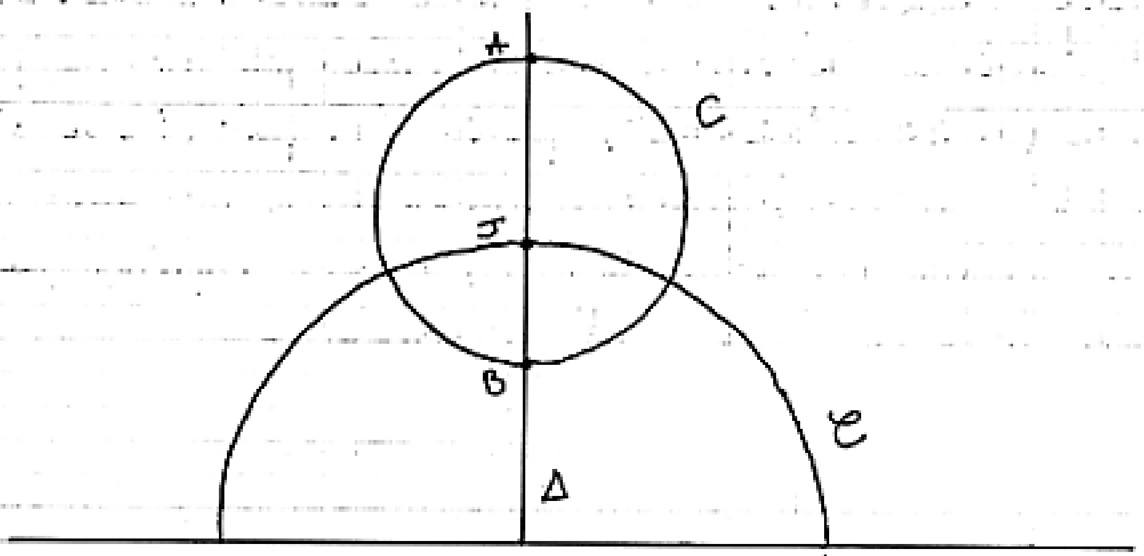
Un peu de géométrie Hyperbolique

① Quels sont les cercles hyperboliques ?

On considère un point J de $\mathbb{H}^2$ (Que l'on prend d'abscisse nulle), et A et B sur la droite verticale $\Delta : x=0$, tq J soit le milieu (au sens hyp.) de $[A;B]$.

On se donne C, le cercle (euclidien) de diamètre $[A;B]$, et $\mathcal{C}$, la droite hyperbolique "centrée en 0", passant par J.

Alors l'inversion par $\mathcal{C}$ fixe J, envoie A sur B et préserve C.



