inclus dans un ss-grp de sommet G_s .

→ Données 2 éléments arbitraires u, v , on les réduit en u_1, v_1
 $u \sim v \iff u_1 \sim v_1$ dans $\pi_1(\mathcal{G}; X)$

1) u_1 et v_1 sont dans des ss-grps de sommet.



② On a une suite de conjugaison dans des ss-grps de sommet :
 $u \sim c_1 \sim c_2 \sim c_3 \sim c_4 \sim v_1$



u_1 est conjugué à un "conjugué cyclique" de v_1 par $c \in G_a$.

Théorème de Conjugaison dans un graphe de groupe.

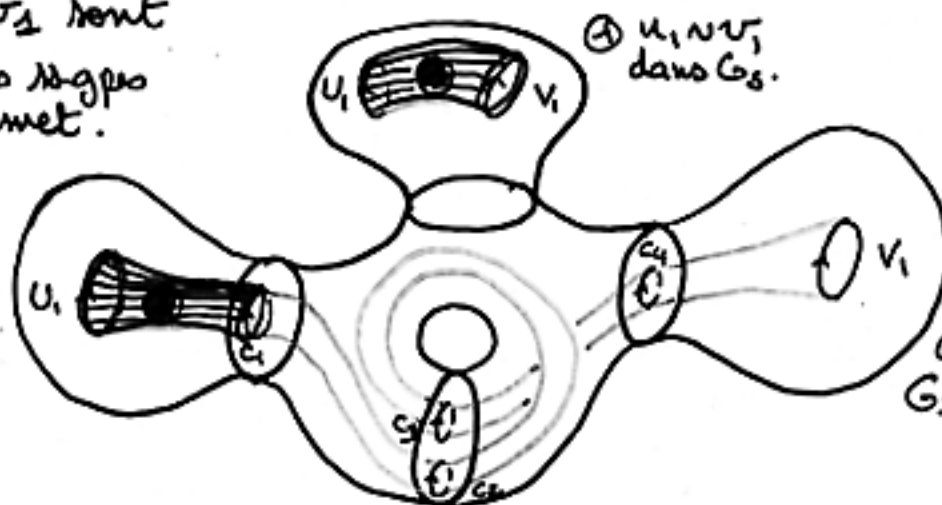
$G = \pi_1(\mathcal{G}; X)$. On note G_s un ss-gpe de sommet, G_a un ss-gpe d'arête.

→ On dispose d'une procédure de "réduction" de mots.

Sa constructibilité se réduit à $\mathcal{EWT}(G_a, G_s)$ pour tout sous-groupe d'arête G_a , inclus dans un ss-gpe de sommet G_s .

→ Données 2 éléments arbitraires u, v , on les réduit en u_1, v_1
 $u \sim v \iff u_1 \sim v_1$ dans $\pi_1(\mathcal{G}; X)$

1) u_1 et v_1 sont dans des ss-gps de sommet.



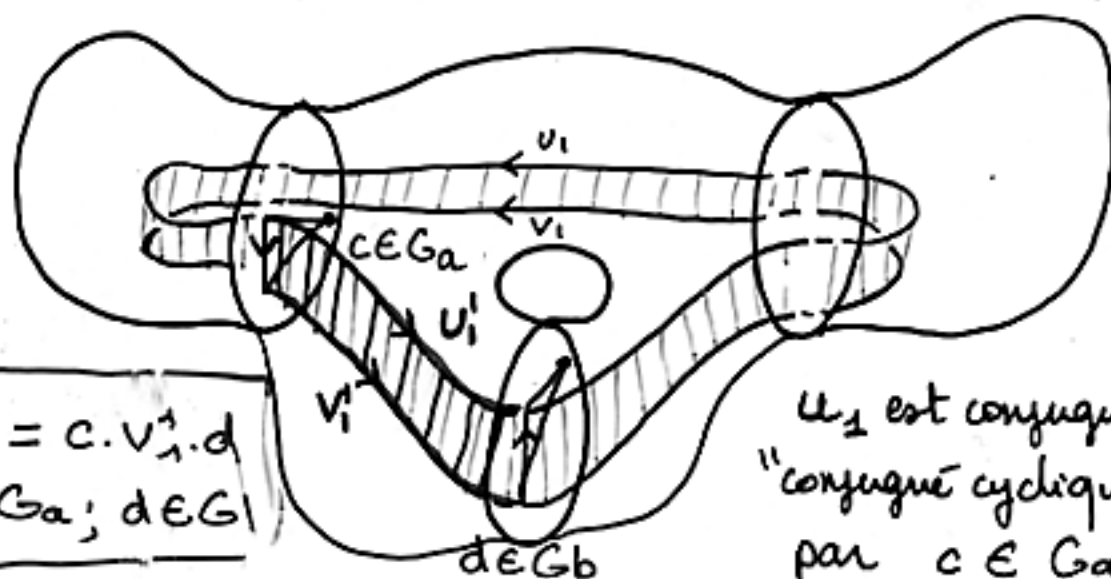
④ u_1, v_1 dans G_s .

