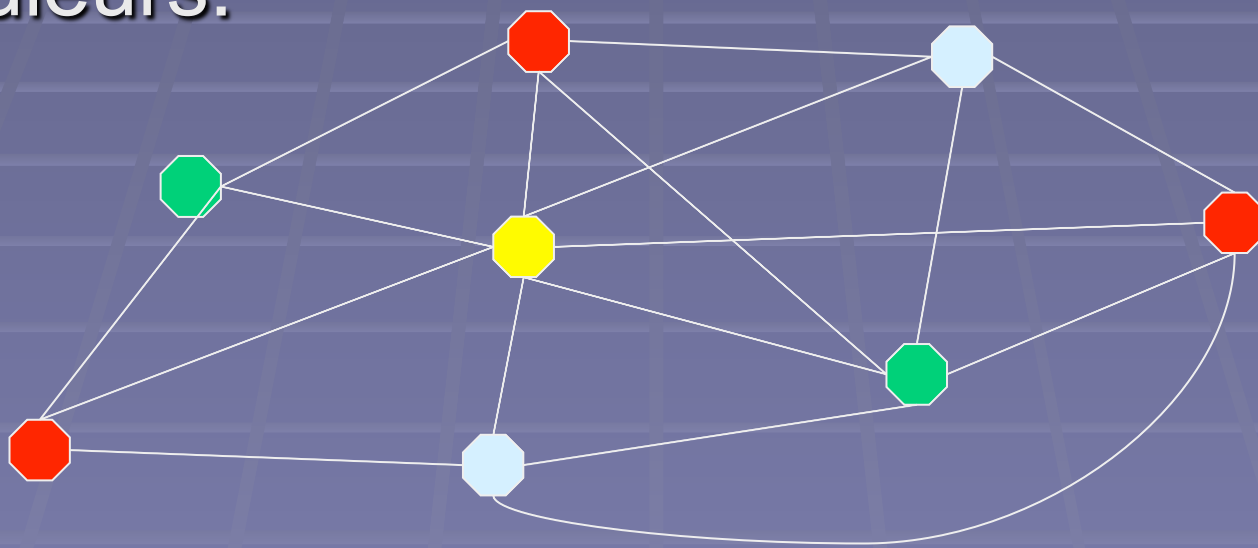
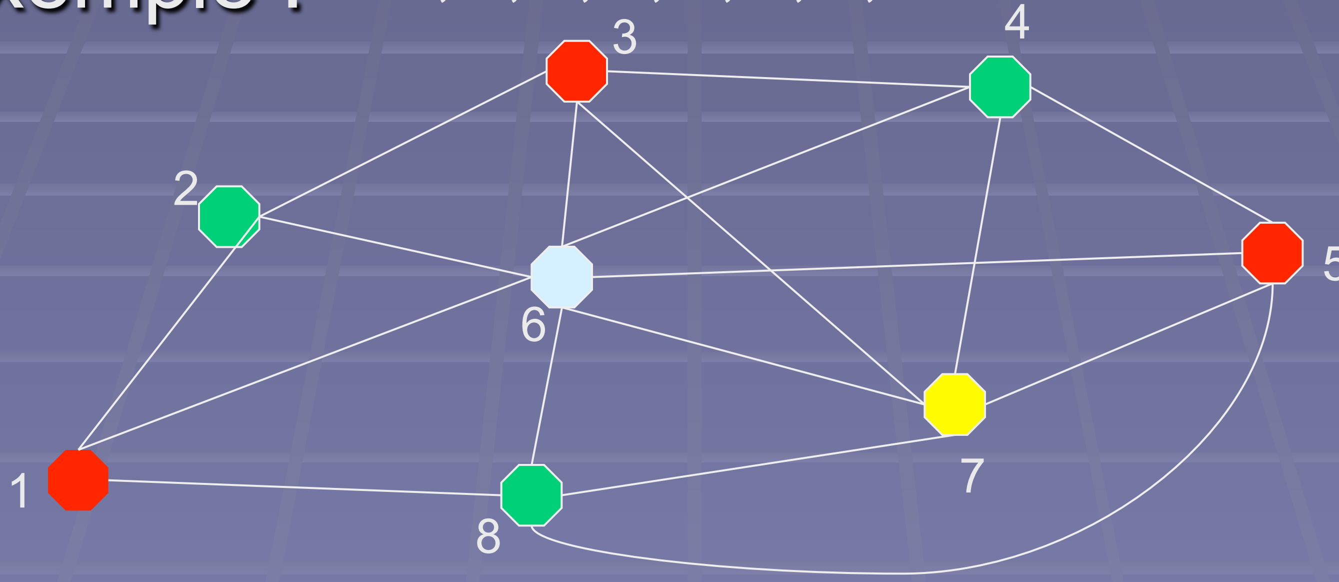
Heuristiques séquentielles pour la coloration de graphes

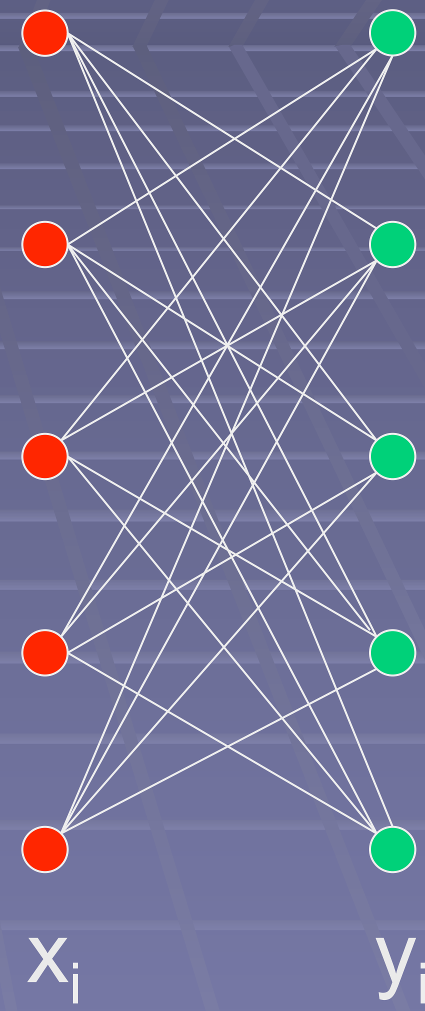
- Problème : Dans un graphe non orienté, colorier chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents soient de couleur différente, avec un nombre minimal de couleurs.



- **Heuristique séquentielle :**
  - Se donner n couleurs indicées 1,2,..,n.
  - Ordonner les sommets : $S_1, S_2, \ldots, S_n$.
  - Colorier successivement les sommets par la plus petite couleur non utilisée par ses voisins.
- C'est l'heuristique First Fit Sequential (FFS)
- Exemple : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

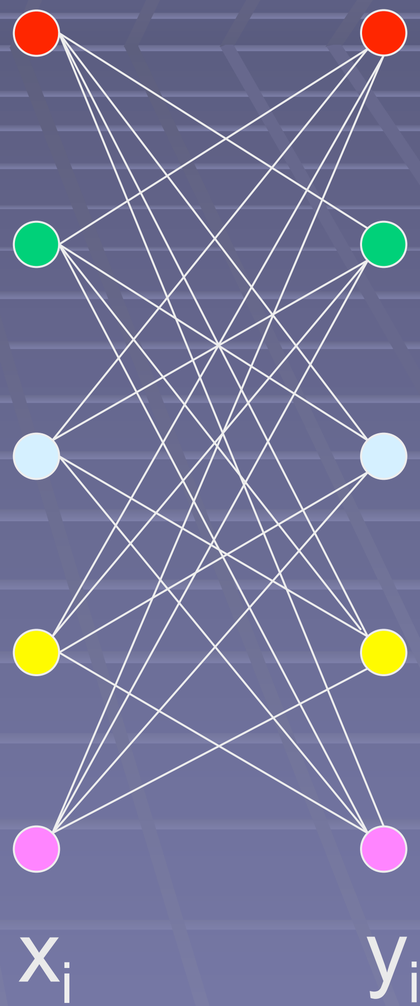


- Cette heuristique peut être très mauvaise :
  - Soit G un graphe biparti de sommets $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$, et d'arêtes $[x_a,y_b]$ où $a \neq b$.
  - Avec l'ordre $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ l'heuristique trouve l'optimum



- Cette heuristique peut être très mauvaise :

- Soit G un graphe biparti de sommets $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$, et d'arêtes $[x_a,y_b]$ où $a \neq b$.
- Avec l'ordre $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ l'heuristique trouve l'optimum
- Avec l'ordre $x_1,y_1,\dots,x_n,y_n$ elle utilise n/2 couleurs
- Soit une PRP d'au moins n/4.



- **Cette heuristique a cependant 2 propriétés intéressantes :**

  Soit d_{max} le degré maximal d'un sommet

- **Elle utilise au plus d_{max}+1 couleurs.**

  En effet il faut une couleur pour le premier sommet, puis chaque sommet aura au plus d_{max} voisins.

- **Il existe un ordre sur les sommets pour lequel elle trouve l'optimum.**

  En effet soit une coloration optimale. Ordonner les sommets en regroupant ceux de même couleur.

  Cependant il y a n! ordre possibles...

Construction de bons ordres pour les heuristiques séquentielles I

- Notons $B_1=d_{max}+1$ et ordonnons les sommets par $S_1,S_2,\ldots,S_n$. Notons d_i le degré de S_i.
- S_i admet une couleur $\leq i$ et $\leq d_i+1$. Donc au plus min $\{i,d_i+1\}$.
- Il faut donc au plus $B_2=\max_i \{\min \{i,d_i+1\}\}$ couleurs.
- B_2 dépend de l'ordre considéré.
- $B_2 \leq B_1$, et $B_2=B_1$ si le sommet de plus grand degré d_{max} est coloré en dernier.
- <u>L'heuristique Largest First Sequential (LFS)</u> consiste à ordonner les sommets dans l'ordre décroissant des degrés.
- On montre que cet ordre minimise B_2 pour tout graphe.

Construction de bons ordres pour les heuristiques séquentielles II

- Notons D_i le degré de S_i dans le sous-graphe engendré par $S_1, S_2, ..., S_i$.
- La couleur de S_i est au plus $1+D_i$. Il faut donc au plus $B_3=1+\max_i\{D_i\}$ couleurs. (B_3 dépend de l'ordre.)
- $B_3 \leq B_2$ (car $D_i \leq d_i$ et $D_i \leq i-1$).
- <u>Heuristique Smallest Last Sequential (SLS)</u> :
- Ordre :

  - S_n est le sommet de degré minimal.

  - Pour $i = n-1, n-2, ..., 1$, S_i est le sommet de degré minimal dans le sous-graphe obtenu en supprimant $S_{i+1}, ..., S_n$ (et leurs arêtes incidentes).
- On montre que SLS minimise B_3 sur tout graphe.
- SLS colore tout graphe planaire en au plus 6 couleurs (optimum ≤ 4)

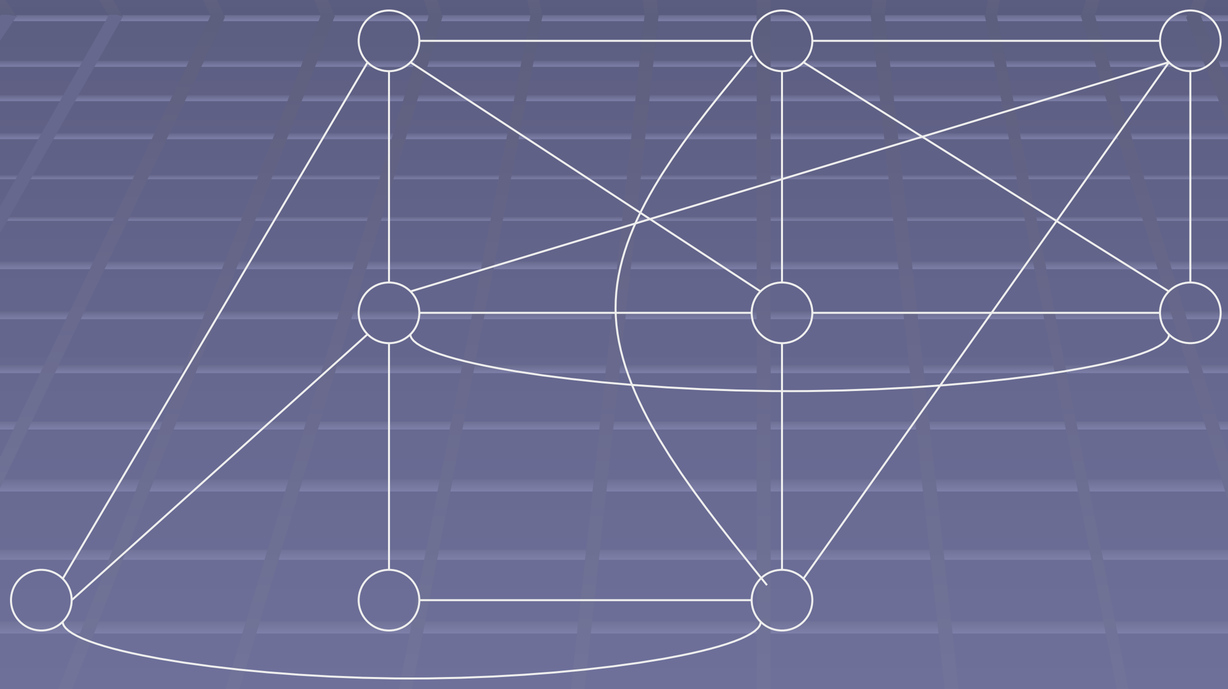
Construction de bons ordres pour les heuristiques séquentielles III