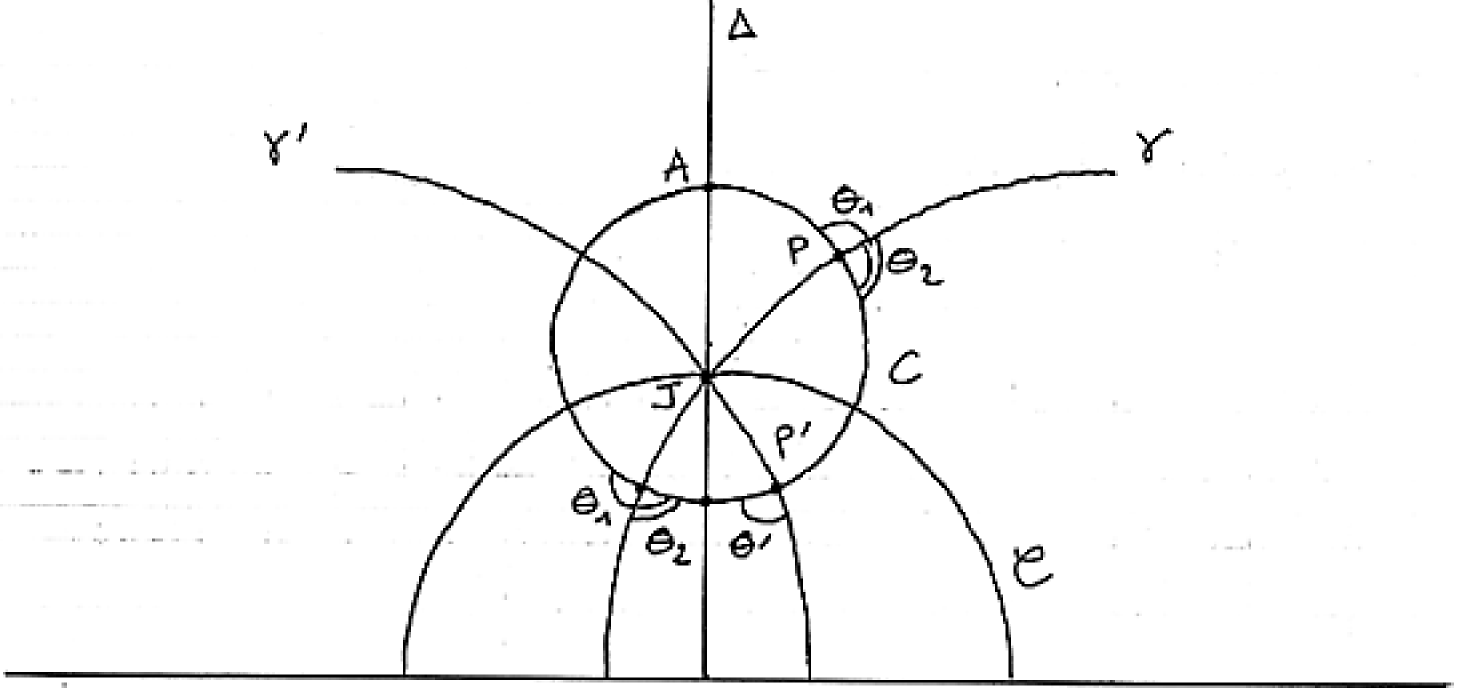
On se propose de montrer que C est en fait un cercle hyperbol. centré en J, i.e. $C = \{ M \in \mathbb{H}^2 \mid d(J;M) = r \}$; $r = d(J;A)$.

lemme : toute droite hyperbolique passant par J, intersecte C orthogonalement.

démo : On se donne γ, droite hyperbolique passant par J (on peut supposer que $\gamma \neq \Delta$)

- Premièrement, on remarque que lorsque 2 cercle s'intersectent en 2 points, ils découpent en ces 2 points des angles égaux.

γ et C découpent les angles θ_1 et θ_2.

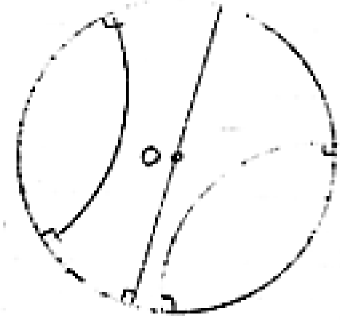


- Deuxièmement, On considère l'inversion par $\mathcal{C}$.
J est fixe et Δ est préservé, et donc par conformité, γ est envoyé sur γ', son symétrique par rapport à Δ.
C est préservé par l'inversion, et donc P est envoyé sur P', et par conformité $\theta_1 = \theta'$
- Troisièmement, la symétrie par rapport à Δ, envoie γ sur γ' et préserve C, et donc $\theta' = \theta_2$
On a donc $\theta_1 + \theta_2 = 2\theta_1 = \pi \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ cqfd ▪

$\boxed{\text{Proposition : C est un cercle hyperbolique, centré en J.}}$

dém : - Soit $P \in C$. On veut montrer que $d(J;P) = d(J;A)$
On considère l'inversion dans le cercle γ, fixant J, envoyant P sur Δ. Puisque γ est orthogonal à C, C est préservé par l'inversion par γ, et donc P est envoyé sur A cqfd ▪
- Soit $P \in \mathbb{H}^2$ tq $d(J;P) = d(J;A)$
Donc il existe une inversion par un cercle γ, fixant J et envoyant P sur A. Or γ préserve C ($C \perp \gamma$) et γ envoie A sur P, et donc $P \in C$
cqfd ▪

Le modèle de Poincaré : D^2



On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{H}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$$

C'est une application conforme (transformation de Möbius) qui envoie $\mathbb{H}^2$ sur le disque ouvert de centre 0, de rayon 1.
On admettra que la métrique induite par φ est donnée par la forme différentielle : $\quad d\sigma = \dfrac{|dz|}{1-|z|^2}$

② Circonférence d'un cercle, Aire d'un disque.