● CP dans G_s

● Décider si $w \in G_s$ est conjugué dans G_s à un él⁺ de G_a

③ On a une suite de conjugaison dans des ss-gps de sommet :
 $u \sim c_1 \sim c_2 \sim c_3 \sim c_4 \sim v_1$

2)



$$u_1^{\pm} = c \cdot v_1^{\pm} \cdot d$$

$c \in G_a; d \in G_s$

u_1 est conjugué à un "conjugué cyclique" de v_1 par $c \in G_a$ -

Théorème de Conjugaison dans un graphe de groupe.

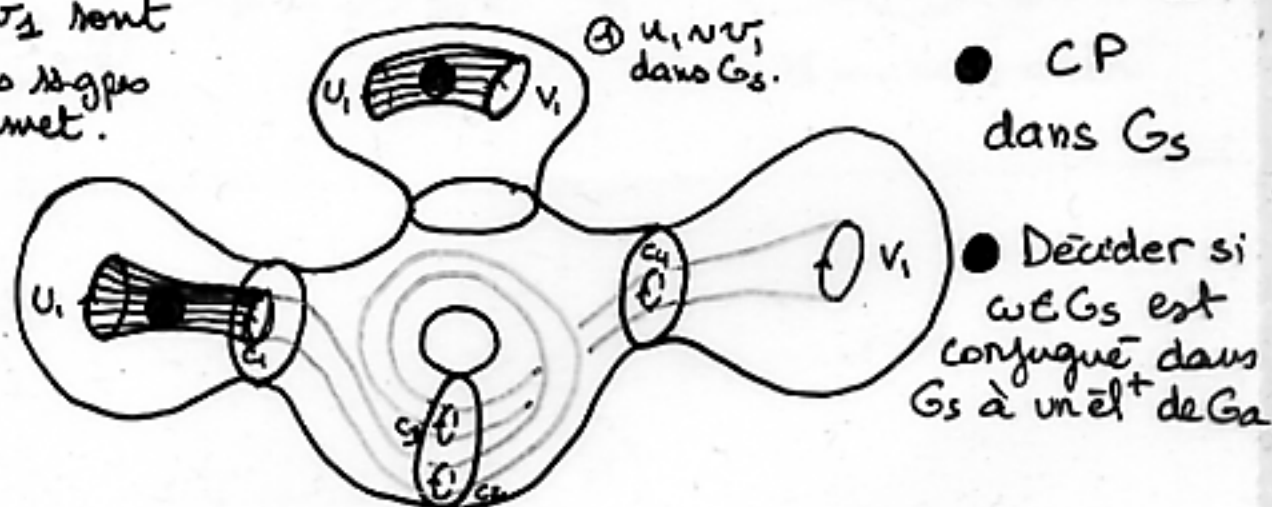
$G = \pi_1(\mathcal{G}; X)$. On note G_s un ss-gpe de sommet, G_a un ss-gpe d'arête.

→ On dispose d'une procédure de "réduction" de mots.

Sa constructibilité se réduit à $\mathcal{G} \text{ w.f. } (G_a, G_s)$ pour tout sous-groupe d'arête G_a , inclus dans un ss-gpe de sommet G_s .

