Classification des isométries

JPh. PRÉAUX '98

- Compactification de $\mathbb{H}^2$

On peut définir rigoureusement une notion de bord de $\mathbb{H}^2$, $\partial\mathbb{H}^2$ et le munir d'une topologie de façon naturelle. C'est à dire que $\partial\mathbb{H}^2$ corresponde au cercle frontière du modèle de Poincaré, ou à $\overline{\mathbb{R}}$ dans le modèle du $\frac{1}{2}$ plan supérieur.
Toute isométrie de $\mathbb{H}^2$ s'étend sur $\overline{\mathbb{H}^2} \overset{N}{=} \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2 \approx D^2$ de manière conforme.

- Toute isométrie de $\mathbb{H}^2$ s'étendant de façon naturelle en un automorphisme de $\overline{\mathbb{H}^2}$, avec le thme de Brouwer, toute isométrie a au moins un point fixe dans $\overline{\mathbb{H}^2}$.

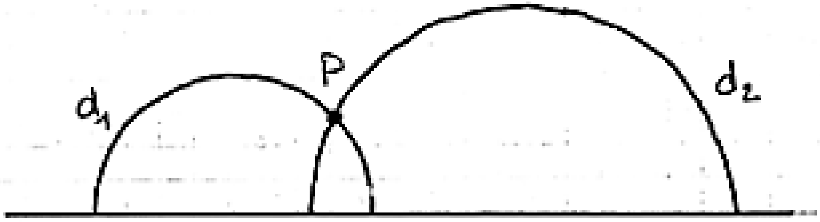
Toute isométrie non triviale, préservant l'orientation admet au plus 2 points fixes (Un elt de M^+ fixant 3 pts est l'identité.)
Considérons h, une isométrie $\in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, non triviale.
Si h fixe un point dans $\mathbb{H}^2$, alors h ne peut fixer aucun autre point de $\overline{\mathbb{H}^2}$. En effet, si c'était le cas, la géodésique (d) passant par les 2 points fixes serait fixée (pt par pt), ceci car tout point de cette géodésique est repéré par sa distance à P et par la composante de $(d) \setminus P$ le contenant. On a alors :

Théorème Déf$^{\underline{o}}$: Soit h un élément non trivial de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$
Alors :

- soit 1) h fixe un point de $\mathring{\mathbb{H}}^2$. Alors il ne fixe aucun autre point de $\overline{\mathbb{H}^2}$. h est dit <u>elliptique</u>
- soit 2) h fixe un unique point de $\partial\mathbb{H}^2$
h est dit <u>parabolique</u>
- soit 3) h fixe 2 points de $\partial\mathbb{H}^2$. h est dit <u>hyperbolique</u> (ou loxodromique)

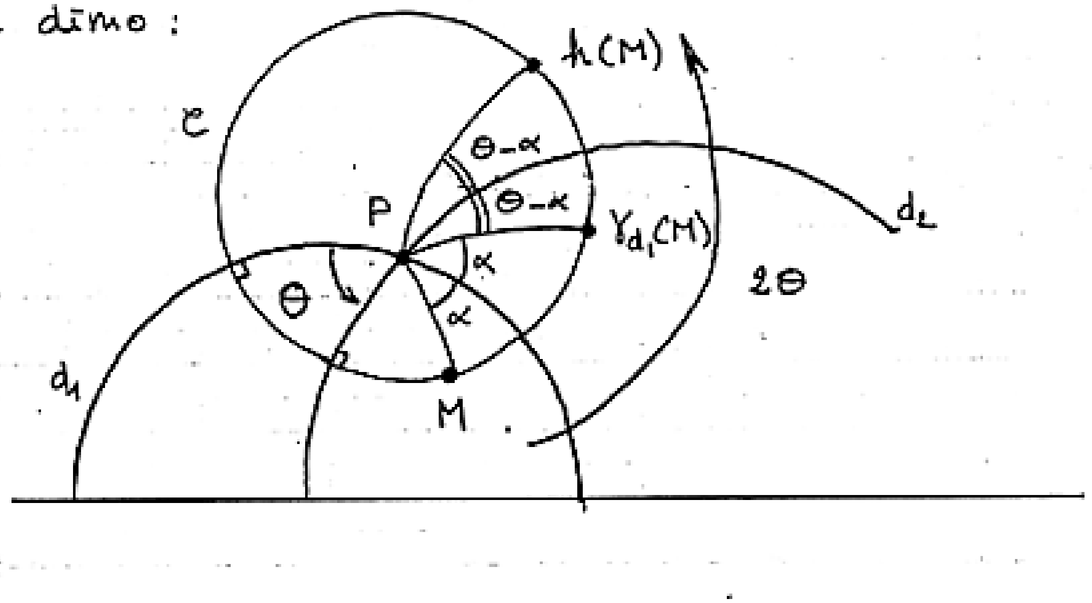
• Puisque toute isométrie de $\mathbb{H}^2$ est la composée de moins de 3 réflexions, et qu'une réflexion renverse l'orientation, tout élément de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ est le composé d'exact^{t} 2 réflexions par d_1 et d_2. Suivant que d_1 et d_2 soient sécantes, parallèles, ou ultraparallèles, on a les cas suivants pour $h = \gamma_{d_2} \circ \gamma_{d_1}$. Dans le modèle du $\frac{1}{2}$ plan sup. :