- <u>L'heuristique Degré de Saturation (DS)</u> construit un ordre dynamiquement :
- A l'itération i le degré de saturation d'un sommet S, $DS_i(S)$ est le nombre de couleurs deja utilisées par les voisins de S.
- Colorer le sommet de degré maximal avec la couleur 1.
- Aux étapes suivantes prendre le sommet libre de DS maximal (si plusieurs prendre parmi eux celui de degré maximal) et le colorer avec la plus petite couleur possible.
- Le nombre de couleur utilisées est au plus :

$$B_4=1+\max\{DS(S_i),\ 1\leq i\leq n\}.$$

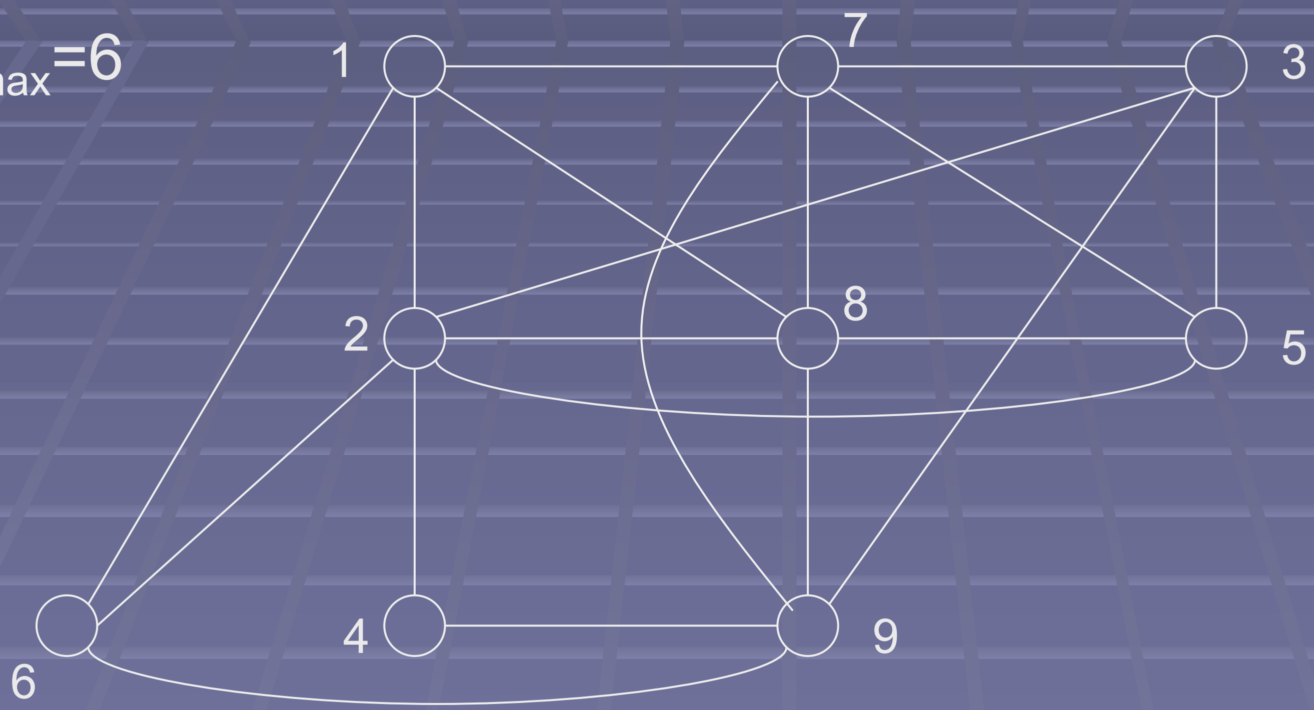
- $B_4 \leq B_3 \leq B_2 \leq B_1$.
- L'heuristique DS est très bonne en moyenne.
- Toutes ces Heuristiques sont de complexité linéaire et de PRP d'ordre O(n). La meilleure connue (Johnson) a PRP n/log n.
- On ne connaît pas de bonne heuristique pour la coloration.

- Exemple :