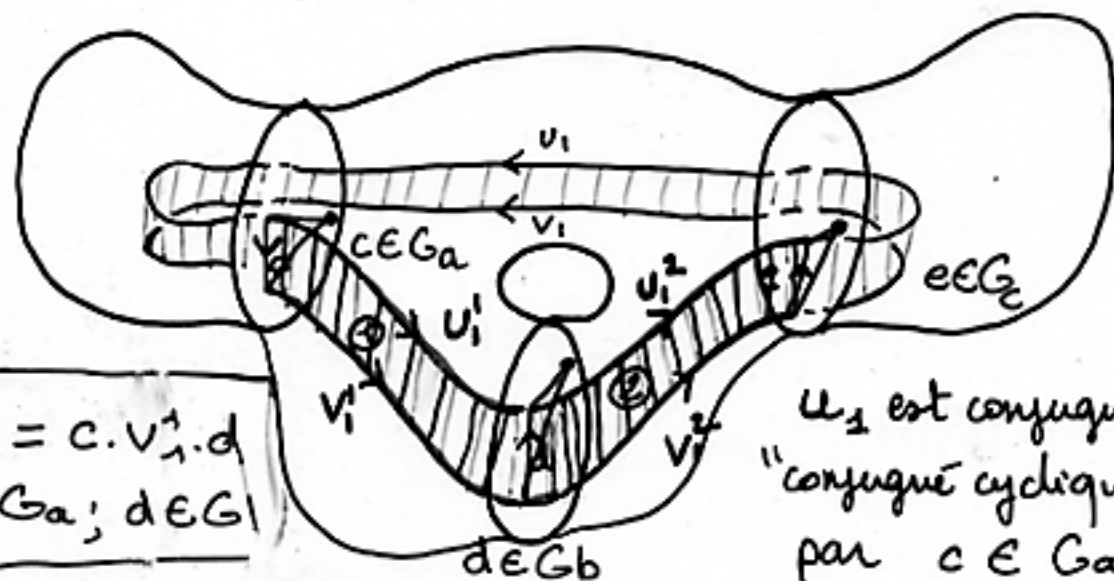
→ Données 2 éléments arbitraires u, v , on les réduit en u_1, v_1
 $u \sim v \iff u_1 \sim v_1$ dans $\pi_1(\mathcal{G}; X)$

1) u_1 et v_1 sont dans des ss-gpes de sommet.



② On a une suite de conjugaison dans des ss-gpes de sommet :
 $u \sim c_1 \sim c_2 \sim c_3 \sim c_4 \sim v_1$

2)



$$\textcircled{1} u_1^1 = c \cdot v_1^1 \cdot d$$

$c \in G_a; d \in G$

u_1 est conjugué à un "conjugué cyclique" de v_1 par $c \in G_a$ -

$$\textcircled{2} u_1^2 = d^{-1} v_1^2 e$$

$d \in G_b; e \in G_c$

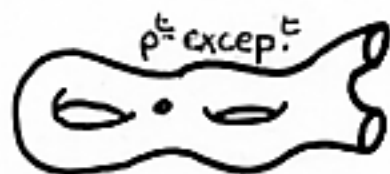
Le cas d'une pièce admettant une fibration de Seifert

- Nous pouvons supposer que $\pi_1(M)$ est infini, et que $M \not\cong S^1 \times S^1 \times I$ et $M \not\cong S^1 \times D^2$
- M admet une foliation en cercles, appelés fibres (régulières ou exceptionnelles.)



$$M = \sqcup S^1$$

Identifiez tte fibre
en un point.



base B : surface or. ou non.

- M admet un nombre fini de fibres exceptionnelles. Si l'on retire un voisinage régulier ($\cong S^1 \times D^2$) de chaque fibre exceptionnelle, on obtient un S^1 -fibré sur une surface (or. ou non) :
 M est obtenu par obstructions de Dehn sur un S^1 -fibré.
 Les âmes des tores d'obstruction sont les fibres exceptionnelles.

- Toutes les fibres régulières (pointées) sont (à orientation près) dans la même classe de $\pi_1(M)$.

On note cette classe h .

C'est un élément d'ordre ∞ de $\pi_1(M)$.

$N = \langle h \rangle \cong \mathbb{Z}$ est appelé "La fibre".

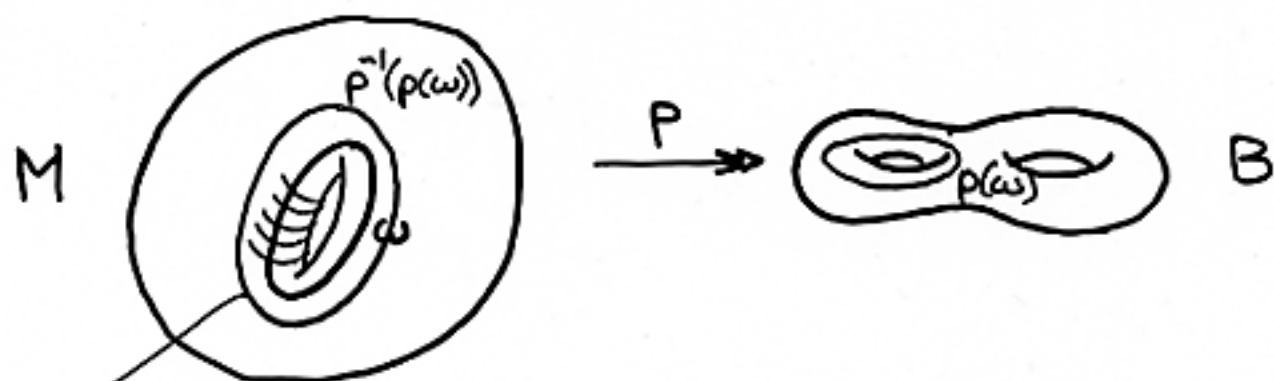
La classe d'une fibre exceptionnelle est racine d'un élément de N .