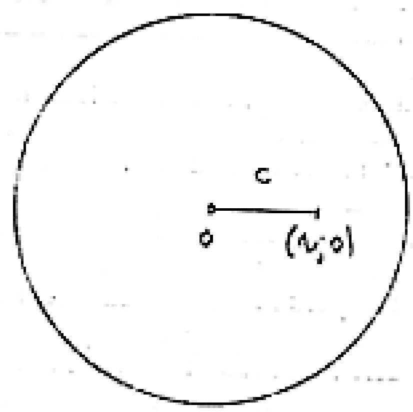
$\mathcal{C}$ un cercle hyperbolique, centré en i, de rayon R.
Dans le modèle de Poincaré, c'est un cercle euclidien, centré en 0 (image de i par φ) et de rayon r

a) Trouver la distance hyperbolique de l'origine à un point à distance euclidienne r de l'origine.

Il est suffisant de calculer la longueur de c :

$$c : \begin{array}{ccc} [0;r] & \longrightarrow & D^2 \\ t & \longrightarrow & (t;0) \end{array}$$

c'est un lacet géodésique



$dz = dx + i\,dy$

$|dz| = dx^2 + dy^2$

$$d\sigma = \frac{2\sqrt{dx^2+dy^2}}{1-(x^2+y^2)}$$

$x(t) = t \qquad dx(t) = dt$

$y(t) = 0 \qquad dy(t) = 0$

$$ds = \frac{2\,dt}{1-t^2}$$

$$R = d_h(0;P) = \int_C ds = \int_0^r \frac{2\,dt}{1-t^2} = 2\int_0^r \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\int_0^r \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int_0^r \frac{dt}{1+t}\right]$$

$$= \int_0^r \frac{dt}{1-t} + \int_0^r \frac{dt}{1+t}$$

$$= \left[\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^r = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

b) Circonférence d'un cercle.

On a une paramétrisation de $\mathcal{C}$ dans D^2

$x = r.\cos\theta \qquad dx = -r.\sin\theta\, d\theta$

$y = r.\sin\theta \qquad dy = r\cos\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow \quad ds = \frac{2r}{1-r^2}\,d\theta$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1-r^2}\,d\theta = 4\pi.\frac{r}{1-r^2}$$

$$R = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \Leftrightarrow r = \frac{e^R-1}{1+e^R}$$

$$\frac{r}{1-r^2} = \frac{\frac{e^R-1}{1+e^R}}{1-\left(\frac{e^R-1}{1+e^R}\right)^2} = \frac{(e^R-1)(e^R+1)}{(1+e^R)^2-(e^R-1)^2}$$

$$= \frac{e^{2R}-1}{4.e^R} = \frac{e^R-e^{-R}}{4} = \frac{1}{2}\sinh(R)$$

$$\Rightarrow \quad \ell = 2\pi.\sinh(R)$$

c) Aire d'un disque

$$\mathcal{A} = \int_0^R 2\pi \cdot \sinh(x) \cdot dx = 2\pi \int_0^R \sinh(x)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\cosh(x)\right]_0^R$$

$$= 2\pi \left(\frac{e^R + e^{-R}}{2} - 1 \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{(e^{R/2} - e^{-R/2})^2}{2} \right)$$

$$= 4\pi \cdot \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right)$$

Proposition : Soit un cercle hyperbolique, de rayon R

Sa circonférence est $2\pi \cdot \sinh(R)$.