- Exemple : FFS

$d_{max}=6$

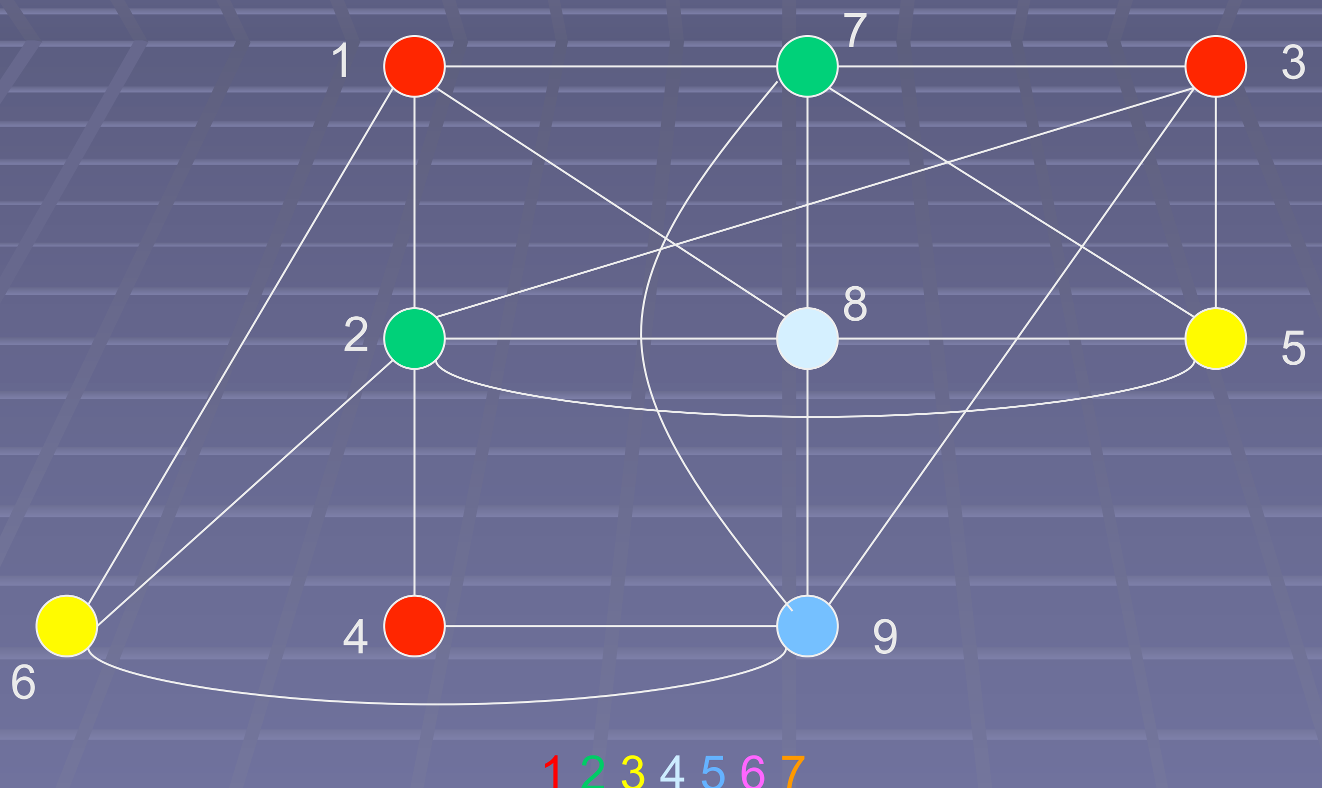


1 2 3 4 5 6 7

B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS

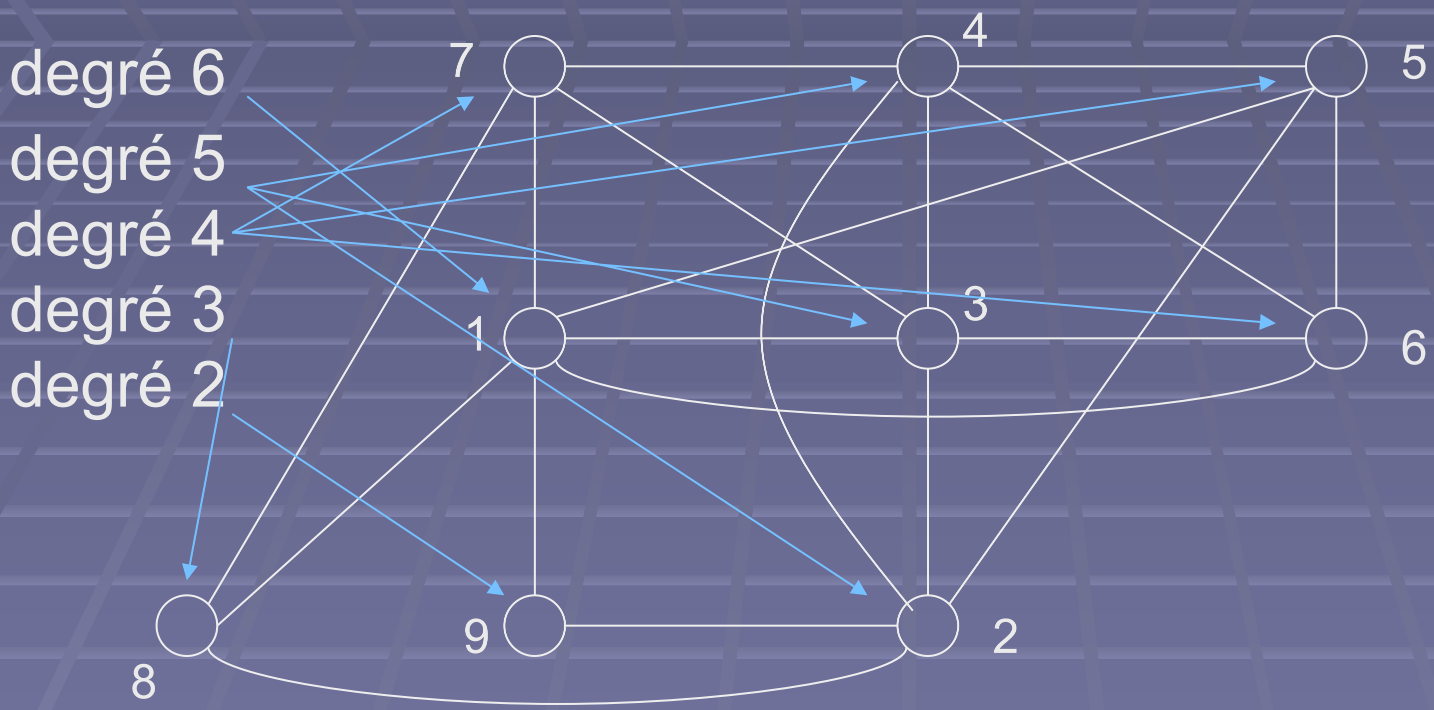
- Exemple : FFS



B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS
5			

- Exemple : LFS



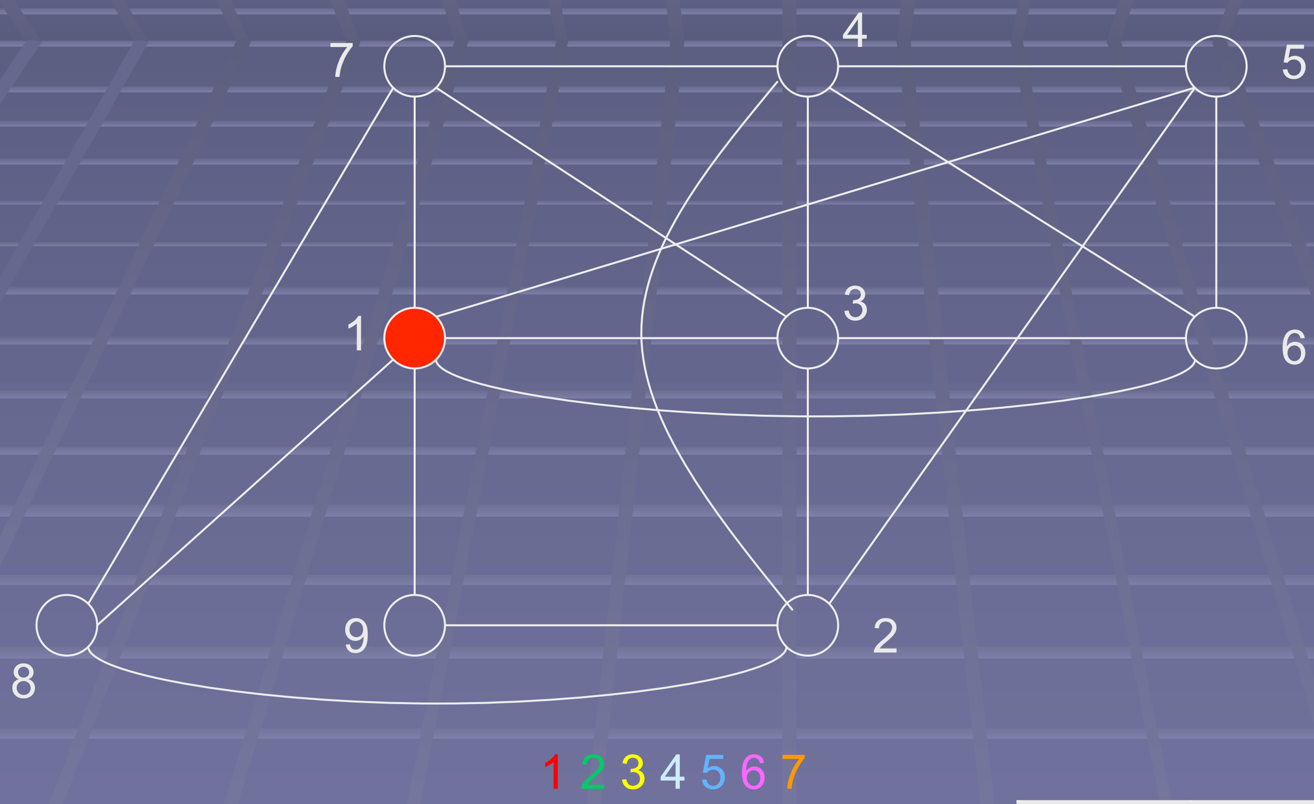
1 2 3 4 5 6 7

B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS
5			

- Exemple : LFS

Calcul de B_2 : $\min(1,1+d_1)=1$
max=1

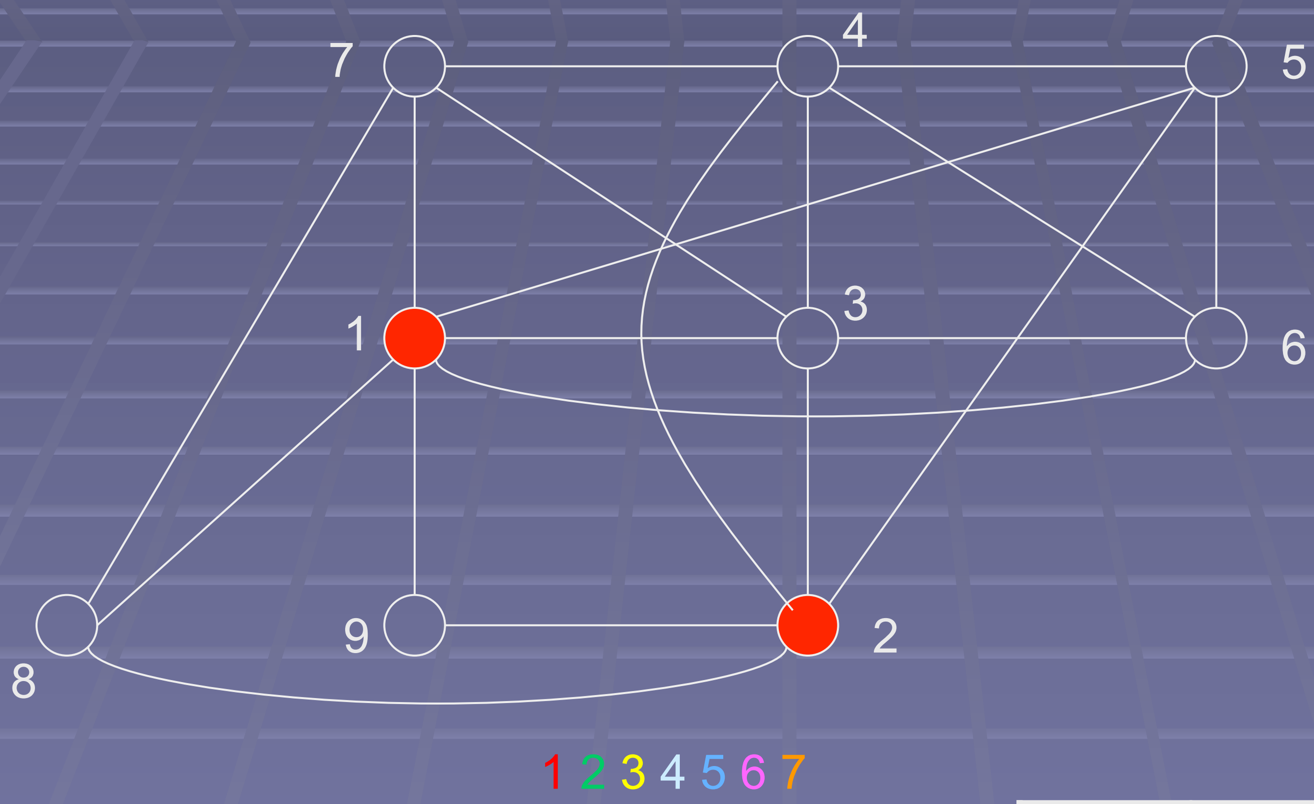


B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS
5			

- Exemple : LFS

Calcul de B_2 : $\min(2,1+d_2)=2$
max=2

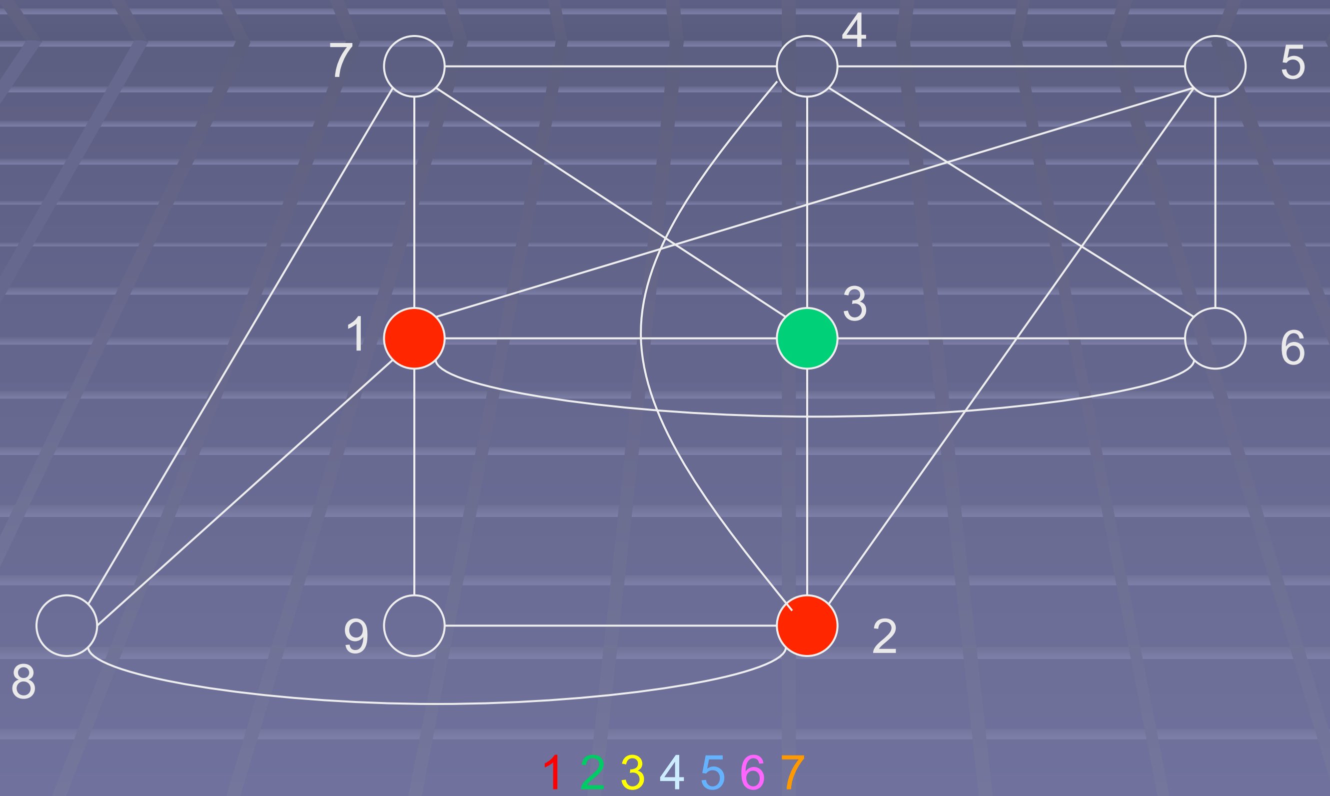


B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS
5			

- Exemple : LFS

Calcul de B_2 : $\min(3,1+d_3)=3$
max=3



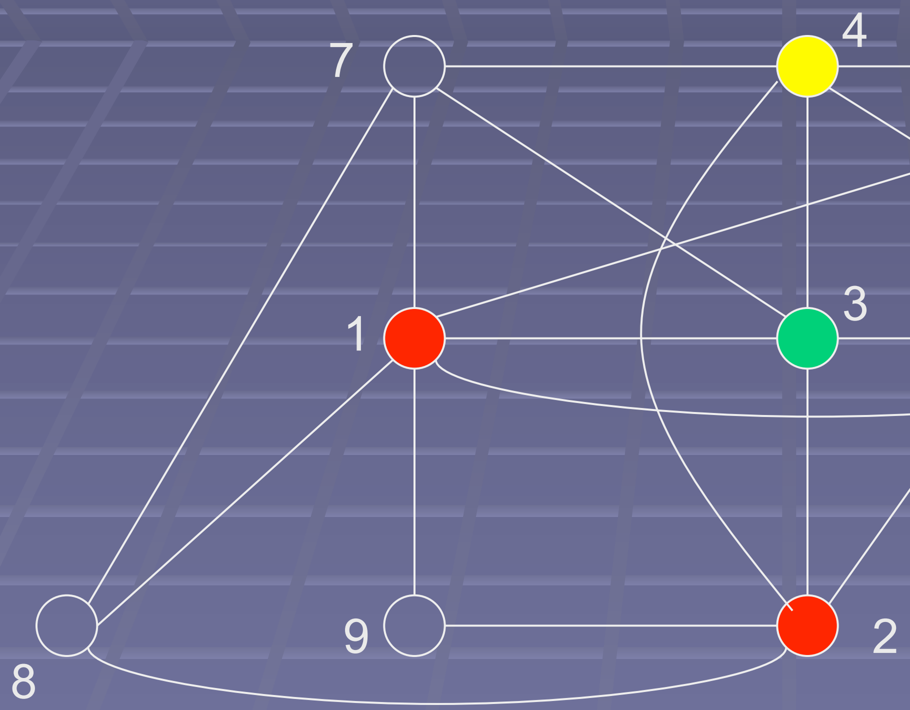
B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS
5			

