Heuristiques de Recherches Locales

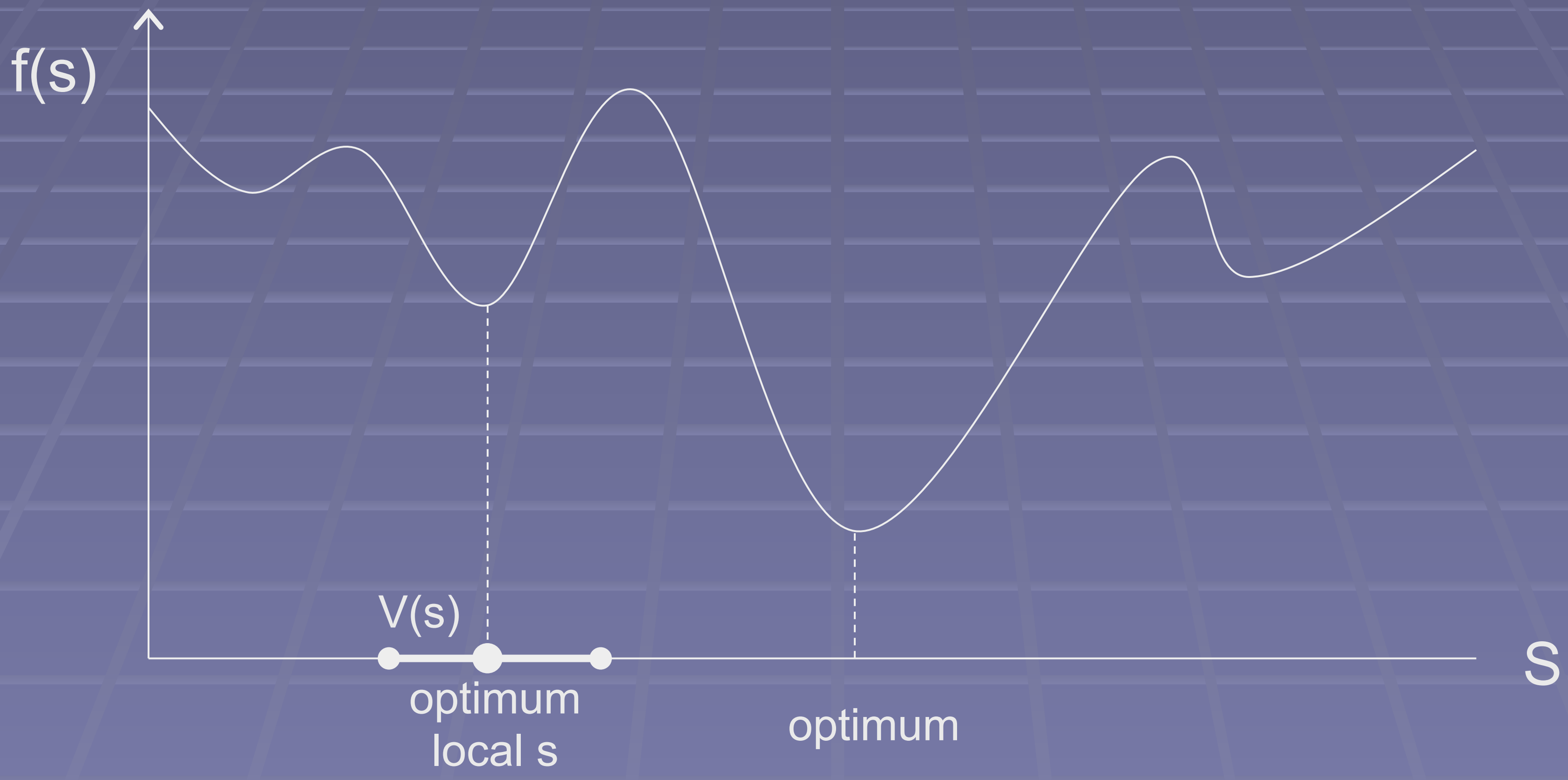
Jean-Philippe Préaux

http://www.i2m.univ-amu.fr/~preaux

Recherches locales

- Pour un problème donné soit S l'ensemble des solutions réalisables (les cycles hamiltoniens pour le PVC, les colorations réalisables pour une coloration, etc..).
- On se donne un procédé pour construire pour $s \in S$ un voisinage V(s) dans S de s.
- On cherche dans V(s) une solution s' de meilleur coût que s.
- On poursuit l'algorithme avec s' en construisant V(s').
- On continue tant que l'on améliore le coût et que l'on ne dépasse pas une limite préétablie de durée d'implémentation .