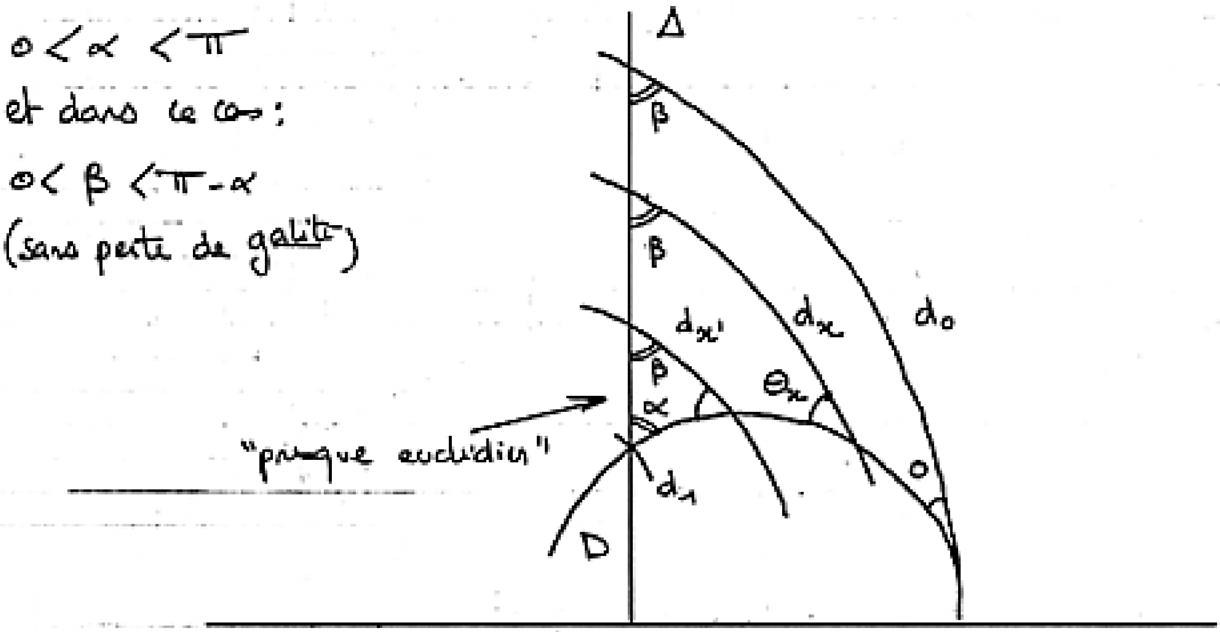
l'aire du disque est $4\pi \cdot \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right)$

③ Les triangles et leurs angles intérieurs

Proposition : Pour un triangle, la somme des angles intérieurs est (st) inférieure à π.
De plus donnés $\alpha;\beta;\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\alpha+\beta+\gamma<\pi$, il existe un triangle ayant pour angles α, β et γ.

dém : Dans le $\frac{1}{2}$ plan supérieur. Donné un triangle, il existe toujours une isométrie envoyant un des côtés sur une droite verticale Δ. On peut donc supposer que c'est déjà le cas.
On considère Δ, et D une droite l'intersectant avec l'angle α.
On a une infinité de droites intersectant Δ avec l'angle β, et formant avec Δ et D un triangle. On considère la famille $\{d_x ; x\in I\}$ de toutes ces droites.

$0<\alpha<\pi$
et dans ce cas :
$0<\beta<\pi-\alpha$
(sans perte de généralité)



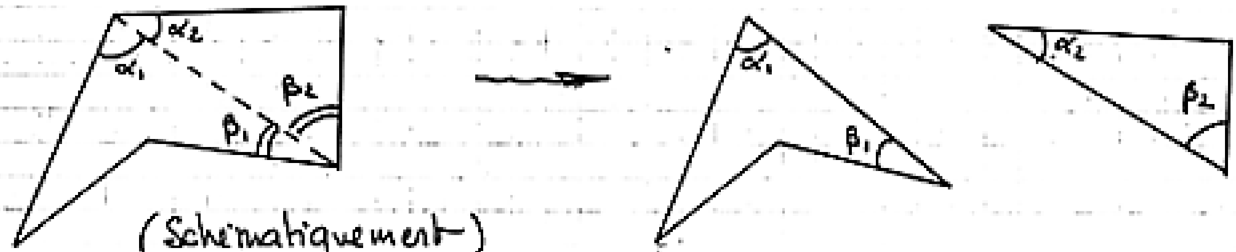
Qd x décrit $\mathring{I}$, l'angle entre D et d_x varie continuement entre 0, et $\pi-(\alpha+\beta)$ (bornes exclues)

$\Rightarrow$ 1er : donné un triangle et $\alpha;\beta;\gamma$ ses angles intérieurs.
(∗) $\alpha+\beta+\gamma<\pi$

2ème : Par le T.V.I ; donnés $\alpha;\beta;\gamma$ vérifiant (∗), $\exists$ un triangle ayant pour angles $\alpha;\beta;\gamma$ qfd

Corollaire : Pour un polygône à n côtés, la somme des angles intérieurs est (st.) inférieure à $(n-2).\pi$