N est un sous-groupe normal cyclique infini de $\pi_1(M)$

$$1 \longrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ N : \text{La fibre}}}{\mathbb{Z}} \longrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\pi} \pi_1(M)/\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\pi} \pi_1(M)/\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

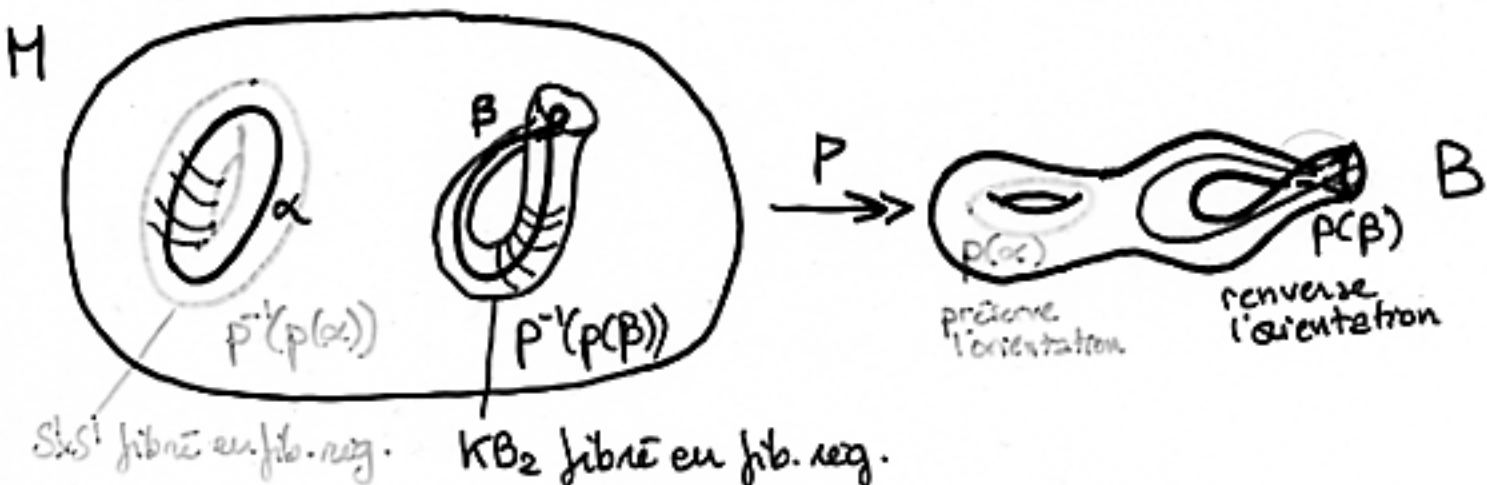
① Si la base B est orientable



$p^{-1}(p(\omega))$ est un tore fibré en fibres régulières.

$\Rightarrow N$ est central dans $\pi_1(M)$; i.e. $\forall \omega \in \pi_1(M)$, $[\omega, h] = 1$

② Si la base B est non orientable



$S_1 \times S^1$ fibré en fib. rég. KB_2 fibré en fib. rég.

$\Gamma \triangleleft \pi_1(B)$: ensemble des éléments qui préservent l'orientation.

$$\forall \omega \in \pi_1(M) \quad h \cdot \omega = \omega \cdot h^\varepsilon$$

"Anti-commutativité".

$$\varepsilon = 1 \text{ si } p_*(\omega) \in \Gamma$$

$$\varepsilon = -1 \text{ sinon}$$

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\pi} \pi_1(M)/N \longrightarrow 1$$

$\pi_1(M)/\mathbb{Z}$ est un groupe fuchsien.