- Exemple : LFS

Calcul de B_2 : $\min(4, 1+d_4)=4$

max=4



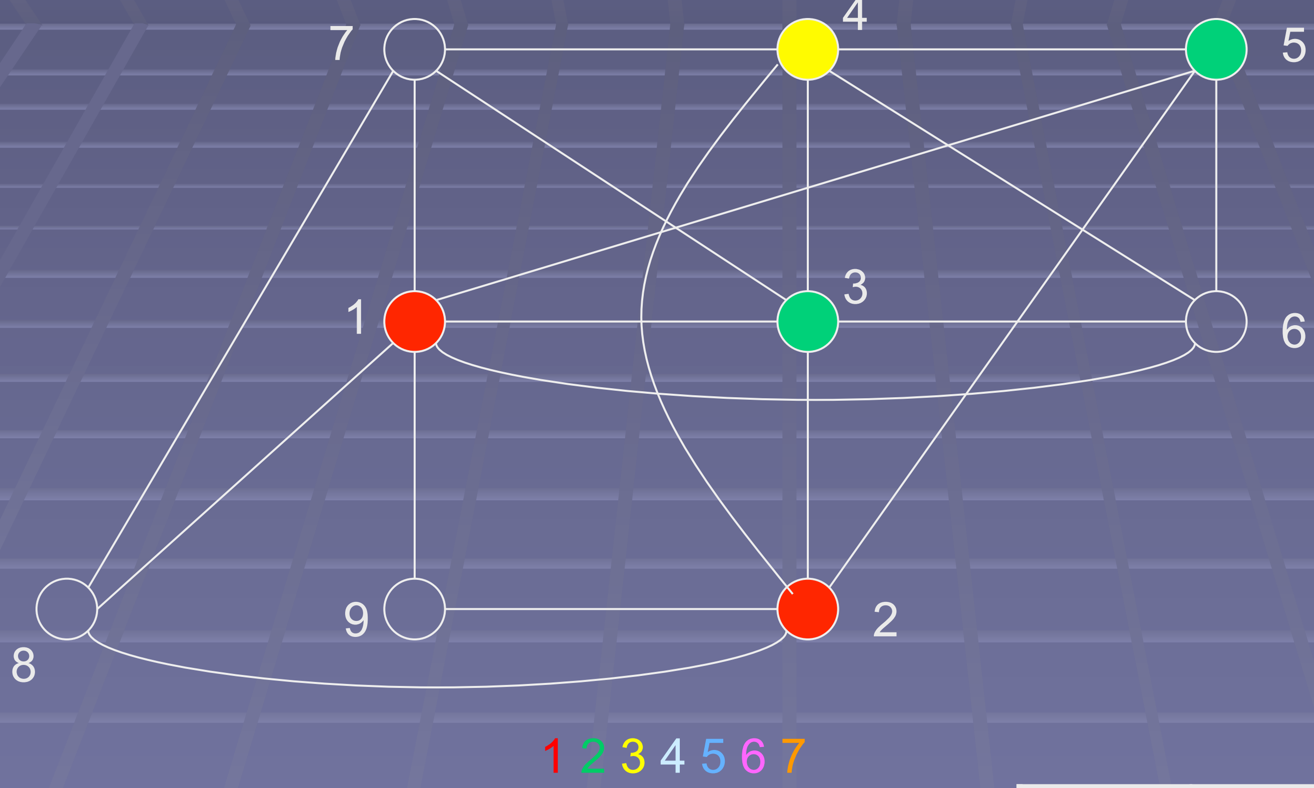
1 2 3 4 5 6 7

B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS
5			

- Exemple : LFS

Calcul de B_2 : $\min(5,1+d_5)=5$
max=5

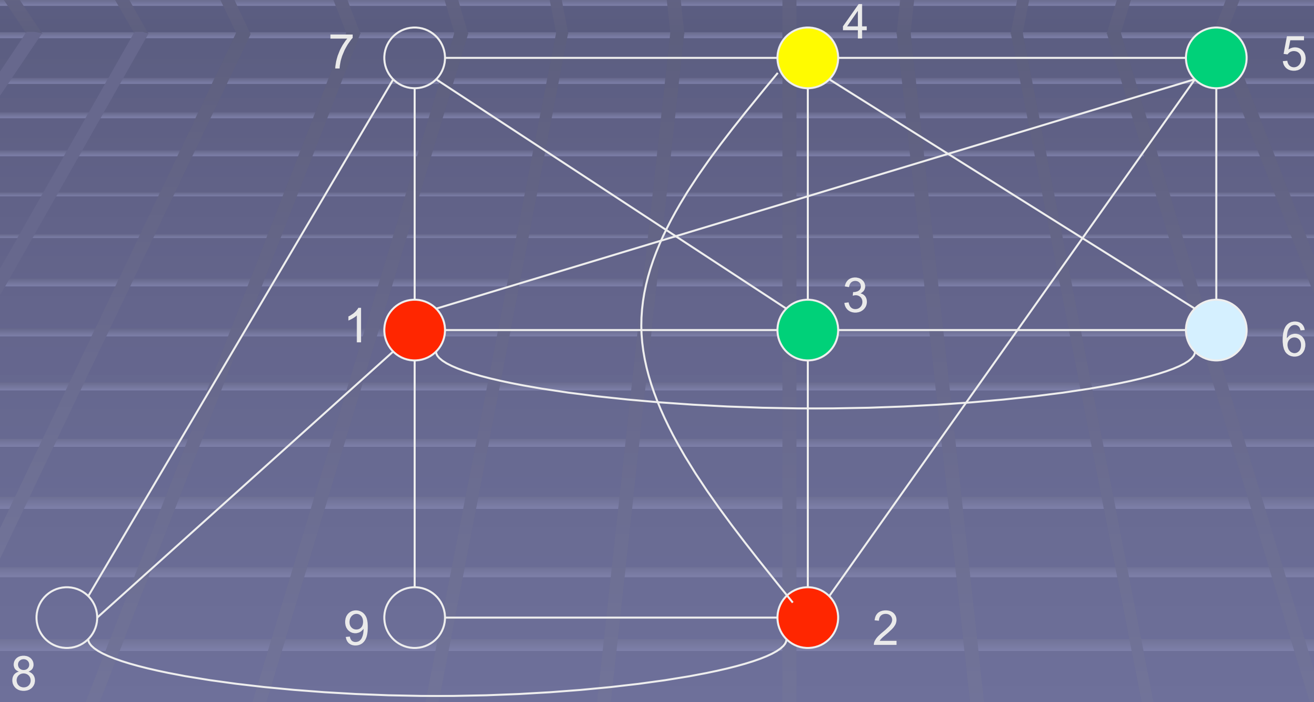


B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS
5			

- Exemple : LFS

Calcul de B_2 : $\min(6,1+d_6)=5$
max=5



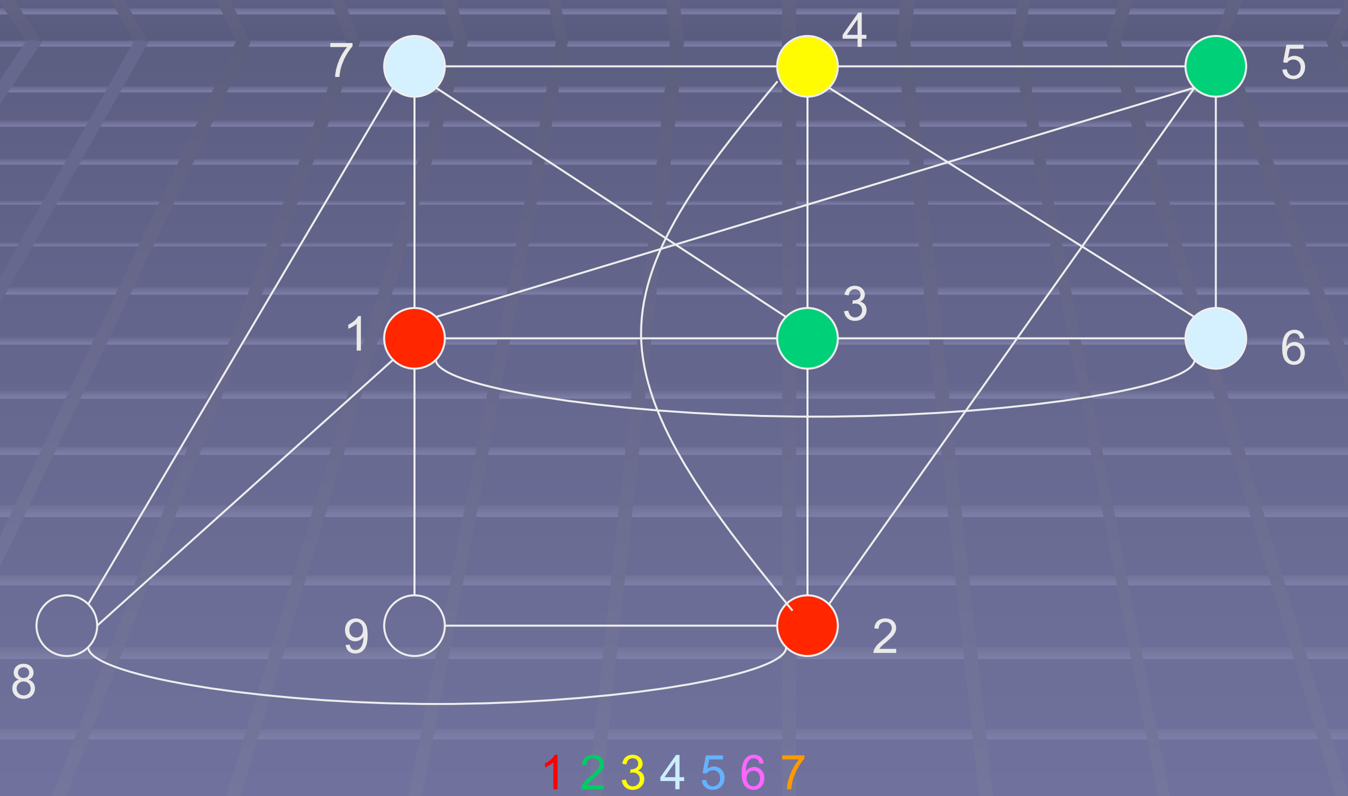
1 2 3 4 5 6 7

B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS
5			

- Exemple : LFS

Calcul de B_2 : $\min(7,1+d_7)=5$
max=5

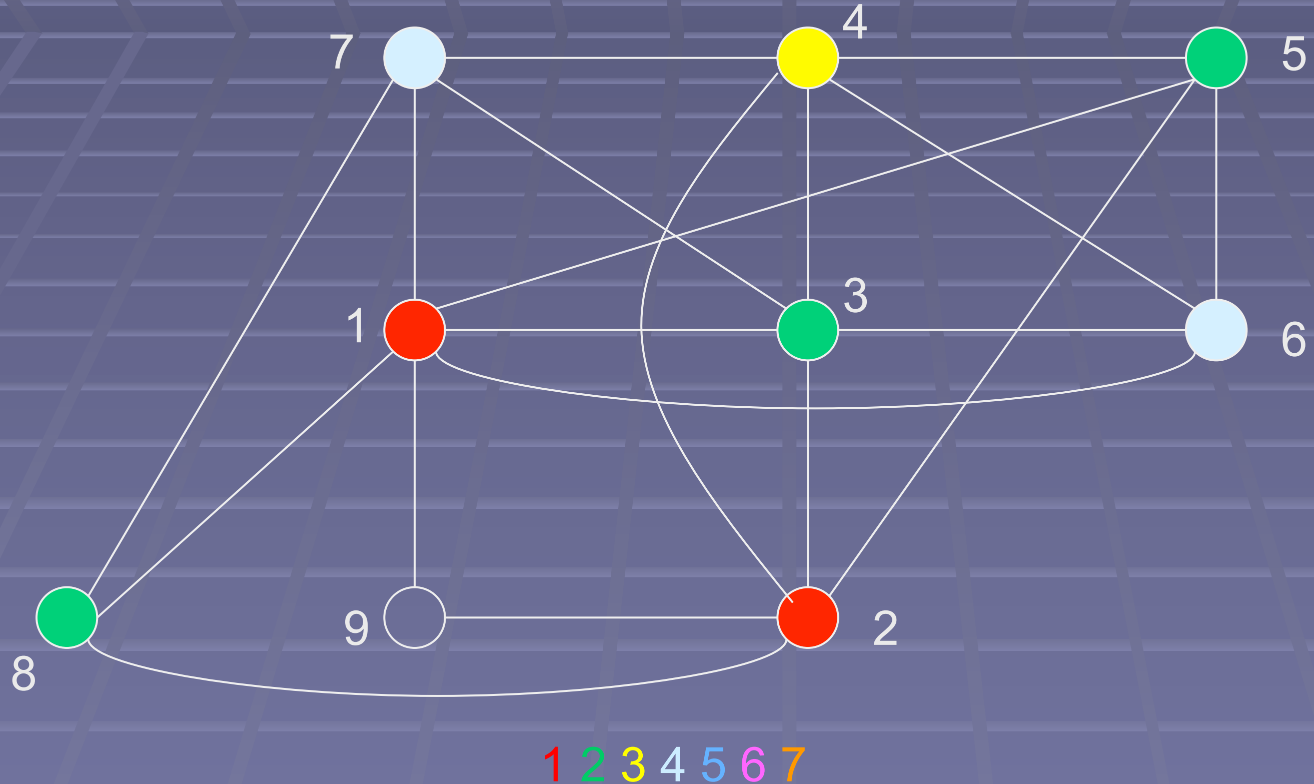


B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS
5			

- Exemple : LFS

Calcul de B_2 : $\min(8,1+d_8)=4$
max=5

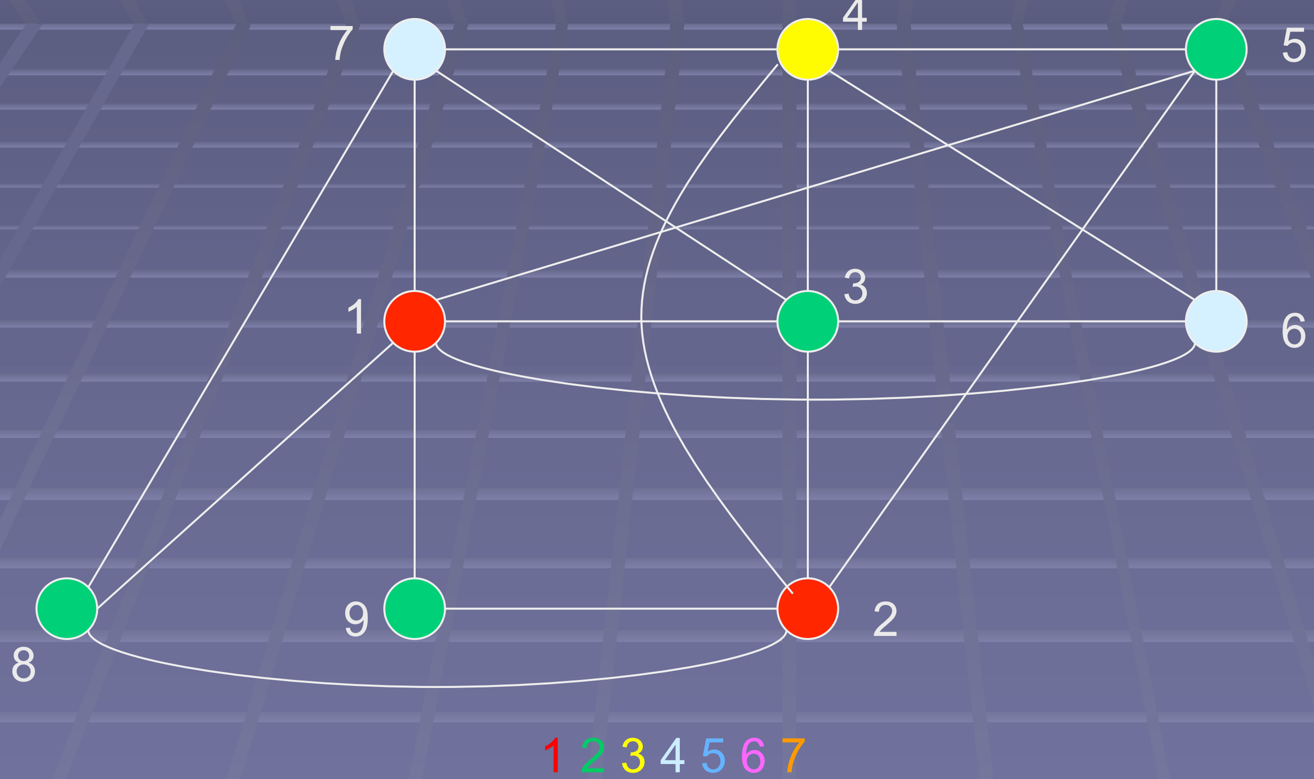


B_1	B_2	B_3	B_4
7			

FFS	LFS	SLS	DS
5			

- Exemple : LFS

Calcul de B_2 : $\min(9,1+d_9)=3$
max=5



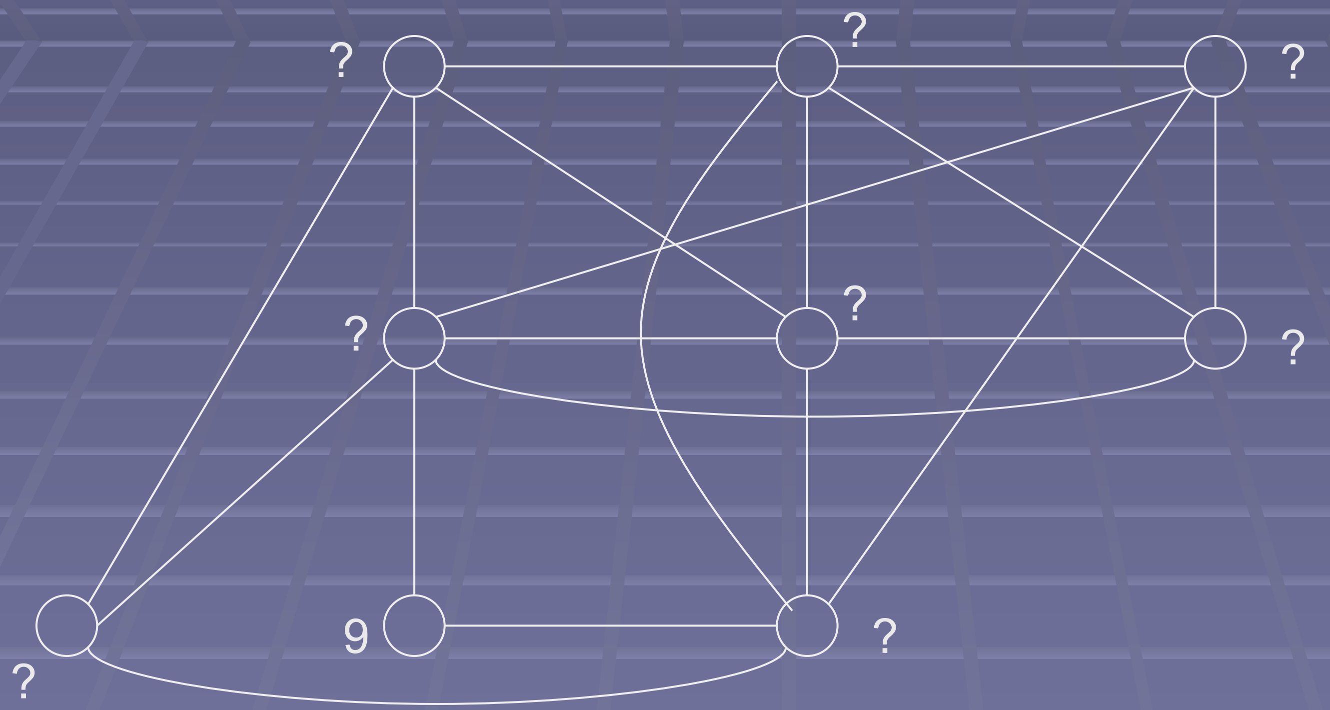
B_1	B_2	B_3	B_4
7	5		

FFS	LFS	SLS	DS
5	4		

▪ Exemple : SLS

Calcul de B_3 : $1+D_9=3$

max=3



1 2 3 4 5 6 7

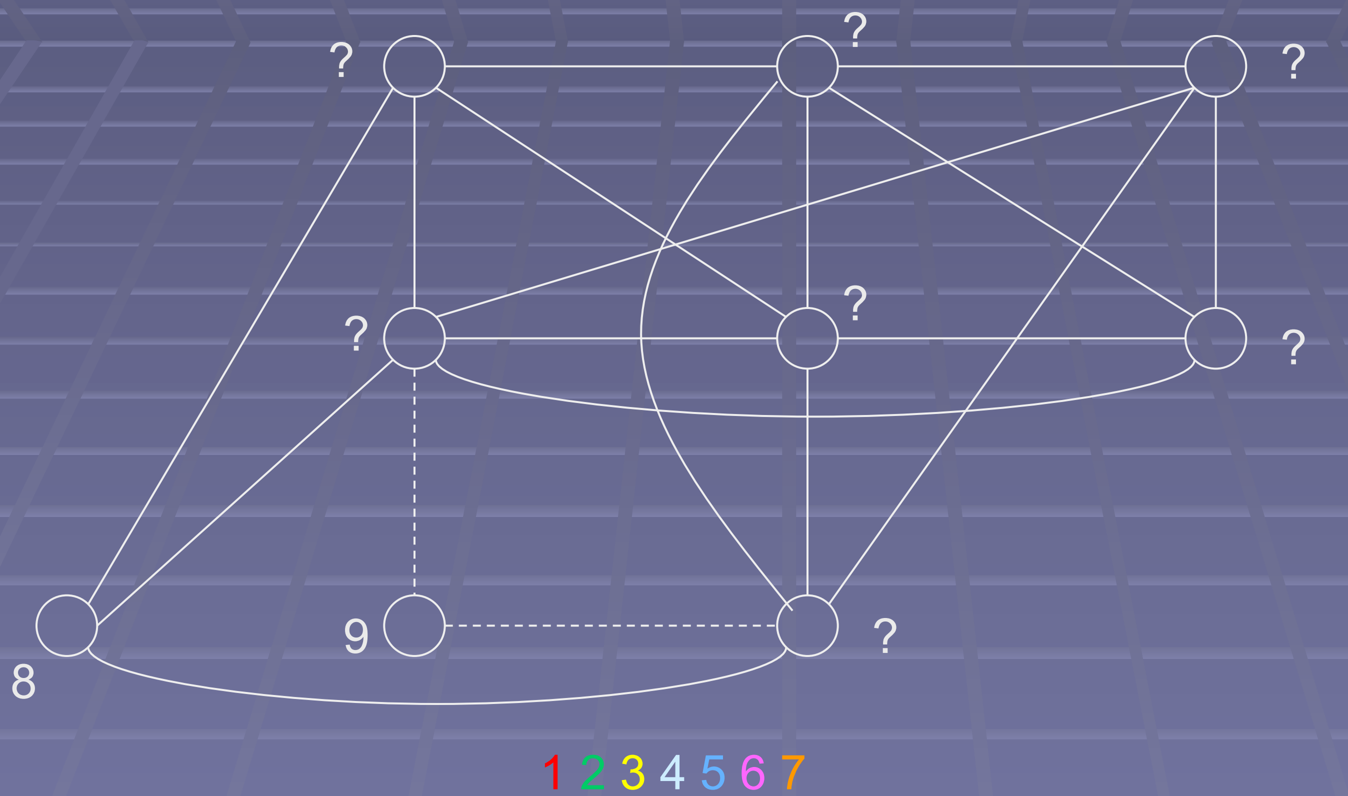
B_1	B_2	B_3	B_4
7	5		

FFS	LFS	SLS	DS
5	4		

- Exemple : SLS

Calcul de B_3 :