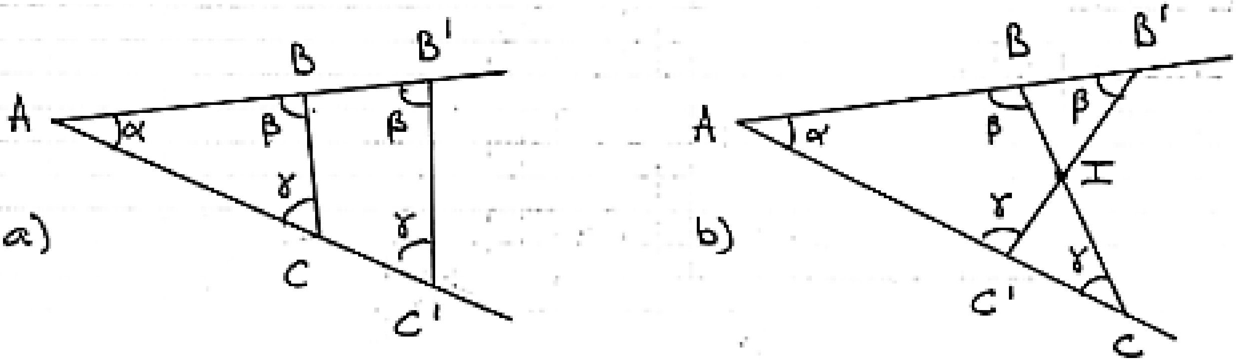
dem : procéder par récurrence sur le nbre de côtés.
"Décomposer" un (n+1).gône en un n-gône et un triangle.



(Schématiquement) ∎

Corollaire : Deux triangles sont congruents ssi ils ont même angles.

dem : Donnés deux triangles ABC et A'B'C' d'angles $\alpha; \beta; \gamma$.
Un isométrie permet de ramener A' sur A, [A'B') sur [AB) et [A'C') sur [A;C). On a alors éventuellement l'un des cas : (Schématiquement !)



Dans le cas a), le quadrilatère BB'C'C a pour somme des angles 2π.
Dans le cas b), le triangle BB'I a une somme des angles au moins égale à π.
Donc l'unique possibilité est $B = B'$ et $C = C'$ ∎

④ Aire d'un triangle.

On montre :

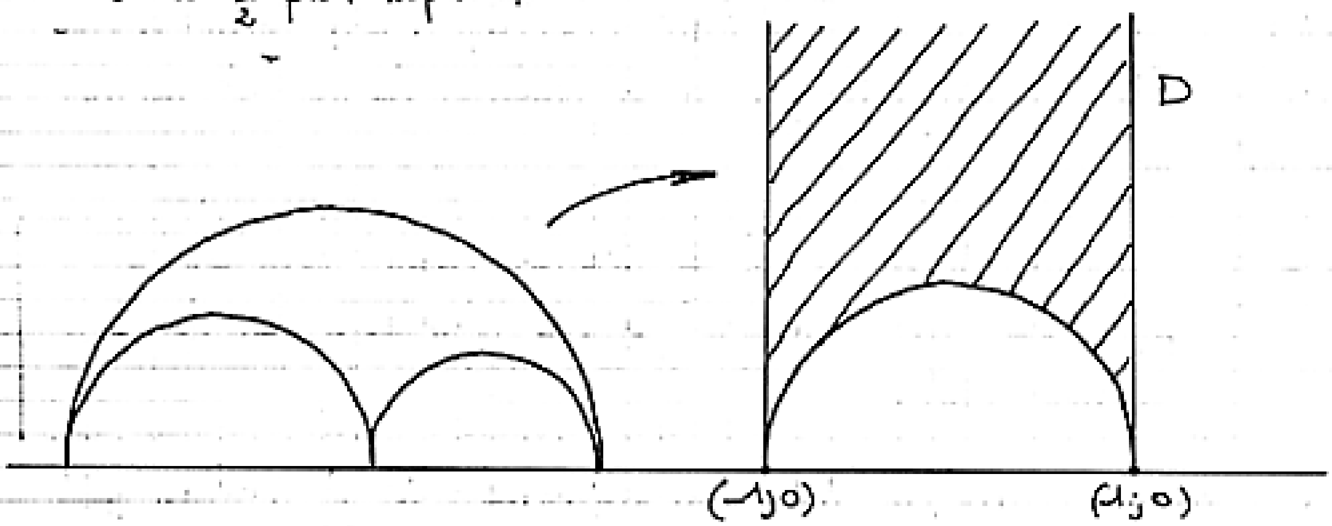
Thm : Un triangle a pour aire π moins la somme de ses angles intérieurs.