- Lorsque la recherche s'arrête sans trouver de solution améliorante, on n'est pas nécessairement sur un optimum, mais sur un optimum local au sens de la topologie définie sur S par le choix des voisinages :



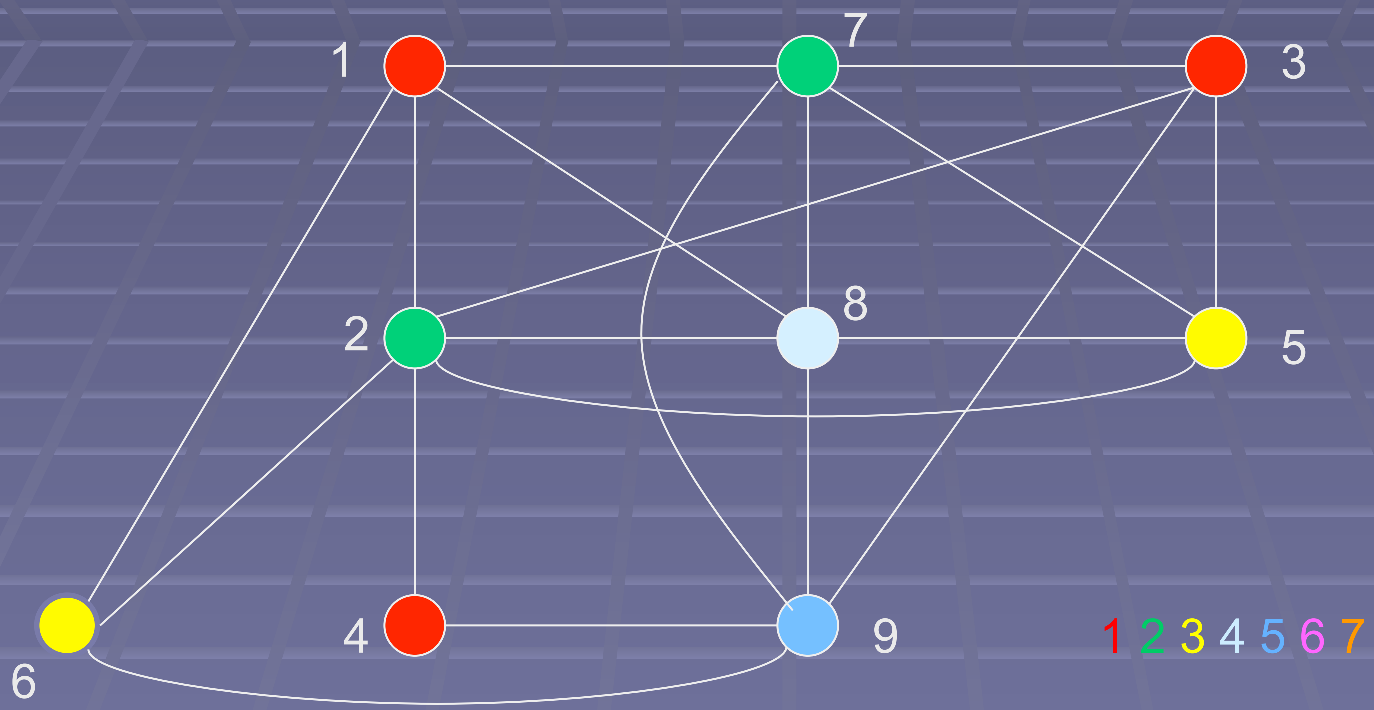
- Exemple : problème du sac à dos 0-1:
- Une solution réalisable *s* est un sous-ensemble de l'ensemble des objets avec $\Sigma_s p_k \leq P$.
- V(*s*) : ensemble des solutions obtenues à partir de *s* en remplaçant dans *s* un objet quelconque de poids p_i, par un objet de poids au plus $P + p_i - \Sigma_s\, p_k$.
- Si la valeur de cet objet est > v_i on a amélioré l'objectif.
- Avec n=2, $p_1=v_1=1$, $p_2=v_2=P$. Si *s*={objet_1}, alors V(*s*)={objet_1,objet_2}, et on améliore l'objectif en remplaçant l'objet_1 par l'objet_2.

- **Exemple :**
- Problème de coloration : une solution est une coloration réalisable.
- Il est délicat de déformer une coloration en la gardant réalisable.
- On peut par contre modifier facilement un ordre : pour s une coloration réalisable obtenu par une des heuristiques séquentielles grâce à un ordre des sommets :
- Définir V(s) comme les colorations obtenues en perturbant l'ordre par une permutation de 2 sommets ; il y en a $O(n^2)$:

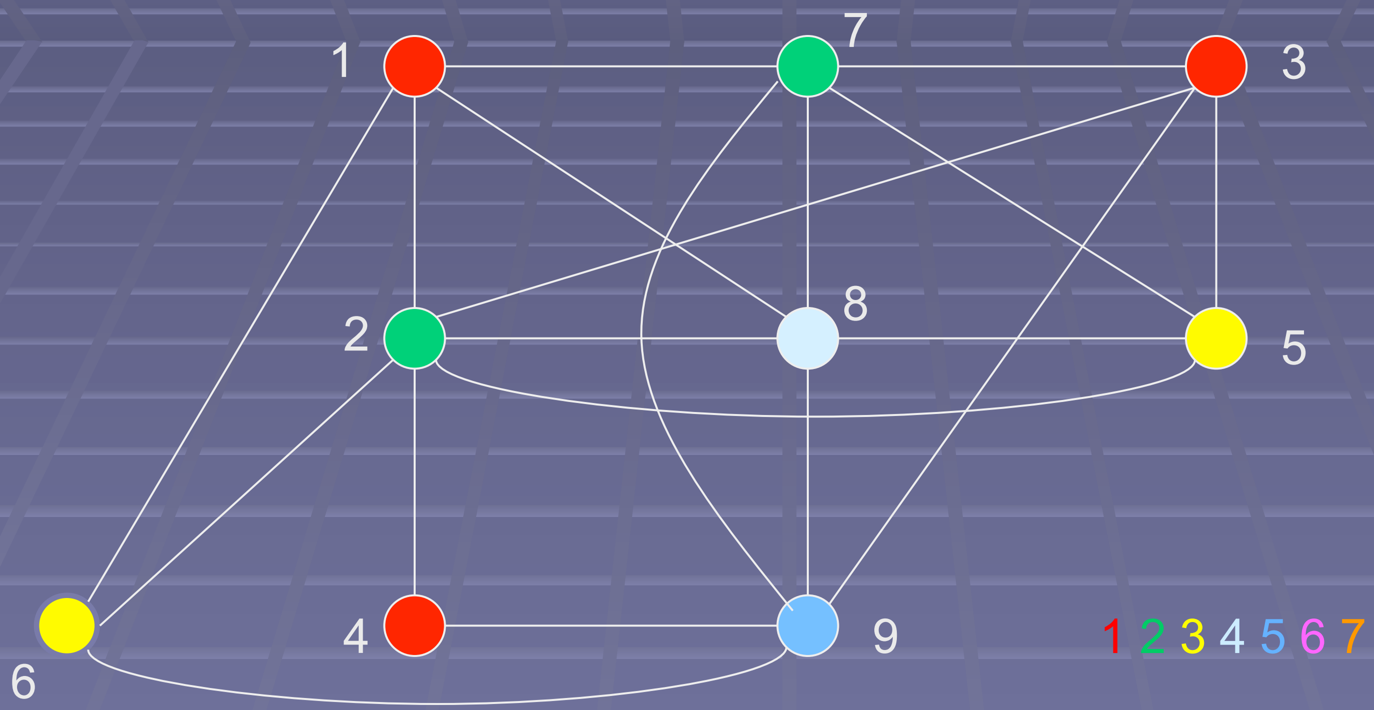
$$s_1,\dots,s_i,\dots,s_k,\dots,s_n$$

$$s_1,\dots,s_k,\dots,s_i,\dots,s_n$$

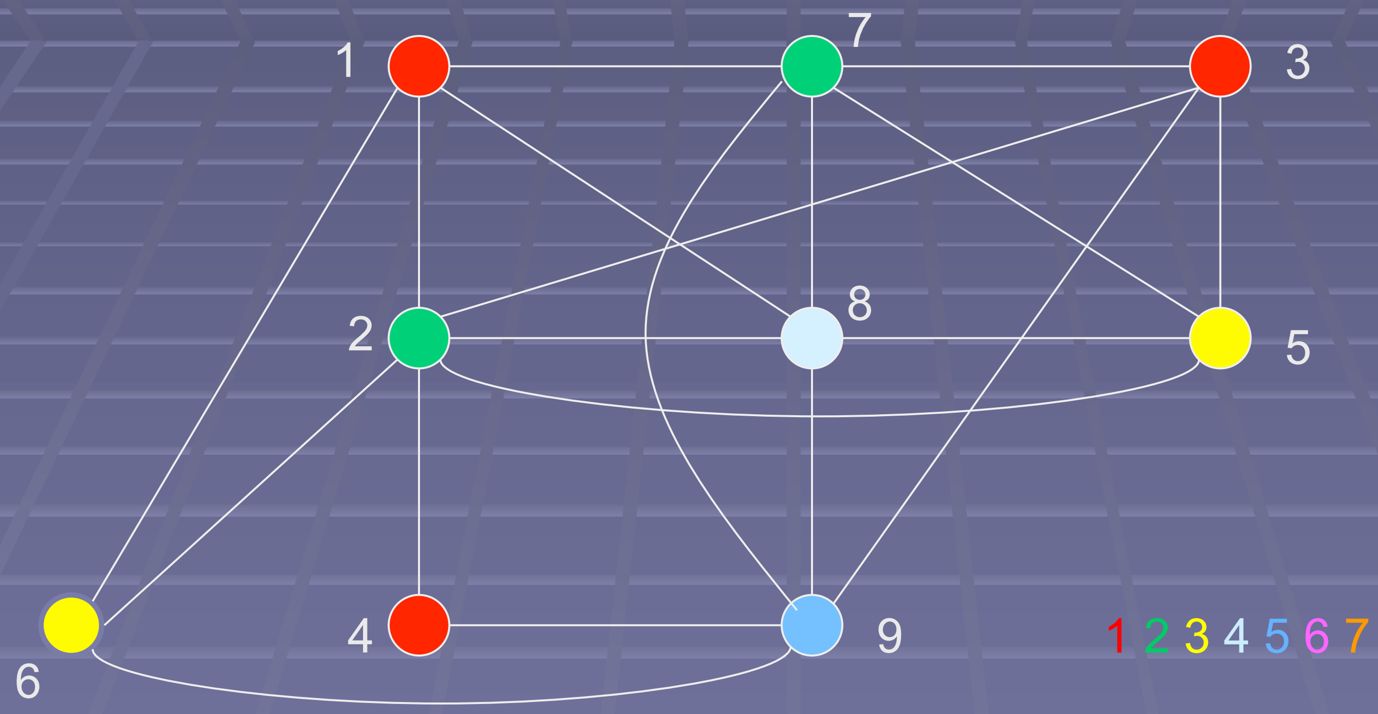
- Avec FFS : 5 couleurs



- s = coloration suivante avec 5 couleurs obtenue par FFS sur l’ordre donné :