C'est le groupe fondamental du "complexe fuchsien" construit à partir de la base B :



Résoudre dans $\pi_1(M)$

$T_1, T_2 \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ provenant de ∂M .

$\forall u, v \in \pi_1(M)$

① ? $\exists c \in T_1; u \sim c$?

② ? $\exists c \in T_1; d \in T_2; u = c.v.d$?

③ ? $u \sim v$? CP dans $\pi_1(M)$.

Idée: "Faire passer dans $\pi_1(M)/N$ ".

$$\pi: \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N$$

$$\text{Ker } \pi = N$$

Pour tout $u \in \pi_1(M)$, on notera $\underline{u} = \pi(u) \in \pi_1(M)/N$

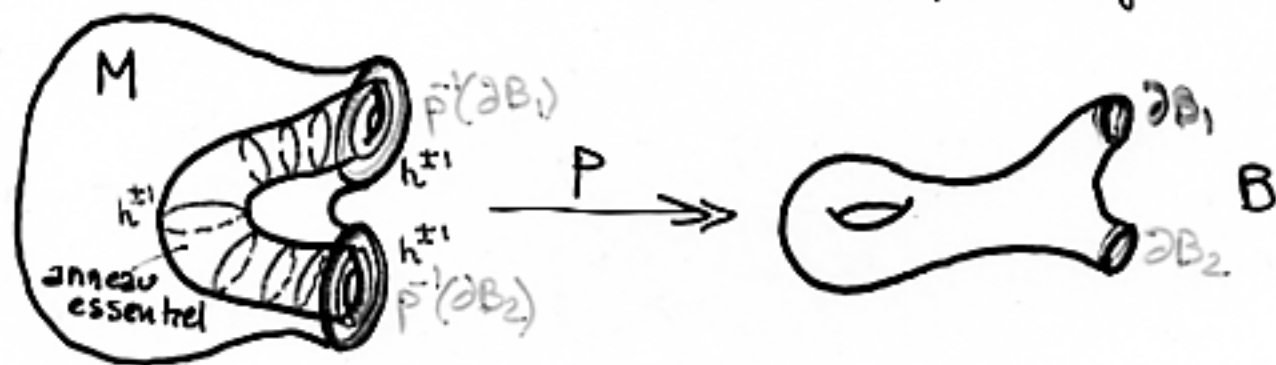
Algorithmes ① et ② - Points clés -

- Dans ces cas, nécessairement $\partial M \neq \emptyset \Rightarrow \partial B \neq \emptyset$
 $\Rightarrow \pi_1(M)/N$ est un produit libre de groupes cycliques -

- $\partial M = p^{-1}(\partial B)$ est fibré en fibres régulières -

$\Rightarrow \exists T_1, T_2, \dots, T_p \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ proviennent de ∂M ,
 $N \subset T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_p$

■ Les anneaux essentiels sont fibrés en fibres régulières -



Résolution de ①

? $\exists c \in T_1$; $\omega \sim c$? dans $\pi_1(M)$

? $\exists c \in \pi(T_1)$; $\omega \sim c$? dans $\pi_1(M)/N$

$\leadsto$ On trouve aisément au plus 1 solution dans $\pi_1(M)/N$

$$\omega = v \subset v^{-1}$$

$(\text{Ker } \pi = N) \Rightarrow \omega = v c v^{-1} h^n$ dans $\pi_1(M)$, pour $\pm 1 \leq n \in \mathbb{Z}$
 $= v \underbrace{c h^{\varepsilon n}}_{\in T_1} v^{-1}$ $\varepsilon = \pm 1$

$\Rightarrow$ On a trouvé $c \in T_1$; tq $\omega \sim c$
 Avec la structure des anneaux essentiels, au + 2 éléments de T_1 sont conjugués à ω .
 Si $\omega \sim h^n$, alors éventuellement $\omega \sim h^{-n}$

Résolution de (L) :

? $\exists c \in T_1, d \in T_2 ; u = c \vee d ?$ dans $\pi_1(M)$

? $\exists \underline{c} \in \pi(T_1); \underline{d} \in \pi(T_2); \underline{u} = \underline{c} \vee \underline{d} ?$ dans $\pi_1(M)/N$

~> On trouve aisément au + 1 couple solution dans $\pi_1(M)/N$

$$\exists ! \underline{c}; \underline{d} ; \underline{u} = \underline{c} \vee \underline{d}$$

$$\Rightarrow \underbrace{u}_{\in T_1} = \underbrace{c}_{\in T_1} \vee \underbrace{d}_{\in T_2} h^n \quad \text{pour } \pm 1! n \in \mathbb{Z}, \text{ dans } \pi_1(M)$$

~> On trouve éventuellement 1 couple solution dans $\pi_1(M)$.