• a) <u>d_1 et d_2 sont sécantes</u>

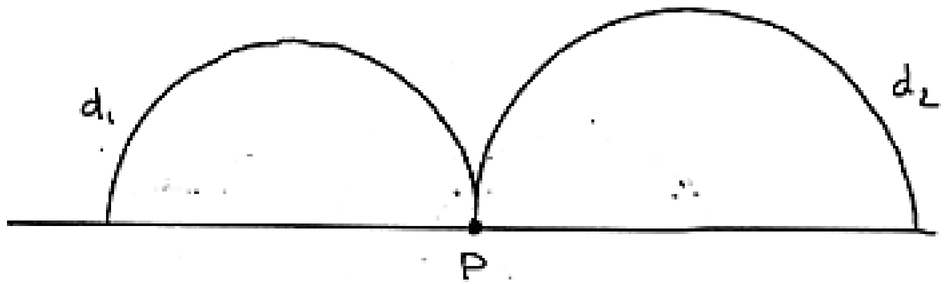


Alors $h = \gamma_{d_2} \circ \gamma_{d_1}$ fixe $P = d_1 \cap d_2$ (et donc que P !), <u>h est elliptique</u>

Remarquons que h préserve tout cercle hyperbolique $\mathcal{C}$, centré en P. En effet $\mathcal{C}$ est alors orthogonal à d_1 et à d_2, γ_{d_1} et γ_{d_2} préservent alors $\mathcal{C}$, et donc h préserve $\mathcal{C}$. On peut alors vérifier que h est une <u>rotation au sens hyperbolique</u>, de centre P et d'angle 2θ, où θ est l'angle orienté entre d_1 et d_2. La figure suivante illustre la démo :



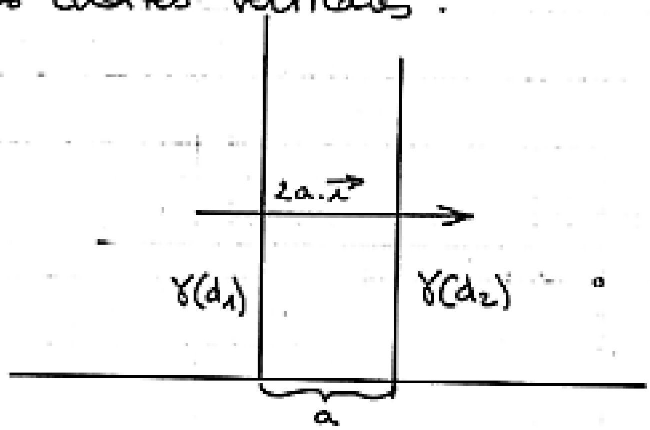
• b) <u>Si d_1 et d_2 sont parallèles</u> (i.e s'intersectent sur $\partial\mathbb{H}^2$)



Alors $h = \gamma_{d_2} \circ \gamma_{d_1}$ fixe P sur $\partial\mathbb{H}^2$. On va montrer que c'est l'unique.