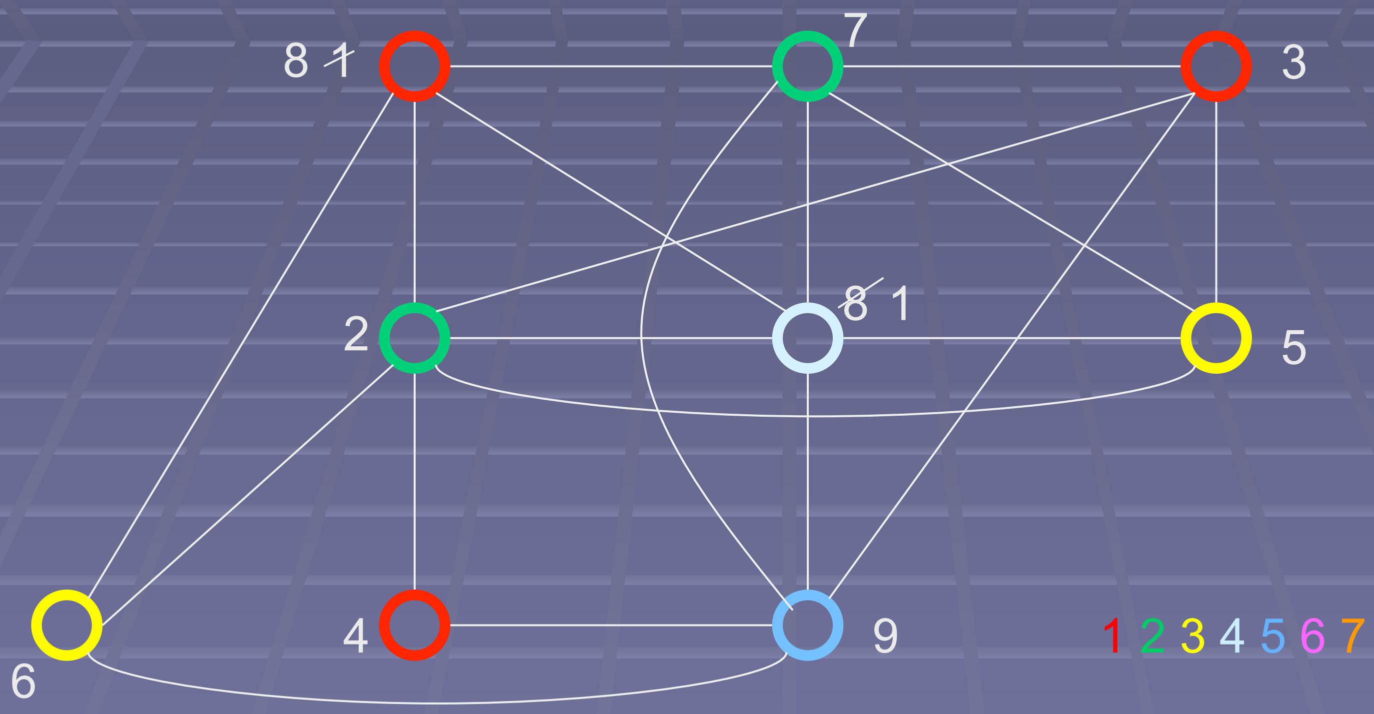


- s = coloration suivante avec 5 couleurs :



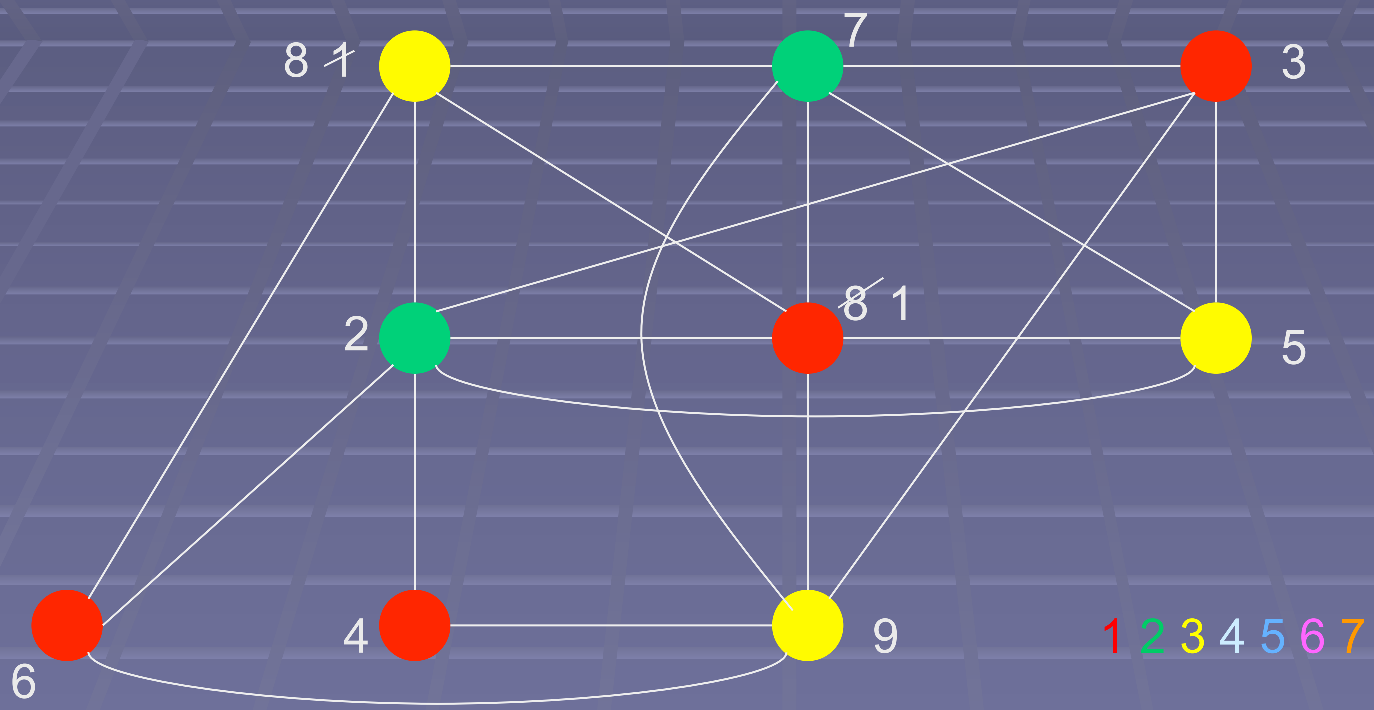
Voisinage de s : Coloration obtenue par FFS après permutation de la position de 2 sommets dans l'ordre donné.