Structure des

Anneaux essentiels

$$\Rightarrow \text{Solutions} = \{(c_0 h^n; d_0 \cdot h^{en}); n \in \mathbb{Z}\}_{e=\pm 1}$$

Dans le réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \widetilde{S^1 \times S^1}$, les solutions possibles pour d se trouvent sur une droite



Solutions éventuelles pour d

Considérer le "ruban adjacent" dans une prèle voisine, permet de déterminer d'autres solutions pour $d \in T_2$

~> Au plus 1 solution pour $d \Rightarrow$ Au plus 1 couple solution $\square$

Résolution de ② :

? $\exists c \in T_1, d \in T_2 ; u = c \vee d ?$ dans $\pi_1(M)$

? $\exists \underline{c} \in \pi(T_1); \underline{d} \in \pi(T_2); u = \underline{c} \vee \underline{d} ?$ dans $\pi_1(M)/N$

→ On trouve aisément au + 1 couple solution dans $\pi_1(M)/N$

$$\exists ! \underline{c}; \underline{d} ; u = \underline{c} \vee \underline{d}$$

$$\Rightarrow u = \underbrace{c}_{\in T_1} \vee \underbrace{d}_{\in T_2} h^n \quad \text{pour } \exists ! n \in \mathbb{Z}, \text{ dans } \pi_1(M)$$

→ On trouve éventuellement 1 couple solution dans $\pi_1(M)$.

Structure des

Anneaux essentiels $\Rightarrow \text{Solutions} = \{(c \cdot h^n; d \cdot h^{\epsilon n}); n \in \mathbb{Z}\}$
 $\epsilon = \pm 1$.

Dans le réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \widetilde{S^1 \times S^1}$, les solutions possibles pour d se trouvent sur une droite

La pièce voisine est un Seifert

Les solutions pour d sont sur une droite de pente $\neq$

(Dans ce cas on a trouvé une solution pour d , et donc un couple solution $(c; d)$.)



Solutions éventuelles pour d

Une unique solution pour d provenant de la pièce voisine hyperbolique

($\Rightarrow$ Dans ce cas il n'y a pas de solution.)

Considérer le "ruban adjacent" dans une pièce voisine, permet de déterminer d'autres solutions pour $d \in T_2$

→ Au plus 1 solution pour $d \Rightarrow$ Au plus 1 couple solution $\square$

Solution au C.P. dans le groupe d'un filé de Seif.

M un filé de Seifert fermé, irréductible, avec $\pi_1(M)$ infini.

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N \longrightarrow 1$$

||
Groupe Fuchsien,
ou π_1 d'une orbite fermée.

$\rightarrow \pi_1(M)/N$ est au plus bi-automatique $\Rightarrow$ un CP résolvable.

- Resolution

? $u \sim v$?
? $\underline{u} \sim \underline{v}$?

dans $\pi_1(M)$

dans $\pi_1(M)/N$

Si $\underline{u} = \underline{a} \underline{v} \underline{a}^{-1}$ dans $\pi_1(M)/N$ Δ $\underline{a}$ n'est pas unique

alors $\underline{u} = \underline{a} \underline{v} h^n \underline{a}^{-1}$ dans $\pi_1(M)$ $\underline{a} \in \underline{a} \cdot \mathbb{Z}(\underline{v})$

$n \in \mathbb{Z}$ unique, connu.

? $u \sim v$?

$\neq$ si $\underline{n} = 0$, c'est clair!

$\neq$ si $\underline{n} = 2p$, et $\underline{v} h = h^{-1} \underline{v}$.

$$u = \underline{a} \underline{v} h^n \underline{a}^{-1} = \underline{a} \underline{v} h^p h^p \underline{a}^{-1} = \underline{a} h^{-p} \underline{v} h^p \underline{a}^{-1} \sim \underline{v}$$

$\neq$ soit $\underline{x} \in \mathbb{Z}(\underline{v}) \Rightarrow \underline{x} \underline{v} \underline{x}^{-1} = \underline{v} h^m$. si $\underline{n} = m$

$$u = \underline{a} \underline{v} h^n \underline{a}^{-1} = \underline{a} \underline{x} \underline{v} \underline{x}^{-1} \underline{a}^{-1} \sim \underline{v}$$

Dans quels autres cas? ...