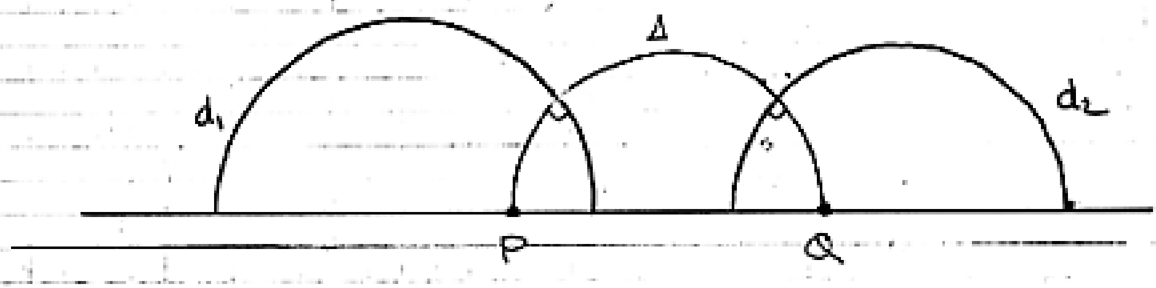
• Remarquons que si γ_C est une reflexion, et g une isométrie, le conjugué de γ_C par g, $g\gamma_C g^{-1}$ est une reflexion par g(C). En effet c'est un elt renversant l'orientation, qui fixe point par point la droite g(C). De plus la conjugaison par une isométrie préserve les props d'être ell., par., hyp. .

Si l'on considère une droite "centrée en P", et γ l'inversion dans cette droite, $\gamma . h . \gamma^{-1}$ est la composée de deux reflex. par des droites verticales.



C'est alors une "translation euclidienne horizontale" de vecteur $2a.\vec{\imath}$
L'unique point fixé est ∞. P est donc l'unique point fixé par h $\Rightarrow$ h est une <u>isométrie parabolique</u>. et en <u>conjugant h par une isométrie envoyant P sur l'∞, on obtient une translation euclidienne horizontale</u>

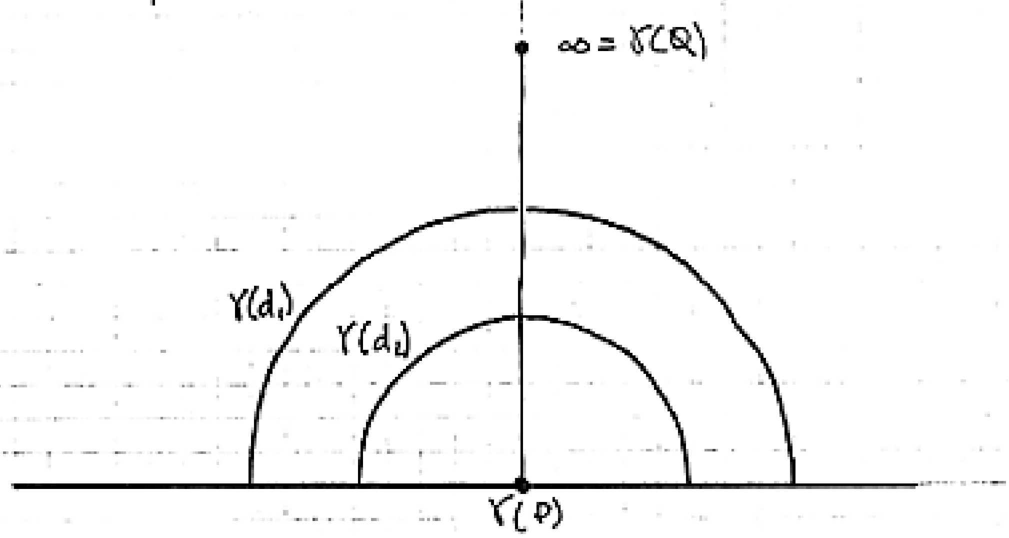
• c) si d_1 et d_2 sont ultraparallèles (ne s'intersectent pas sur $\mathbb{H}^2$



Alors il existe une et une seule droite Δ orthogonale à d_1 et à d_2 (la démo est similaire au thm sur la somme des angles d'un triangle. Remarquer que cette droite n'existe pas dans les cas a) et b)). Alors P et Q, les points finaux de Δ sont fixés et Δ est préservé (Δ est appelé axe de l'isométrie. Remarquer que Δ n'est pas fixé p^t par p^t.)

$\Rightarrow$ h est une isométrie hyperbolique.

Si l'on considère une droite "centrée en Q" et γ l'inversion dans cette droite. γ envoie (PQ) sur une droite "verticale", et d_1 et d_2 sur des droites orthogonales à (PQ). Et donc γ conjugue h en la composée de 2 inversions par des cercles concentriques, i.e une homothétie euclidienne.