- s = coloration suivante avec 5 couleurs :



s’ : Coloration dans V(s) obtenue par FFS après permutation des sommets 1 et 8.

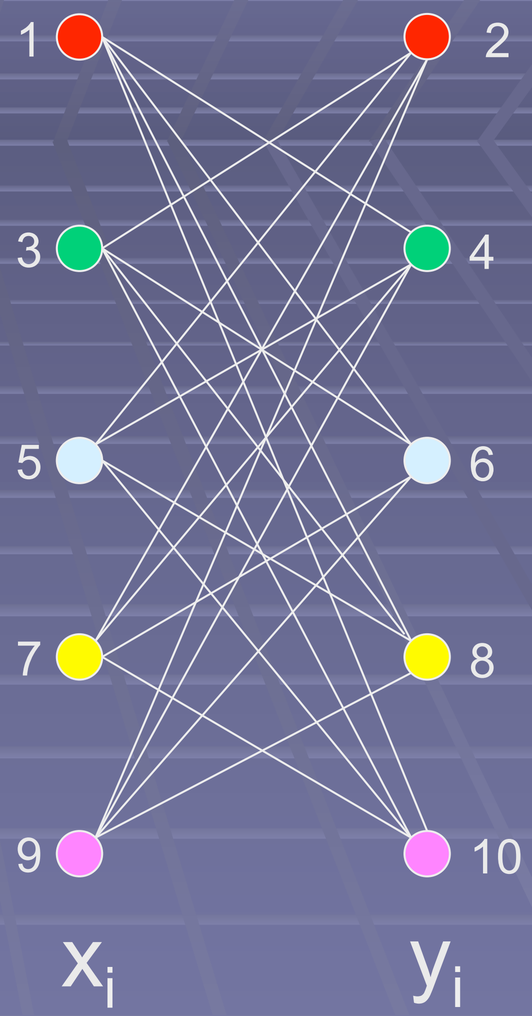
- s = coloration suivante avec 5 couleurs :



s' : Coloration dans V(s) obtenue par FFS après permutation des sommets 1 et 8. Avec 3 couleurs !

- Autre exemple de coloration :
- Reprenons le graphe biparti de sommets $x_1,...,x_5$ et $y_1,...,y_5$, et d'arêtes $[x_a,y_b]$ où $a \neq b$.
- Et l'ordre $x_1,y_1,...,x_5,y_5$ qui produit 5 couleurs avec FFS.

<u>ordre :</u> $x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4x_5y_5$

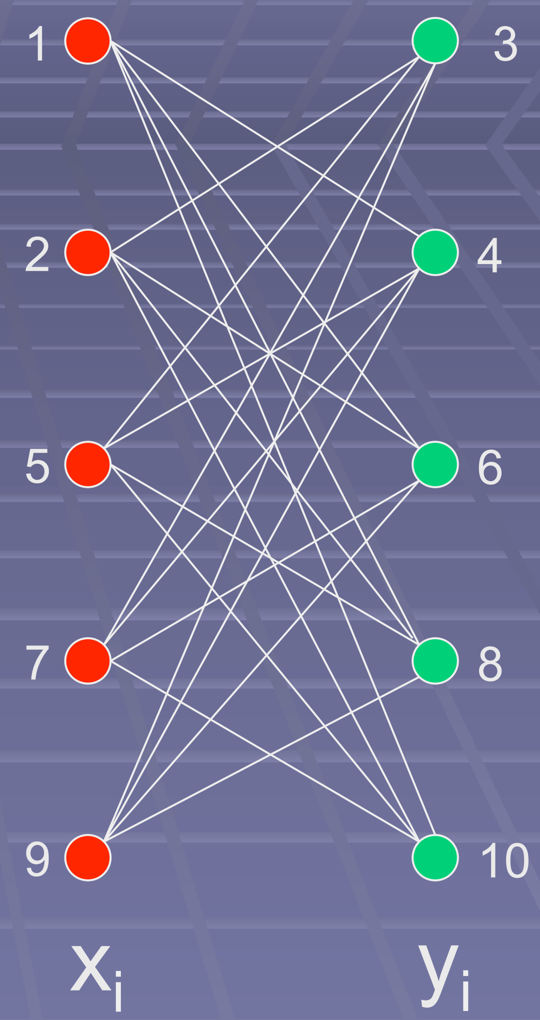


- Autre exemple de coloration :
- Reprenons le graphe biparti de sommets $x_1,...,x_5$ et $y_1,...,y_5$, et d'arêtes $[x_a,y_b]$ où $a \neq b$.
- Et l'ordre $x_1,y_1,...,x_5,y_5$ qui produit 5 couleurs avec FFS.