Thme: Connaissant $n \in \mathbb{Z}$, et connaissant $\mathbb{Z}(\underline{v})$ dans $\pi_1(M)/N$
($\cong \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ou $\pi_1(KB_2)$), un tableau indique précisément
quand $u \sim v$ dans $\pi_1(M)$.

Or on dispose d'un algorithme qui fournit $\mathbb{Z}(\underline{v})$ dans $\pi_1(M)/N$

$\Rightarrow$ Solution au CP dans $\pi_1(M)$ - QED

M une pièce hyperbolique de volume fini

→ $M = \mathbb{H}^3 / \Gamma$ Γ ss-gpe discret ss-torsion de $PSL(2; \mathbb{C})$
 $\text{vol} < \infty \Leftrightarrow \partial M$ est constitué de tores.

→ CP dans $\pi_1(M)$ est résoluble ($\pi_1(M)$ est biautomatique (Epstein)).

A Solution au problème de parallélisme au bord.

Thème de chirurgie hyp. (Thurston): "Presque toutes" les 3-variétés (fermées) obtenues par obturation de Dehn sur M sont hyperboliques

→ Idee: se donner 2 vars fermées hyp., M_1, M_2 obtenues par O.D sur M, avec des pentes de chirurgie distinctes.

avantage: $\pi_1(M_1)$ et $\pi_1(M_2)$ sont δ -hyperboliques - (pas d'elts paraboliques)

Surjections Canoniques: $p_1: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M_1)$ Les noyaux sont normalement engendrés par les pentes de Ch.
 $p_2: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M_2)$

$T = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \pi_1(M)$
 parabolique maximal

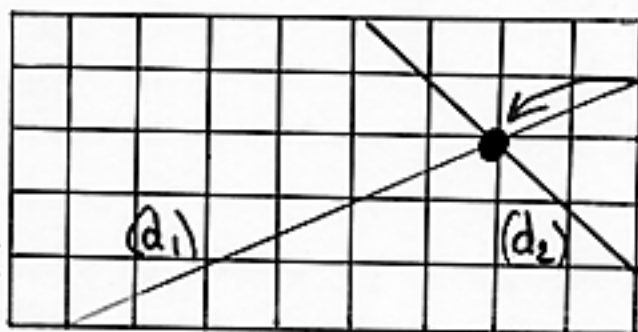
$p_1(T) \simeq p_2(T) \simeq \mathbb{Z}$.

→ "Faire passer" l'algorithme dans $\pi_1(M_1)$ et $\pi_1(M_2)$.

dans $\pi_1(M)$? $\exists c \in T; w \sim c$?
 dans $\pi_1(M_i)$? $\exists c \in p_i(T); p_i(w) \sim c$? $i=1,2$.

1! solution de $\pi_1(M_i) \rightsquigarrow \mathbb{Z}$ solutions de $\pi_1(M)$

$(d_1), (d_2)$ représentent les solutions provenant de $\pi_1(M_1)$ et $\pi_1(M_2)$.
 Leur pente est la pente de chirurgie sur T considéré.
 ⇒ pentes distinctes.



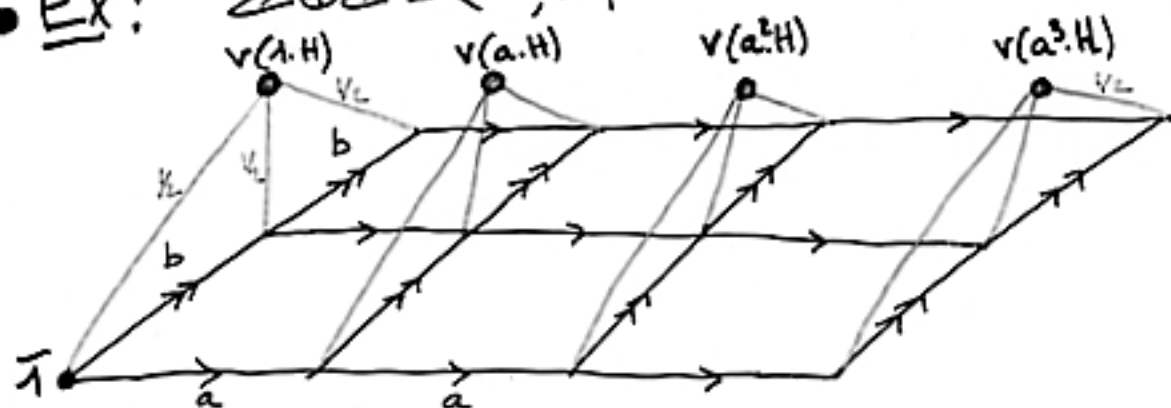
1! solution de $\pi_1(M)$

Réseau:
 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$
 $\cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Groupe relativement hyperboliques