$1+D_8=4$
max=4

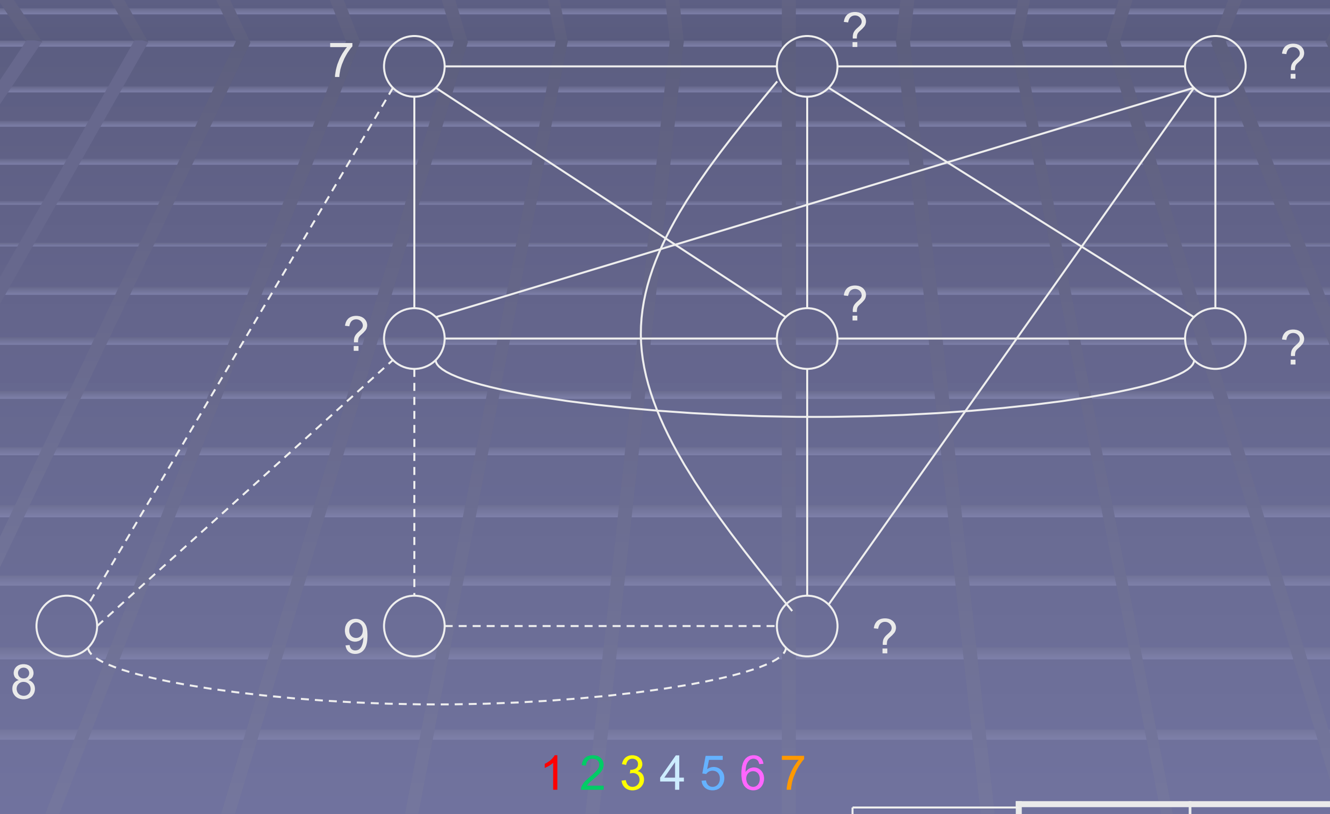


B_1	B_2	B_3	B_4
7	5		

FFS	LFS	SLS	DS
5	4		

- Exemple : SLS

Calcul de B_3 : $1+D_7=4$
max=4



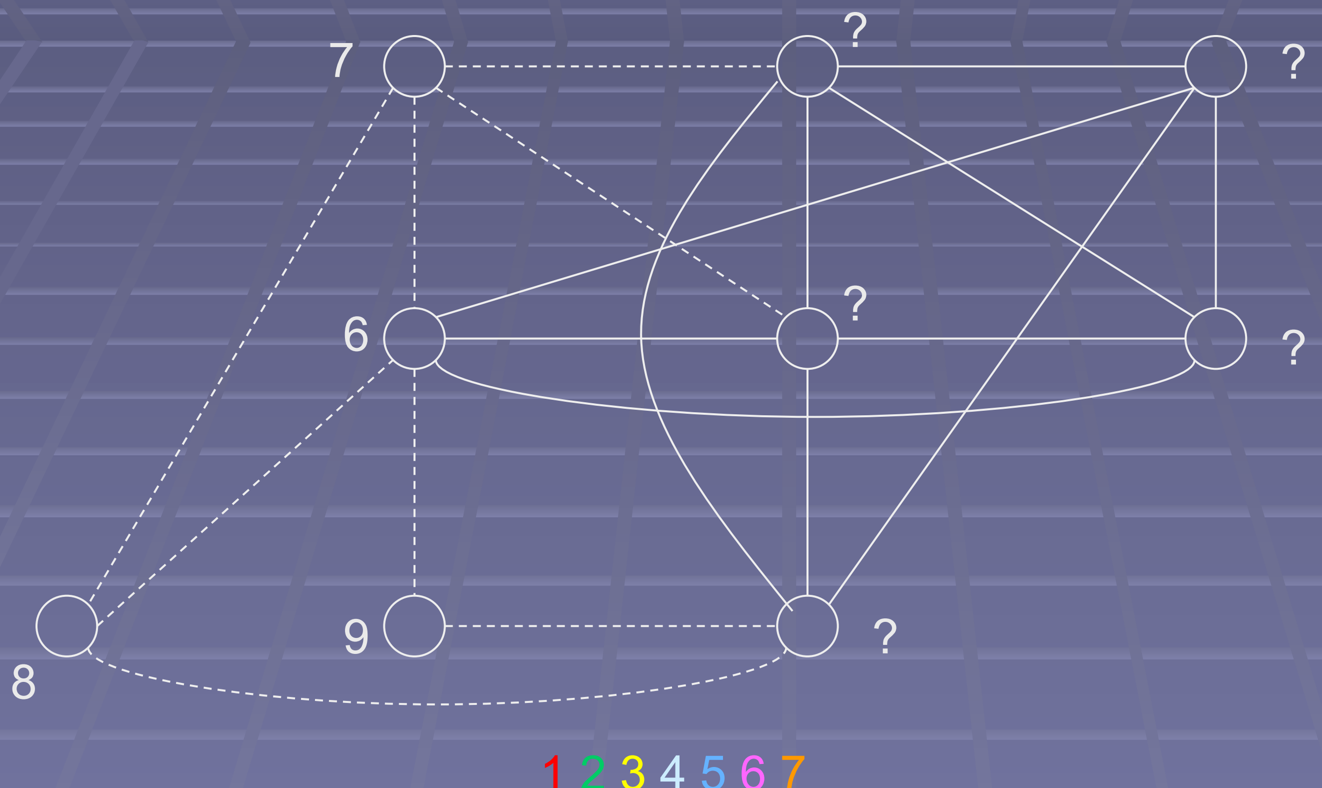
B_1	B_2	B_3	B_4
7	5		

FFS	LFS	SLS	DS
5	4		

- Exemple : SLS

Calcul de B_3 :

$1+D_6=4$
max=4



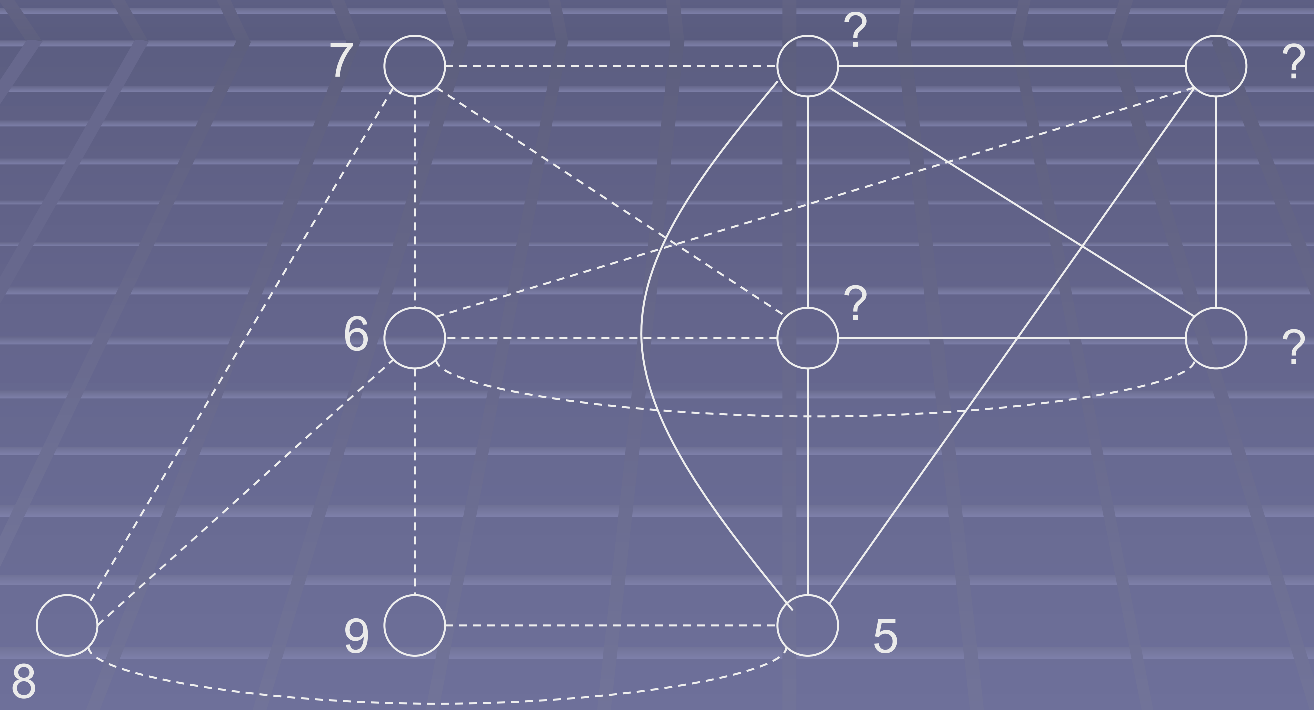
B_1	B_2	B_3	B_4
7	5		

FFS	LFS	SLS	DS
5	4		

- Exemple : SLS

Calcul de B_3 : $1+D_5=4$

max=4



B_1	B_2	B_3	B_4
7	5		

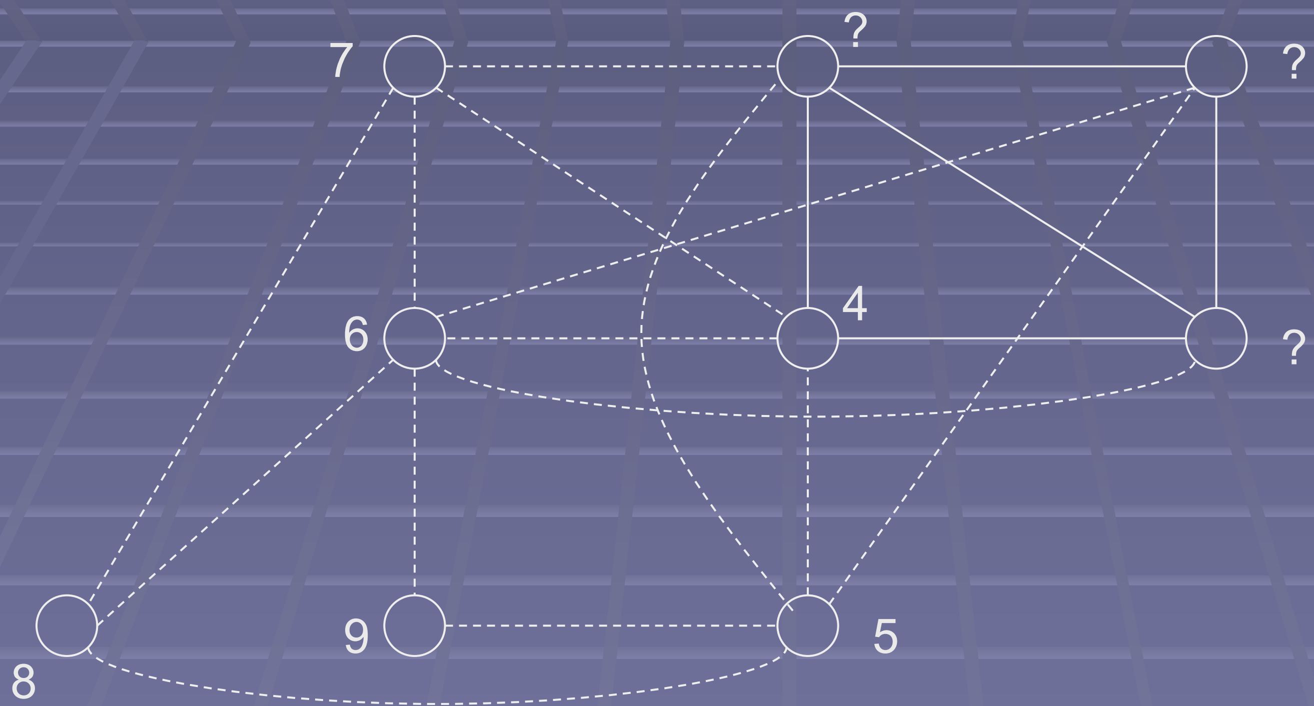
FFS	LFS	SLS	DS
5	4		

- Exemple : SLS

Calcul de B_3 :