(démo due à Gauss)

- On appellera triangle idéal, un "triangle" dont tous les sommets sont à l'infini ($\mathbb{R}$ dans le $\frac{1}{2}$ plan supérieur)

lemme : Tous les triangles idéaux sont congruents et ont pour aire π.

dem : Tout triangle idéal peut-être transformé par isométrie en un triangle idéal de sommets $(-1;0)$; $(1;0)$ et ∞ Dans le $\frac{1}{2}$ plan sup. :



Donné un triangle idéal, si ses 3 sommets sont sur $\mathbb{R}$, on le transforme, par une inversion dans un cercle de centre l'un de ces sommets, en un triangle idéal ayant ∞ pour sommet. Par une translation "horizontale" suivie d'une homothétie de centre $(0;0)$ on le transforme en un triangle ayant pour sommets $(1;0)$; $(-1;0)$ et ∞. Tous les triangles idéaux sont donc congruents.

Le domaine D délimité par ce triangle est :

$$D = \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \leq x \leq 1 \,;\, \sqrt{1-x^2} \leq y \right\}$$

La différentielle d'aire est donné dans le $\frac{1}{2}$ plan sup. par :

$$da = \frac{dx}{y} \times \frac{dy}{y} = \frac{1}{y^2} \cdot dx.dy.$$

L'aire du triangle est donc :

$$A = \iint_D da = \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2}\, dy \,.\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

On pose $x = \sin\theta$

$$\Rightarrow A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta \,.\, d\theta}{\cos\theta} = \pi \qquad \text{cqfd} \;\blacksquare$$

- On appelle triangle à $\frac{2}{3}$ idéal, un triangle pour lequel au moins 2 sommets sont à l'infini (i.e. : $\overline{\mathbb{R}}$). On appellera sommet réel d'un triangle à $\frac{2}{3}$ idéal, le sommet ne se trouvant pas à l'infini.

lemme : Deux triangles à $\frac{2}{3}$ idéaux sont congruents ssi ils ont même angle intérieur en leur sommet réel.

dem : Soient ABC et A'B'C' 2 triangles à $\frac{2}{3}$ idéaux, ayant pour sommet réel resp^t A et A'. Après avoir évent^t composé par une isométrie, on peut supposer que A = A'. (et bien sûr les isom. préservent le fait d'être à $\frac{2}{3}$ idéal). On compose alors par une isométrie envoyant [AB') sur [AB), et alors, par égalité des angles, ABC et A'BC' sont soient confondus soit images l'un de l'autre par la réflexion d'axe (AB) $\blacksquare$

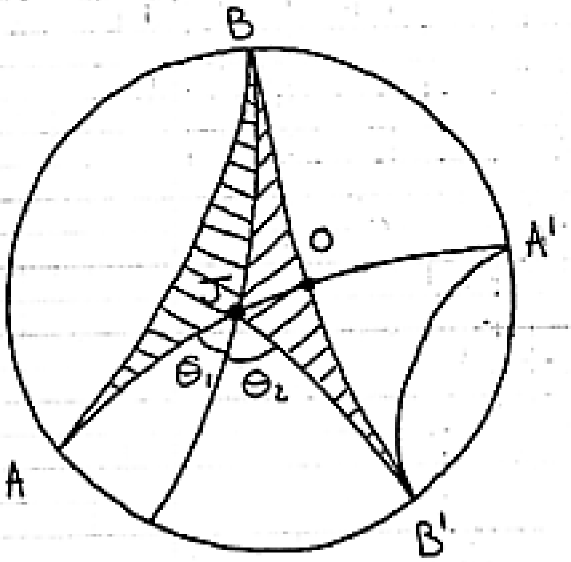
• Considérons un triangle à $\frac{2}{3}$ idéal ayant pour angle $\pi-\theta$ ($\theta \in [0;\pi]$). On peut alors définir l'application A, qui à un tel triangle associe $A(\theta)$, son aire (bien défini avec les 2 lemmes précédents).