- ① G un gpe f.p. ; $H_1; H_2; \dots; H_n$ des ss.gpes de type fini.
 S famille gén. de G . $\Gamma(G) = \Gamma(G; S)$ le graphe de Cayley.
 Le "coned off Cayley graph" $\hat{\Gamma}(G)$ relatif à $H_1; H_2; \dots; H_n$ est
 construit à partir de $\Gamma(G)$ en ajoutant pour chaque classe
 latérale à droite $g.H_i$ ($g \in G; i=1; 2; \dots; n$) :
- Un sommet "spécial" $v(g.H_i)$.
 - $\forall h \in H_i$; une arête de longueur $\frac{1}{2}$, de $g.h$ à $v(g.H_i)$.
- C'est un espace métrique géodésique (non loc  fini!) ; dans
 lequel $\Gamma(G)$ se plonge (non isométriquement!)

• Ex: $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a; b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. $H = \langle b \rangle$.



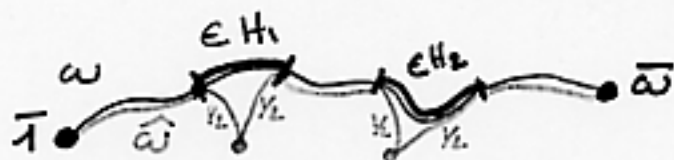
$\hat{\Gamma}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$
 $\cup$
 $\Gamma(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$

Définition : G est (δ) -hyperbolique relativement à $H_1; \dots; H_n$
 si le coned off Cayley graph $\hat{\Gamma}(G)$ est (δ) -hyperbolique -

Fait :  tre hyp. rel. ne dépend de la famille génératrice -

- Ex : - Tout gpe G est hyperbolique relativement à $\{1\}$.
 - G hyp. rel    $\{1\} \Leftrightarrow G$ hyperbolique au sens de Gromov.
 - Si $N \triangleleft G$; G hyp rel.   $N \Leftrightarrow G/N$ est hyperbolique " "

② $\exists$ surjection: $\text{Lacets de } \Gamma(G) \rightarrow \text{Lacets de } \hat{\Gamma}(G)$
 $\omega \longrightarrow \hat{\omega}$



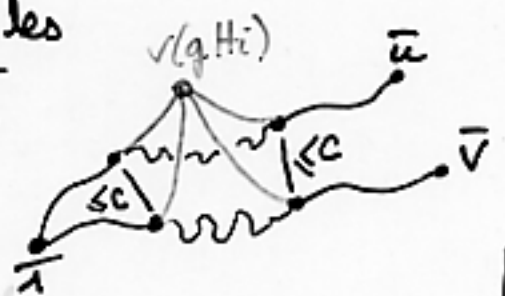
ω est une géodésique relative si $\hat{\omega}$ est une géodésique.
 ω " " quasi-géodésique relative " " quasi-géodésique
 ω de $\Gamma(G)$ (ou $\hat{\omega}$ de $\hat{\Gamma}(G)$) est dit "sans boucle" si $\hat{\omega}$ ne passe pas 2 fois par un même sommet spécial $v(gH)$

Bounded coset penetration property (BCP)

$(G; H_1, \dots, H_n)$ satisfait la propriété BCP si $\forall P \geq 1, \exists c = c(P) > 0$ tq si u et v sont des P -quasi-géodésiques relatives, sans boucles, avec $d_T(\hat{u}; \hat{v}) \leq 1$:



- Si $\hat{u}$ passe par $v(gH_i)$, et $\hat{v}$ non, alors u "voyage" dans gH_i sur une distance au plus c .
- Si $\hat{u}$ et $\hat{v}$ passent par $v(gH_i)$ alors les sommets où u et v entrent dans gH_i sont à une Γ -distance au plus c , et similairement aux sommets où u et v quittent gH_i .



Motivation:

Thme (Farb): Le gpe d'une variété hyp. de vol. fini est hyperbolique relativement à ses sous-gpes du bord, et satisfait la propriété BCP.