<u>ordre :</u> $x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4x_5y_5$

$x_1x_2y_1y_2x_3y_3x_4y_4x_5y_5$

- Ici tout changement qui 'casse' le préfixe $x_1(y_a...y_b)y_1$ donne un résultat optimal, et autrement n'est pas améliorant...



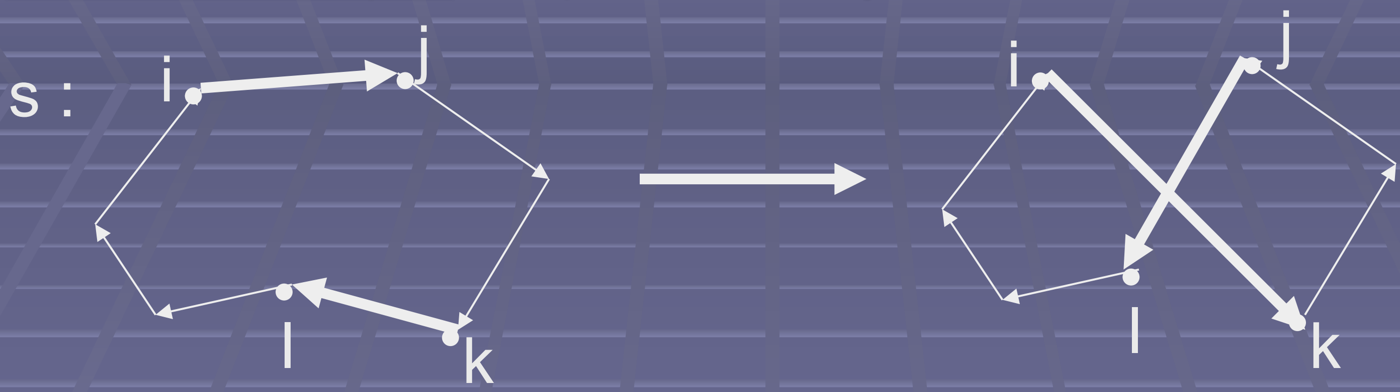
Comparaison des Heuristiques de coloration

- Implémentation sur une suite aléatoire de graphes à 30 sommets avec un processeur 1Ghz.

Méthode	# couleurs moyen	# optima	Erreur moyenne	Durée moyenne
FFS	9.18	0	27%	<1ms
LFS	8.44	7	17,5%	<1ms
SLS	8.40	7	17%	<1ms
DS	7.92	17	10%	<1ms
R. Loc.	7.64	28	6%	3ms

Recherche locale pour le PVC <u>symétrique</u>

- <u>Méthode 2-opt :</u> on part d'un cycle hamiltonien **s** :



- Un élément de V(**s**) s'obtient en considérant deux arêtes non consécutives de **s**, [i,j] et [k,l], que l'on remplace par les arêtes [i,k] et [j,l] de façon à obtenir un nouveau cycle hamiltonien **s'**.
- le cycle **s'** est meilleur que **s** si et seulement si :

$$c_{ik}+c_{jl} < c_{ij}+c_{kl}$$

- V(**s**) contient $O(n^2)$ éléments.

Recherche locale pour le PVC <u>symétrique</u>

- <u>Méthode k-opt :</u> on part d'un cycle hamiltonien **s** :

- Un élément de V(**s**) s'obtient en considérant k arêtes de **s**, que l'on remplace de façon à obtenir un nouveau cycle hamiltonien **s'** (c'est à dire connexe).

Recherche locale pour le PVC <u>symétrique</u>

- <u>Méthode k-opt :</u> on part d'un cycle hamiltonien **s** :

- Un élément de V(**s**) s'obtient en considérant k arêtes de **s**, que l'on remplace de façon à obtenir un nouveau cycle hamiltonien **s'** (c'est à dire connexe).

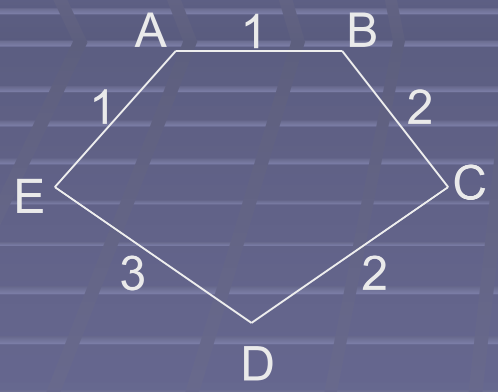
Recherche locale pour le PVC symétrique

- Méthode k-opt : on part d'un cycle hamiltonien **s** :

- Un élément de V(**s**) s'obtient en considérant k arêtes de **s**, que l'on remplace de façon à obtenir un nouveau cycle hamiltonien **s'**.
- V(**s**) contient O(n^k) éléments.
- En moyenne 3-opt marche un peu mieux que 2-opt. Par contre 4-opt n'améliore que très peu 3-opt pour un coût de calcul très élevé (n-opt est optimal et non efficient). Aussi on n'utilise que 2-opt et 3-opt.
- Meilleures en moyenne que les méthodes gloutonnes.