$\Rightarrow$ remarquer que h agit par translations hyperboliques sur son a

• Analytiquement :

On considère $\varphi : \mathcal{I}som^+(\mathbb{H}^2) \longrightarrow PSL_2\mathbb{R}$

> **Proposition** : Soit $h \in \mathcal{I}som^+(\mathbb{H}^2)$
> - h est elliptique ssi $|tr(\varphi(h))| < 2$
> - h est parabolique ssi $|tr(\varphi(h))| = 2$
> - h est hyperbolique ssi $|tr(\varphi(h))| > 2$

dem : h donné ; $h : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad a;b;c;d \in \mathbb{R}$, $ad-bc=1$

$(*)$: $h(z)=z \iff cz^2+(d-a)z-b=0$

$\Delta = (a+d)^2-4 = tr(\varphi(h))^2-4$

- h est elliptique ssi $(*)$ a 2 solutions complexes
  i.e $\iff |a+d|<2 \iff |tr(\varphi(h))|<2$
- h est parabolique ssi : - on a une ! solution réelle, i.e ssi $|a+d|=2$ i.e $|tr(\varphi(h))|=2$
  - ou si $h(\infty)=\infty$ (i.e $c=0$) et $az+b=dz$ n'a pas de solution, i.e $a=d$, et alors puisque $ad=1$
  $\Rightarrow |tr\,\varphi(h)|=2$

  (si de surcroît $b=0$, φ est l'identité)

- h est hyperbolique ssi - on a 2 solutions réelles
  $\iff |tr\,\varphi(h)|>2$
  - ou si $h(\infty)=\infty$ (i.e $c=0$) et $az+b=dz$ a une unique solution. Alors $a\neq d$ et $ad=1$.
  $\Rightarrow a+d = \frac{a^2+1}{a}$

  et $\frac{a^2+1}{a}$ atteint sa valeur minimale 2, par $a=1$ (et $d=1$)

  donc si $a\neq d$ et $ad=1$ $\quad a+d>2$ $\quad$ cqfd ■

• Maintenant, donnée une isométrie renversant l'orientation, il induit un automorphisme de $S^1 = \partial \mathbb{H}^2$ renversant l'orien, et fixe donc 2 points sur $\partial \mathbb{H}^2$.
La droite passant par ces 2 points est préservée.
Si l'on compose par l'inversion dans cette droite, on obtient une isométrie préservant l'orientation, fixant 2 points sur $\partial \mathbb{H}^2$, et donc toute isométrie renversant l'orientation est soit une réflexion, soit une "glide reflection", i.e la composée d'une isométrie hyperbolique, et d'une réflexion // par l'axe

---

Proposition : Deux éléments non triviaux de $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ commutent ssi ils ont même points fixes (dans $\overline{\mathbb{H}^2}$)

---

demo : $\Rightarrow$ donnés $\alpha, \beta \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ qui commutent
$\beta \alpha \beta^{-1} = \alpha$
et p est un point fixe de α ssi $\beta(p)$ est un point fixe de $\beta \alpha \beta^{-1}$.
$\Rightarrow$ si ils commutent $\beta(p) = p$ pour tout point fixe

$\Leftarrow$ – Pour 2 élts paraboliques :
Si ils ont même points fixes, la conjugaison par un même élément les envoie sur 2 translations horizontales, qui commutent $\Rightarrow$ ils commutent (α et α' commutent ssi $\beta \alpha \beta^{-1}$ et $\beta \alpha' \beta^{-1}$ commutent)
– Pour 2 élts elliptiques :
Si ils ont même point fixe P, ce sont 2 rotations de centre P, qui commutent alors.
– Pour 2 élts hyperboliques :
Si ils ont même points fixes, une conjugaison par un même élt les envoie sur 2 homothéties de même centre, qui commutent donc, et donc ils commutent ≡

Corollaire : Soit $\alpha \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$. $Z(\alpha)$ son centralisateur dans $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$.

- Si α est elliptique, $Z(\alpha) \approx S^1$.
- sinon $Z(\alpha) \approx \mathbb{R}$

Corollaire : Un sous-groupe discret de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ ne contient pas $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

<u>démo</u>: Les sous-gps discrets de S^1 sont $\mathbb{Z}_n$

" " $\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$ —