$\boxed{\text{lemme : } \quad A(\theta) = \theta}$

dem : 1°) ? A est une fonction additive

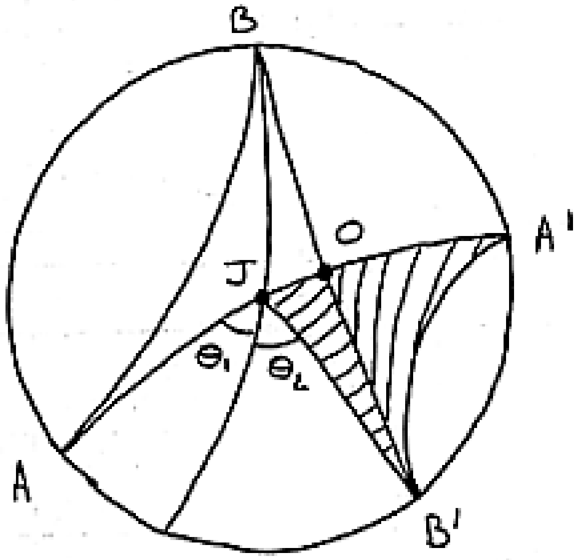
i.e : $A(\theta_1+\theta_2) = A(\theta_1) + A(\theta_2)$

On se place dans le modèle de Poincaré.



Domaine d'aire

$A(\theta_1)+A(\theta_2)$



Domaine d'aire

$A(\theta_1+\theta_2)$

On considère 2 triangles à $\frac{2}{3}$ idéaux ABJ et $BB'J$, d'angle au sommet réel resp^t θ_1 et θ_2.

Les dessins illustrent la construction effectuée.

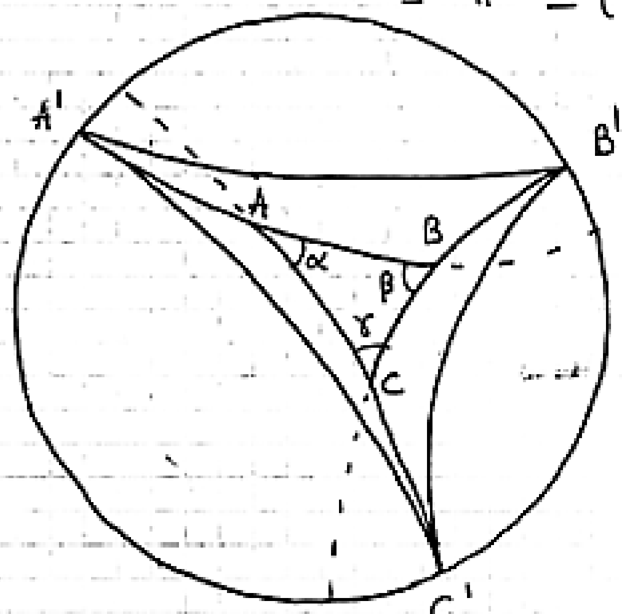
On considère les triangles à $\frac{2}{3}$ idéaux OAB et $OA'B'$; Ils ont même angle au sommet réel, et donc même aire

ainsi $$\begin{aligned} A(\theta_1)+A(\theta_2) &= \mathcal{A}(AJB)+\mathcal{A}(BJB') \\ &= \mathcal{A}(AOB)+\mathcal{A}(JOB') \\ &= \mathcal{A}(A'OB')+\mathcal{A}(JOB') \\ &= \mathcal{A}(JA'B') \\ &= A(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

2°) A est additive sur $[0;\pi]$, et est donc $\mathbb{Q}$-linéaire. A est continue, et donc $\mathbb{R}$-linéaire (exercice). A peut se prolonger par linéarité sur $\mathbb{R}$, en $\tilde{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
et alors $\tilde{A}(x) = \alpha . x \Rightarrow A(x) = \alpha . x$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
or $A(\pi)$ est l'aire d'un triangle idéal, donc égale à π
$\Rightarrow A(\theta) = \theta$ cqfd ■

• <u>demo du thme</u> : On considère un (vrai) triangle ABC dans le modèle de Poincaré. On se donne A', B' et C' à l'infini, comme sur la figure. Alors : $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(A'B'C') - \mathcal{A}(A'AC') - \mathcal{A}(C'CB') - \mathcal{A}(B'BA')$

$$= \pi - A(\alpha) - A(\beta) - A(\gamma)$$
$$= \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$



cqfd ■

Corollaire : L'aire d'un polygône à n côtés est $(n-2)\pi - \Sigma$ angles

dem : procéder par récurrence sur le nombre de côtés ■

J.Ph. PRÉAUX '98