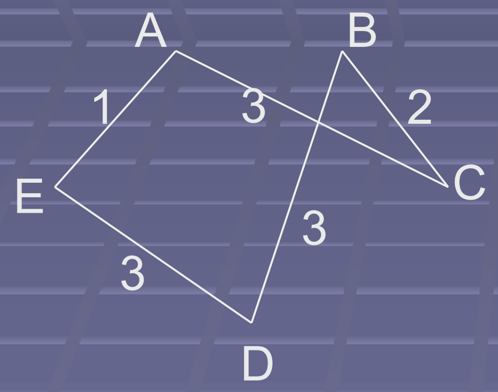
- Exemple : V(s) par 2-opt.

	A	B	C	D	E
A	-	1	3	2	1
B		-	2	2	1
C			-	2	2
D				-	3
E					-



- cycle s=A-B-C-D-E-A, c=9.

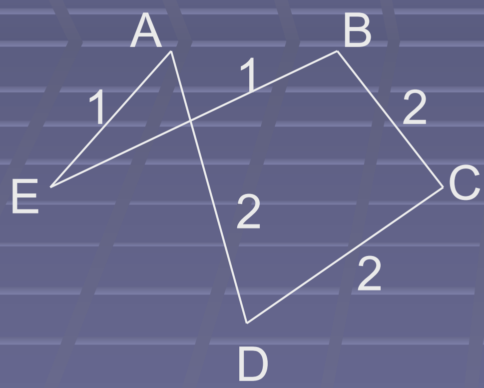
- Exemple : V(s) par 2-opt.



	A	B	C	D	E
A	-	***<u>1</u>***	**<u>3</u>**	2	1
B		-	2	**<u>2</u>**	1
C			-	**<u>2</u>**	2
D				-	3
E					-

- cycle s=A-B-C-D-E-A, c=9.
- A-C-B-D-E-A, c=12.

- Exemple : V(s) par 2-opt.



	A	B	C	D	E
A	-	***<u>1</u>***	3	**<u>2</u>**	1
B		-	2	2	**<u>1</u>**
C			-	2	2
D				-	***<u>3</u>***
E					-

- cycle s=A-B-C-D-E-A, c=9.
- A-C-B-D-E-A, c=12.
- A-D-C-B-E-A, c=8.
- Puis on repart de s'=A-D-C-B-E-A...

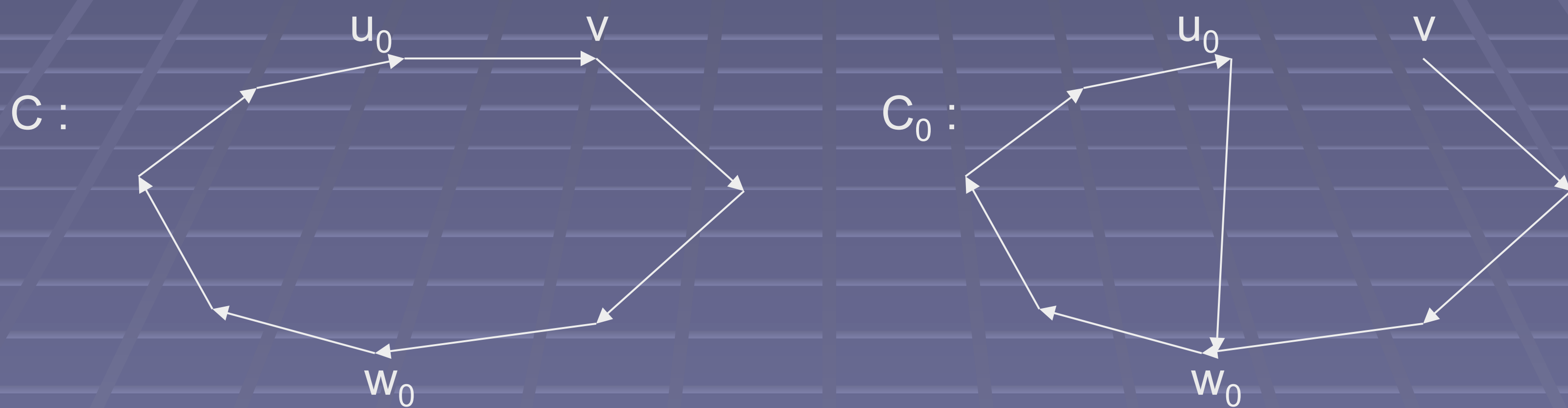
Heuristique de Lin-Kernighan pour le PVC

- On considère le PVC symétrique.
- Une des meilleures heuristiques est due à Lin-Kernighan (erreur <1% sur TSPLIB).
- C'est une recherche locale, par une suite de mouvements k-opt, améliorée :
  - On effectue certains mouvements k-opt pour k variable.
  - On ne 'bifurque' pas dès que l'on trouve une solution améliorante, mais on les cherche toutes.
  - On mémorise les meilleurs cycles trouvés .
- C'est une méthode générique qui admet plusieurs variantes.