$1+D_4=3$

max=4



1 2 3 4 5 6 7

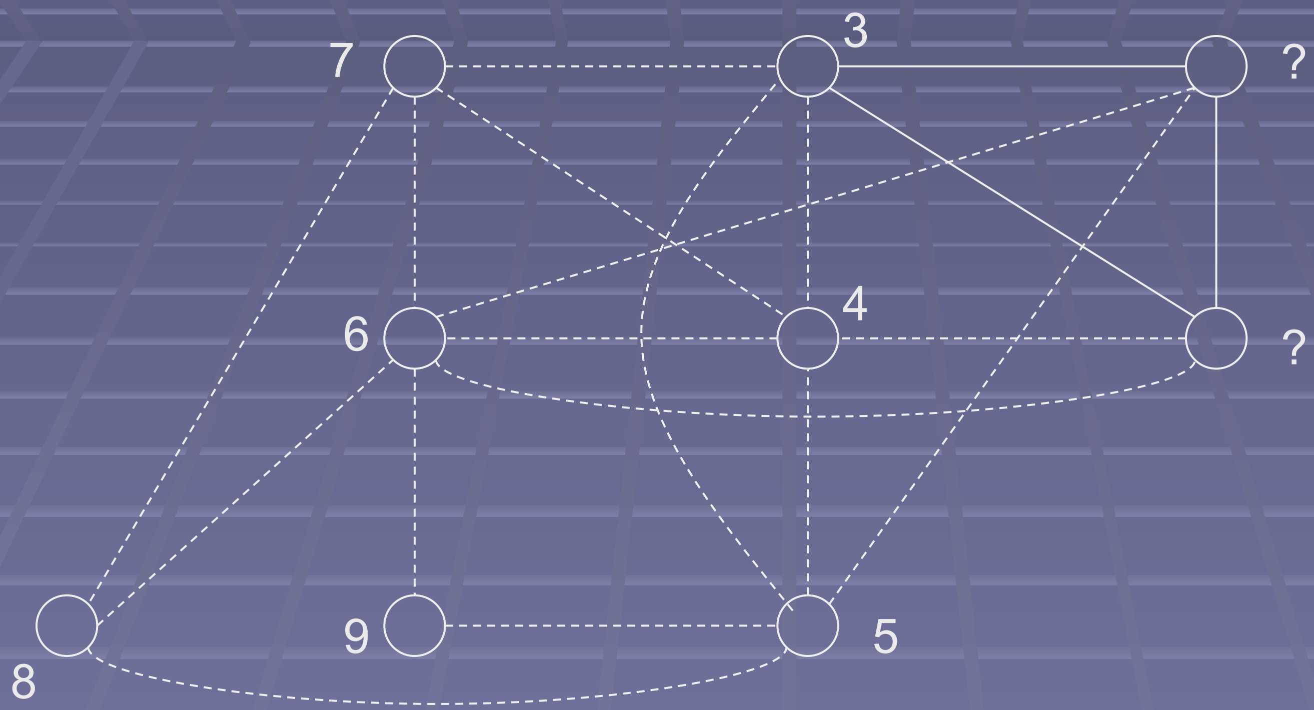
B_1	B_2	B_3	B_4
7	5		

FFS	LFS	SLS	DS
5	4		

Exemple : SLS

Calcul de B_3 : $1+D_3=3$

max=4



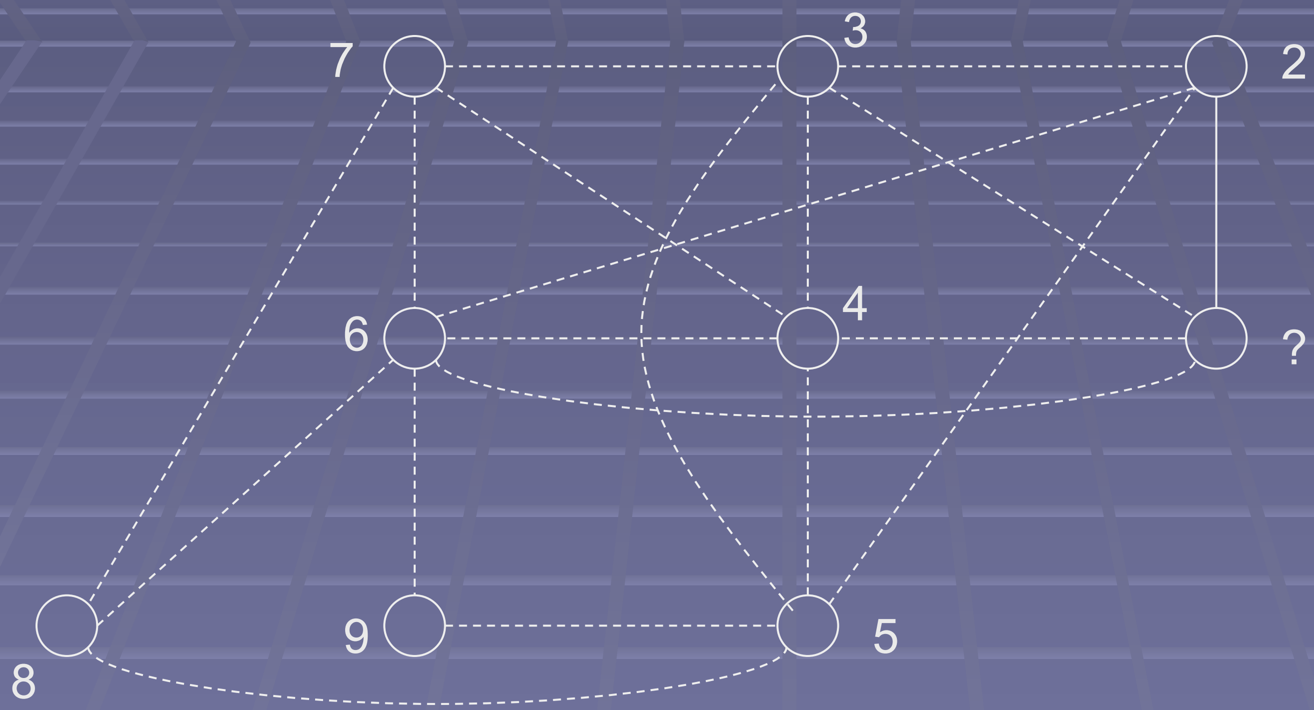
1 2 3 4 5 6 7

B_1	B_2	B_3	B_4
7	5		

FFS	LFS	SLS	DS
5	4		

- Exemple : SLS

Calcul de B_3 : $1+D_2=2$
max=4



1 2 3 4 5 6 7

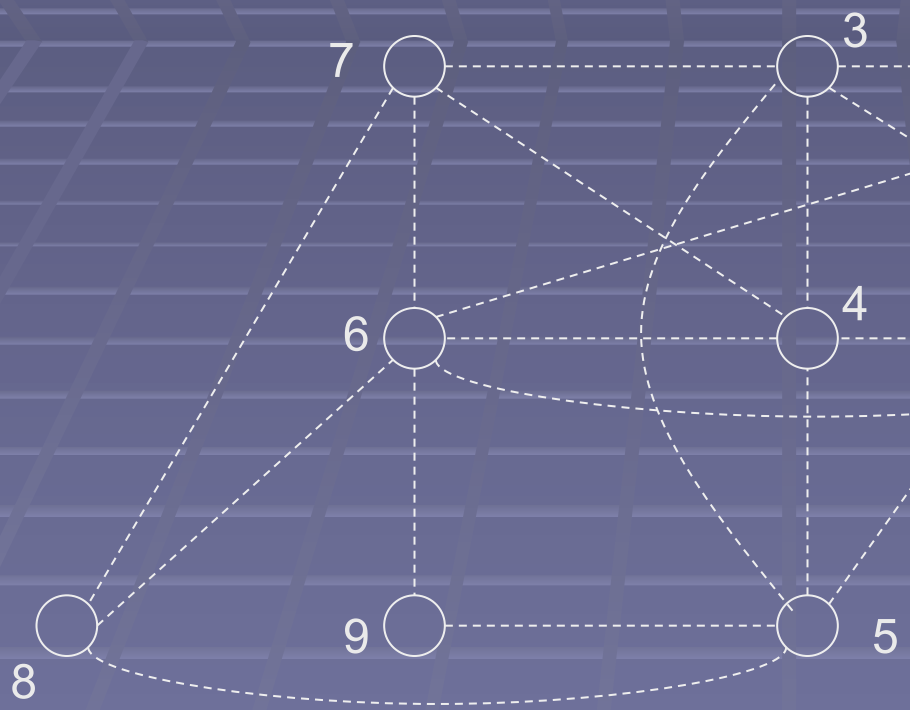
B_1	B_2	B_3	B_4
7	5		

FFS	LFS	SLS	DS
5	4		

- Exemple : SLS

Calcul de B_3 :