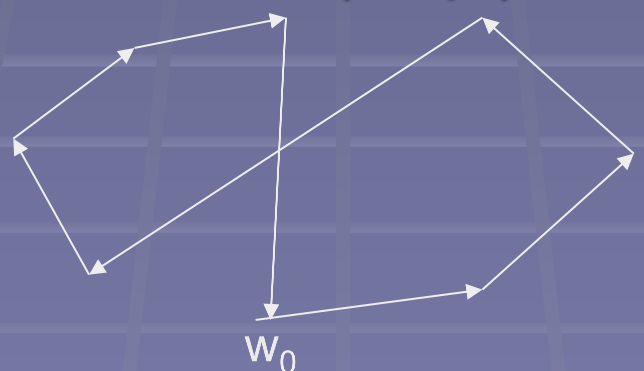
Heuristique de Lin-Kernighan

- Pour le PVC symétrique :
- Partir d'un cycle hamiltonien C.
- Pour chaque sommet u et arête [u,v] de C
  - Faire un « scan de [u,v] »
    (construit des cycles par k-opt sur C).
  - Changer C par le meilleur cycle obtenu.
- Fin boucle pour
- Retourner C.

- **Scan de $[u_0,v]$:**
- Chercher w_0 sommet de C avec $c([u_0,w_0]) < c([u_0,v])$.
- Si aucun : fin du scan de $[u_0,v]$.
- Sinon : changer dans C, $[u_0,v]$ par $[u_0,w_0]$, et i=0 :



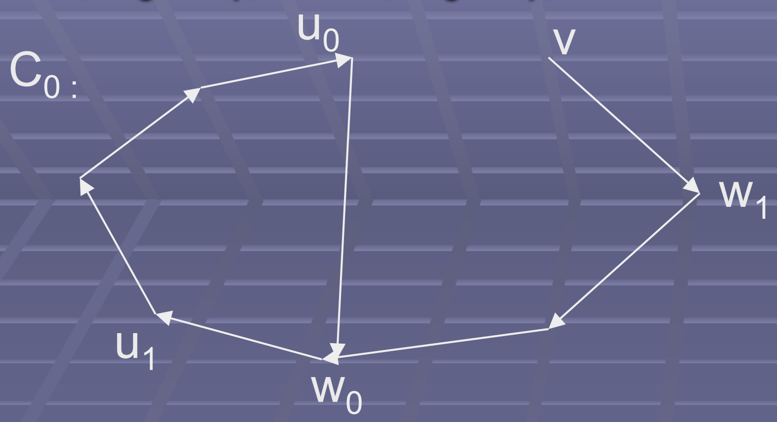
- « Refermer » en un circuit (2-opt).

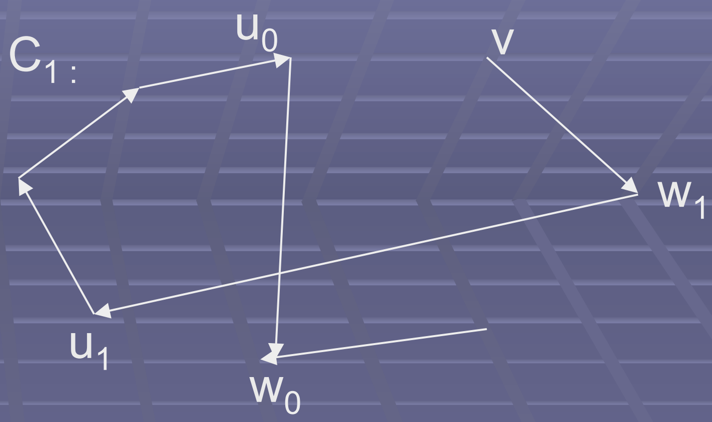


: « fermeture » de C_0

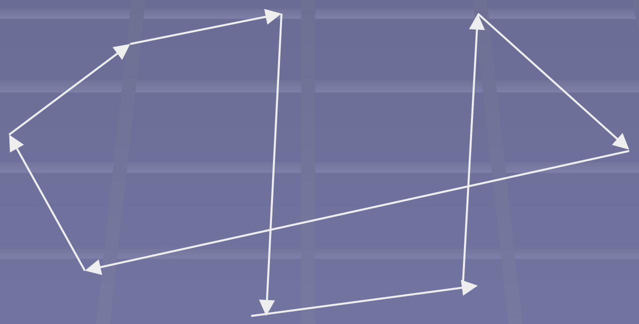
- Si coût < c(C) le stocker. Passer à l'étape suivante

- Soit u_1 le successeur de w_0 dans C_0. Chercher w_1 tel que $c(w_0,w_1) < c(w_0,u_1)$.





- Si il n'y en a pas, ou si $[w_0,u_1]$ a été ajouté durant ce scan : fin du scan. Sinon remplacer $[w_0,u_1]$ et l'arête issue de w_1 par $[w_0,w_1]$ dans C_0. On obtient C_1. Et i=i+1.



- Le refermer (3-opt) et le stocker si le coût est meilleur.

- Tant que le scan de $[u_0,v]$ se poursuit :
  - Soit u_{i+1} le successeur de w_i dans C_i. Chercher w_{i+1} tel que $c(w_i,w_{i+1}) < c(w_i,u_{i+1})$.
  - Si il n'y en a pas, ou si $[w_i,u_{i+1}]$ a été ajouté durant ce scan : fin du scan.
  - Sinon remplacer $[w_i,u_{i+1}]$ et l'arête issue de w_i par $[w_i,w_{i+1}]$ dans C_i. On obtient C_{i+1}.
  - $i=i+1$.
  - Refermer (i+2-opt) ; stocker si meilleur coût.
- Fin Tant que.