$1+D_1=1$
max=4

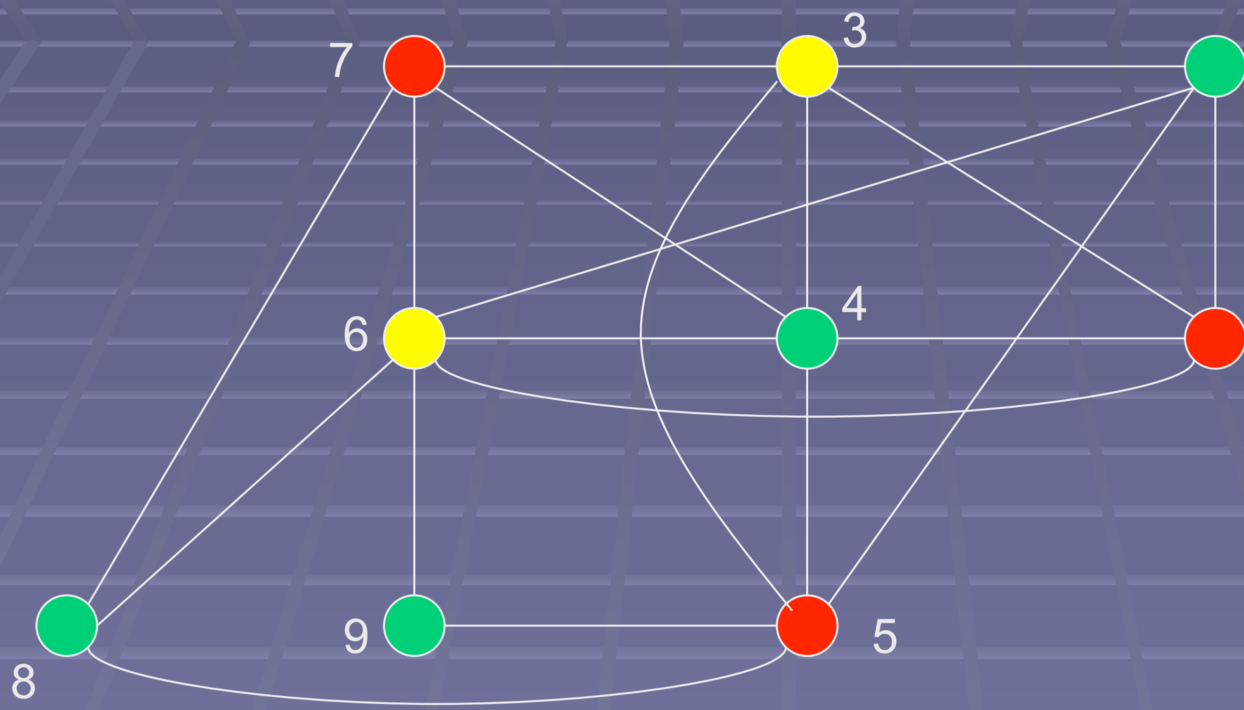


1 2 3 4 5 6 7

B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

FFS	LFS	SLS	DS
5	4		

- Exemple : SLS

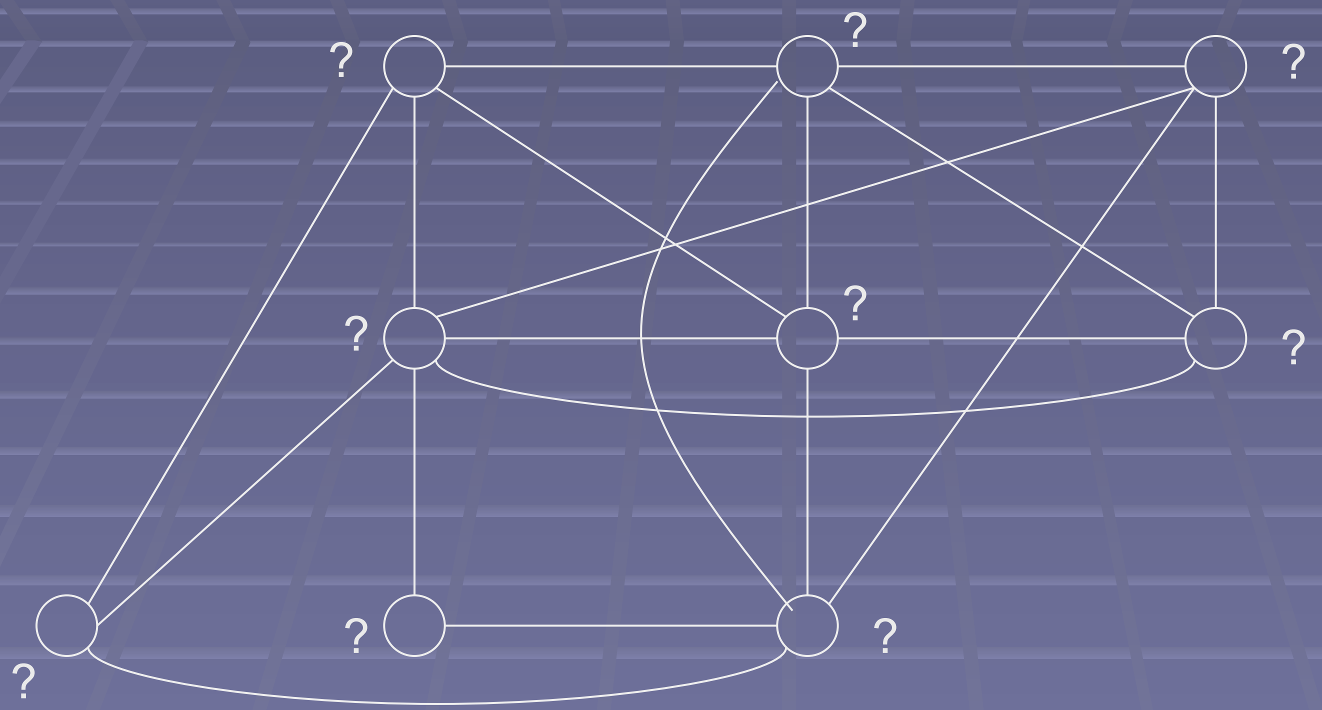


1 2 3 4 5 6 7

B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	

- Exemple : DS



1 2 3 4 5 6 7

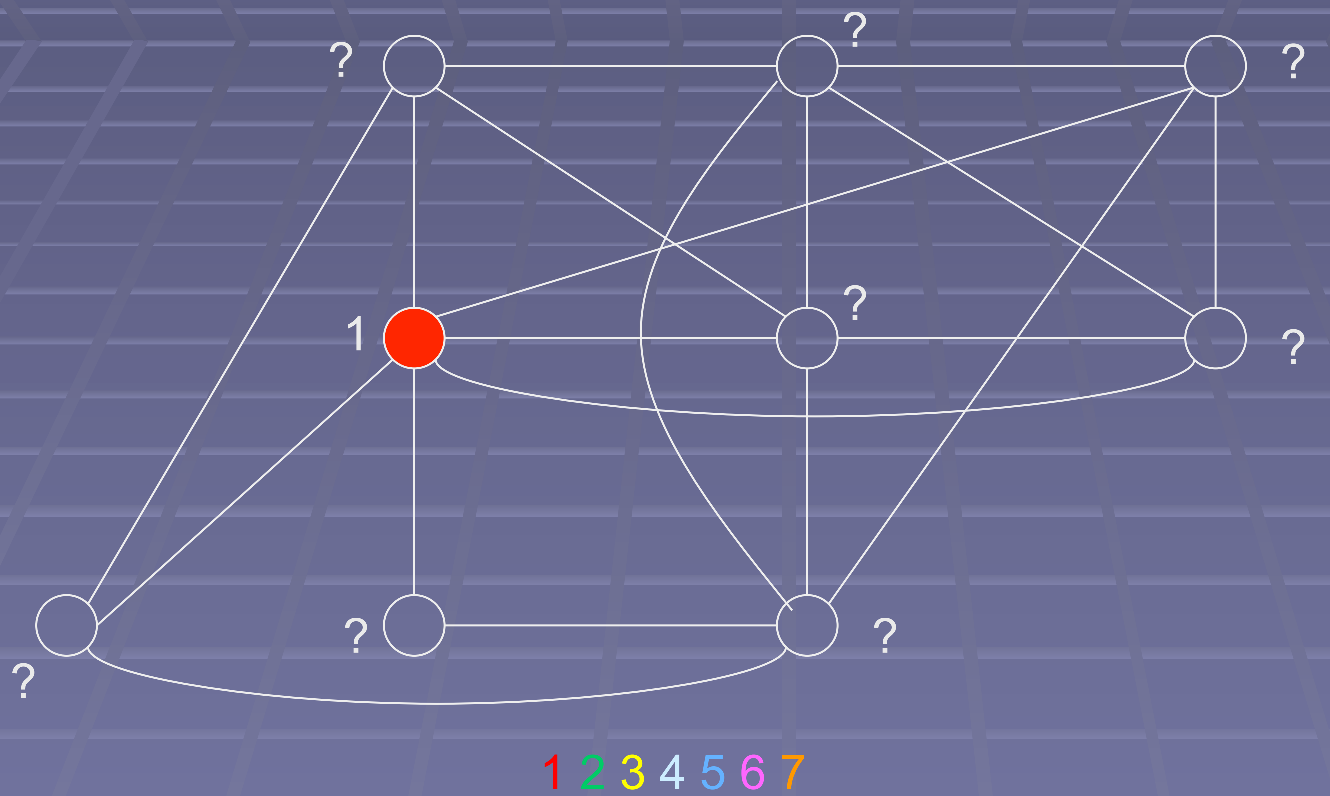
B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	

- Exemple : DS

Calcul de B_4 : $1+DS_1=1$

max=1

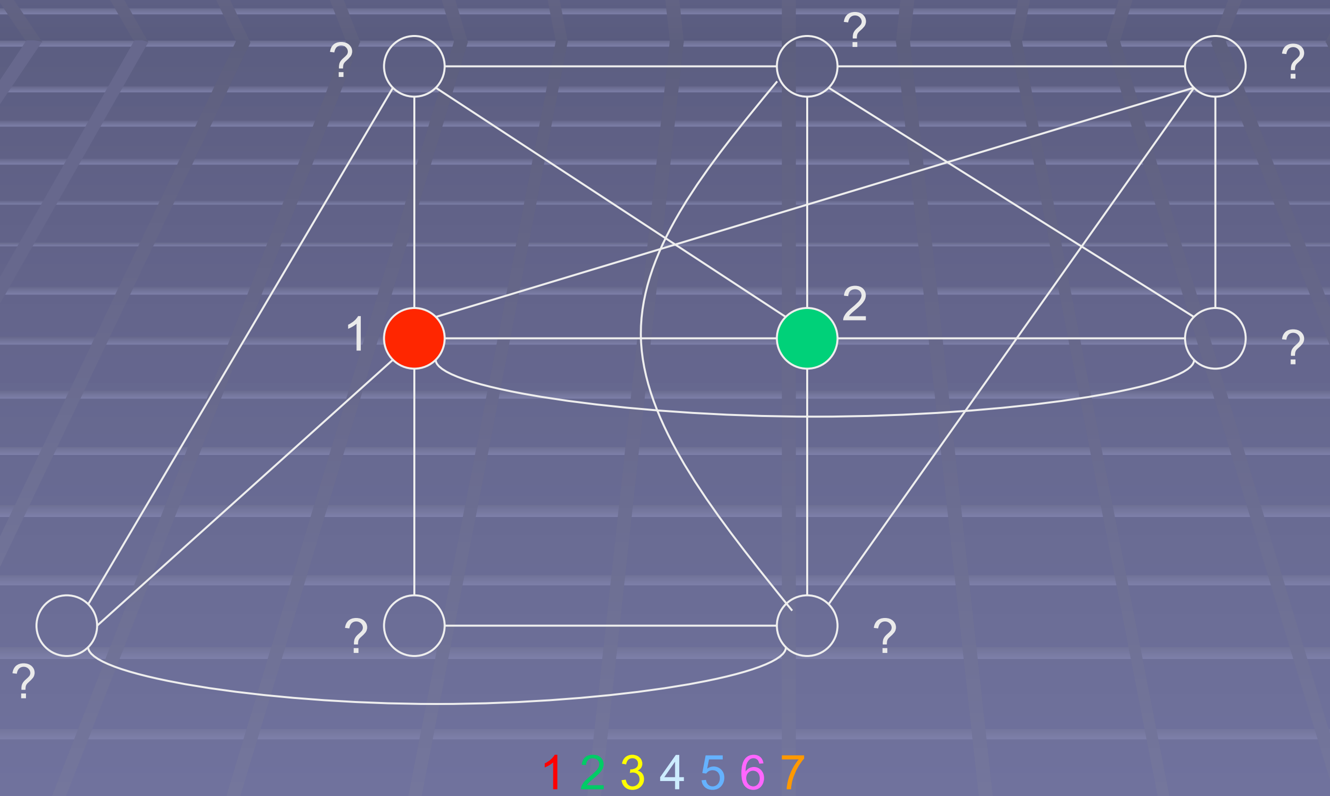


B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	

- Exemple : DS

Calcul de B_4 : $1+DS_2=2$ max=2

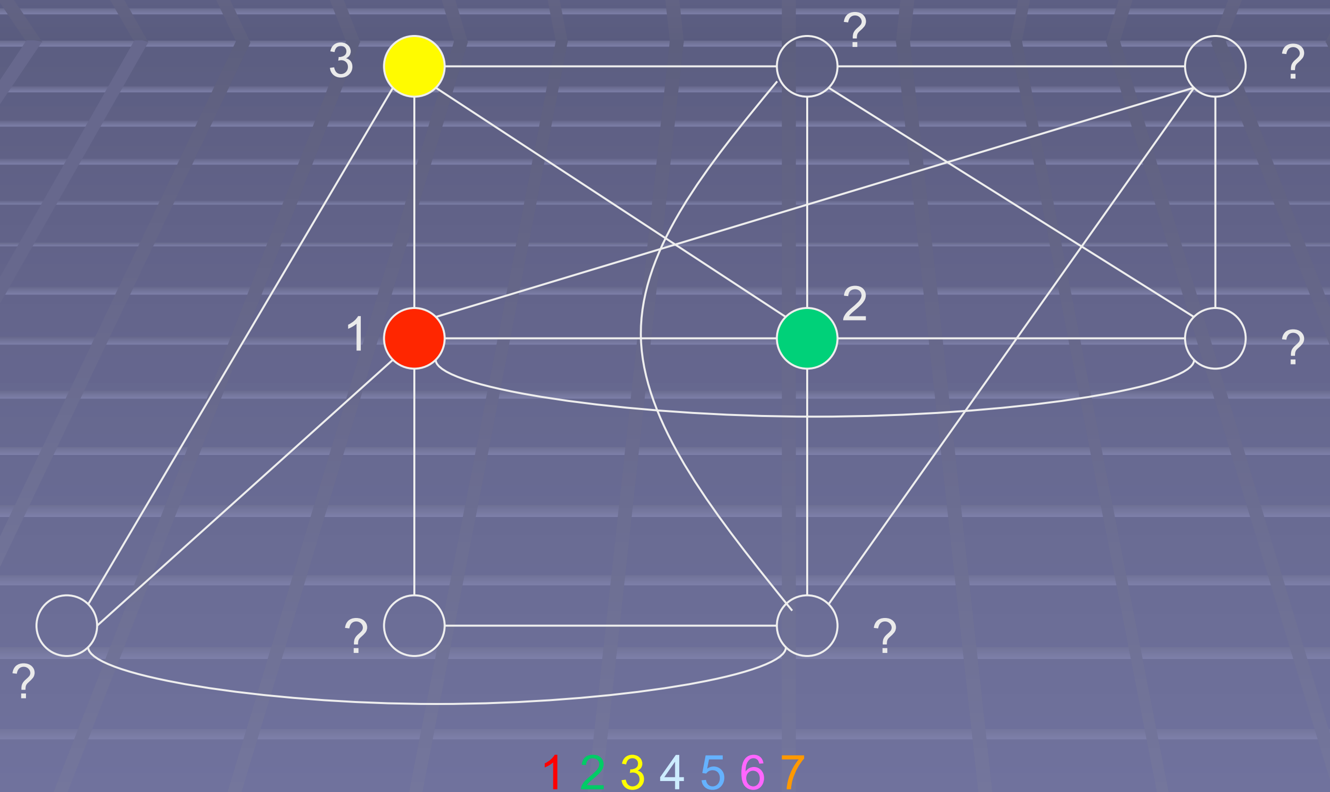


B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	

- Exemple : DS

Calcul de B_4 : $1+DS_3=3$
max=3



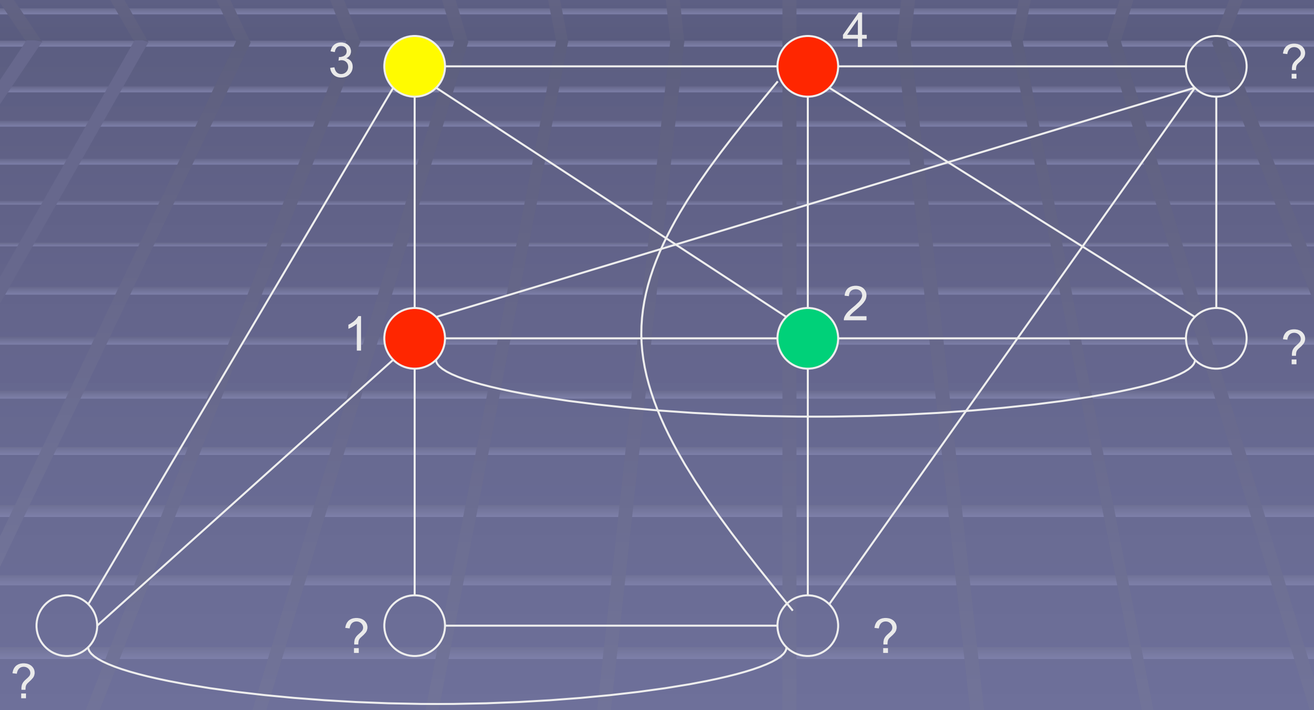
B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	

- Exemple : DS

Calcul de B_4 : $1+DS_4=3$

max=3



1 2 3 4 5 6 7

B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

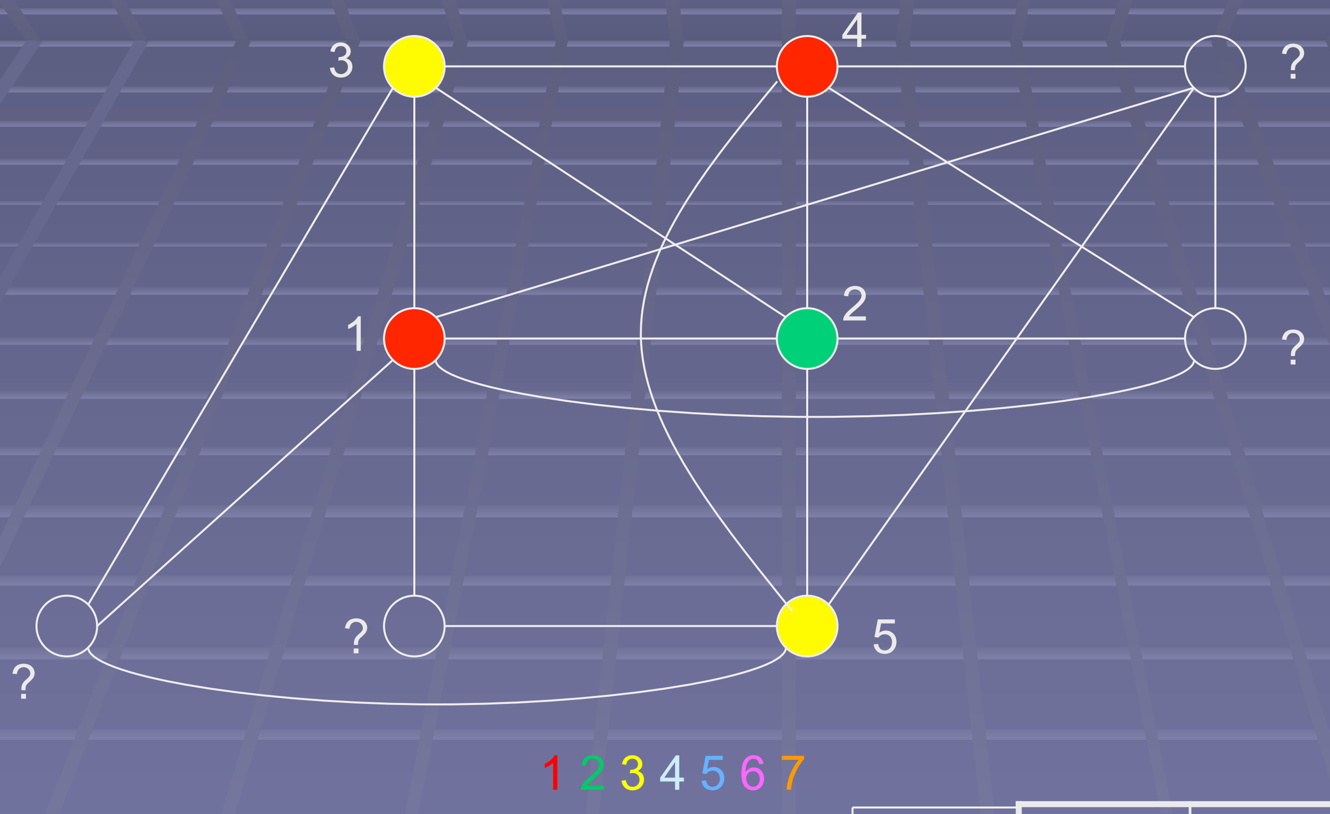
FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	

- Exemple : DS

Calcul de B_4 :

$1+DS_5=3$

max=3

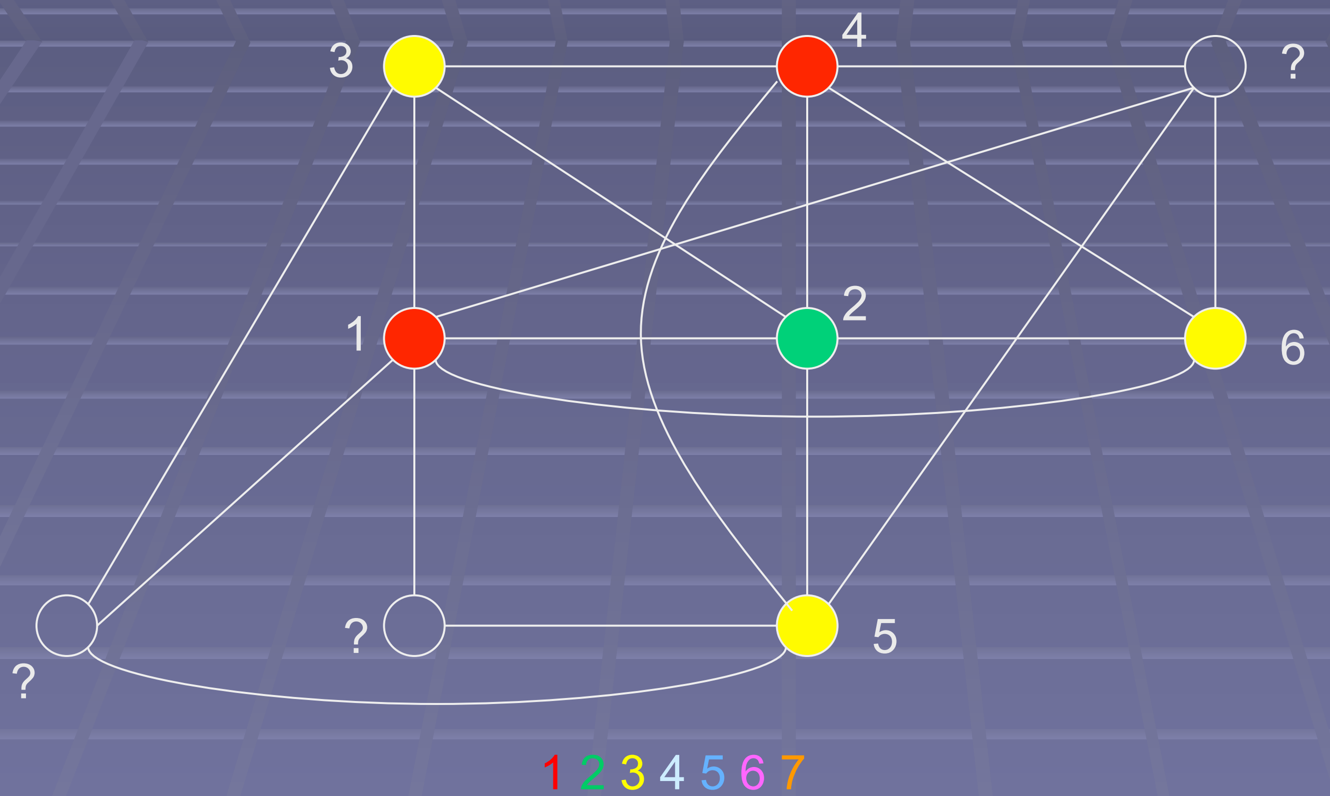


B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	

- Exemple : DS

Calcul de B_4 : $1+DS_6=3$
max=3

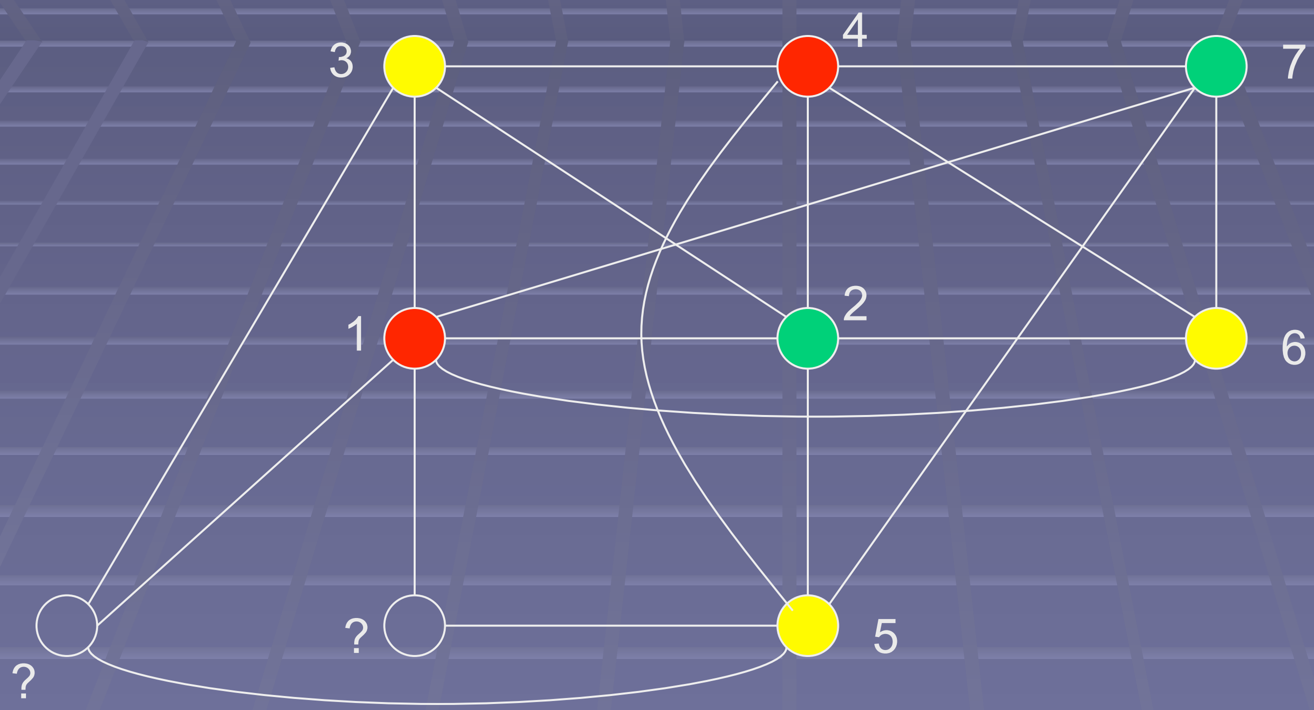


B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	

- Exemple : DS

Calcul de B_4 : $1+DS_7=3$
max=3



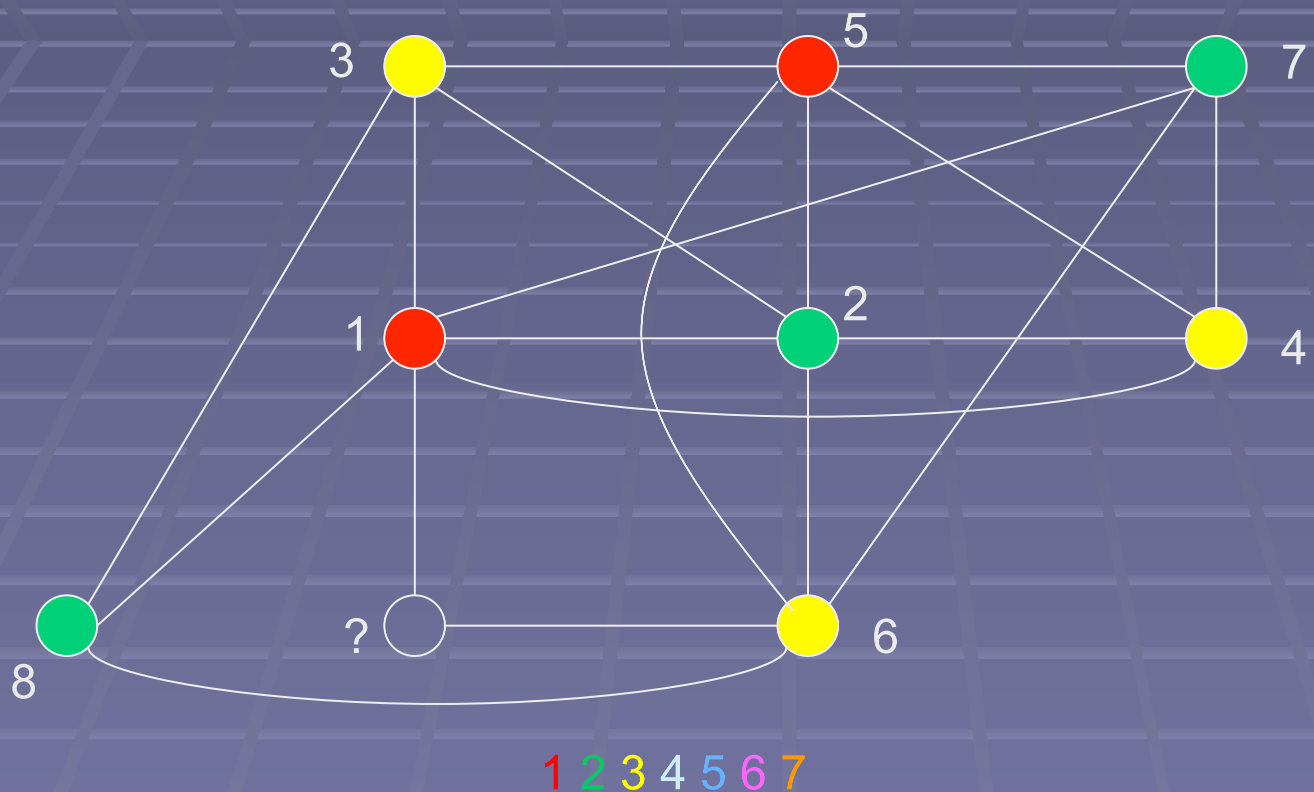
1 2 3 4 5 6 7

B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	

- Exemple : DS

Calcul de B_4 : $1+DS_8=3$
max=3

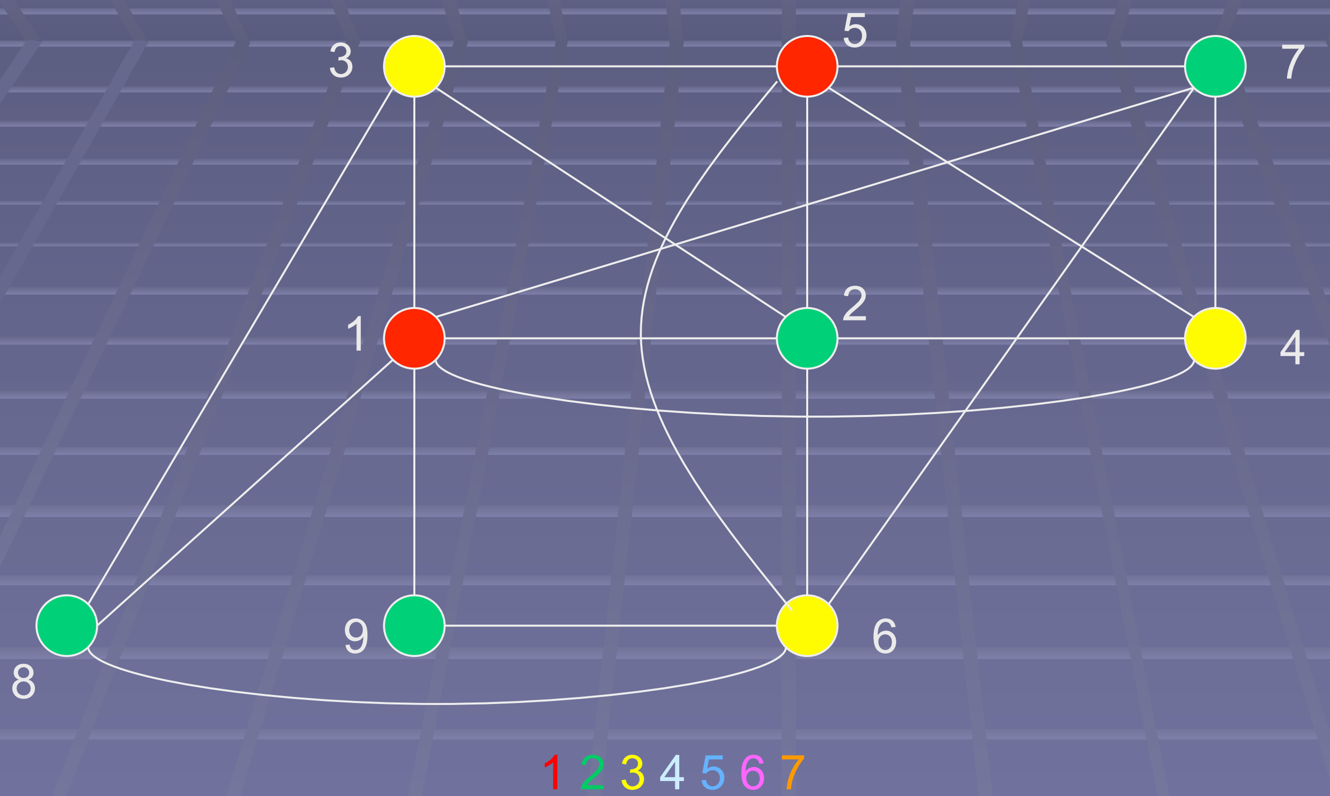


B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	

FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	

- Exemple : DS

Calcul de B_4 : $1+DS_9=3$
max=3



B_1	B_2	B_3	B_4
7	5	4	3

FFS	LFS	SLS	DS
5	4	3	3