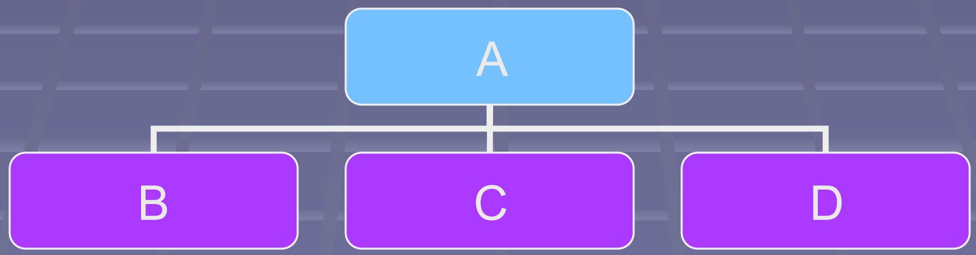
Problèmes dans les graphes



Jean-Philippe Préaux

http://www.i2m.univ-mrs.fr/~preaux

Plan :

Problème NP :

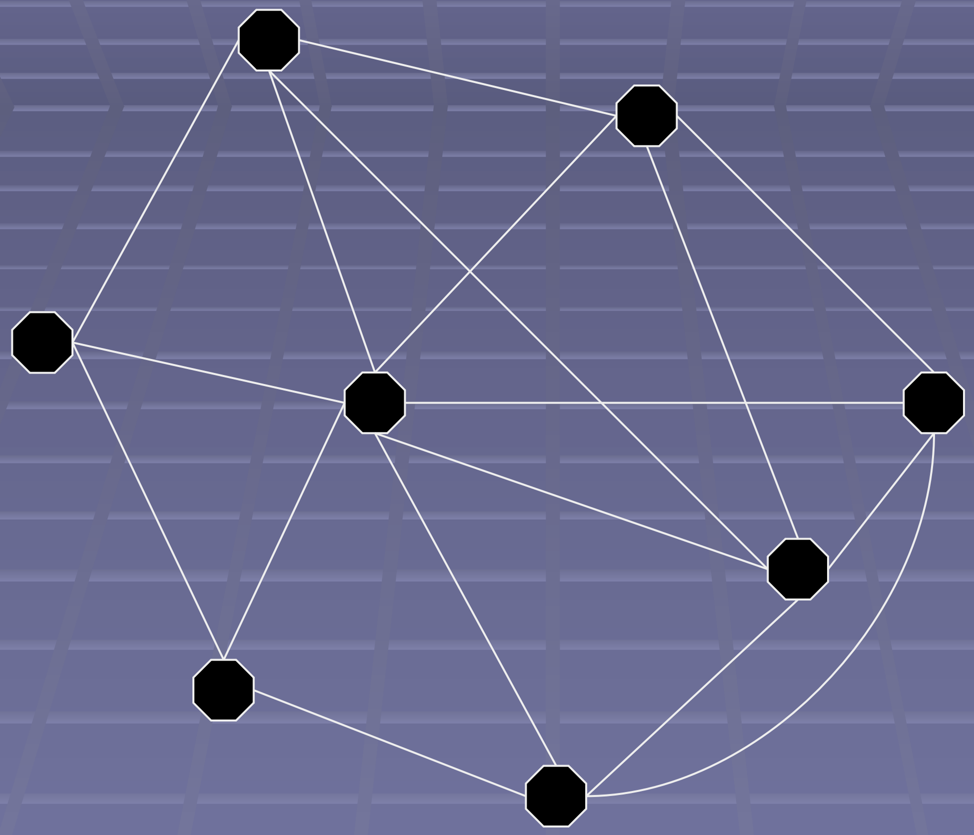
- Problème de coloration :
  - Recherche du nombre chromatique

Problèmes P :

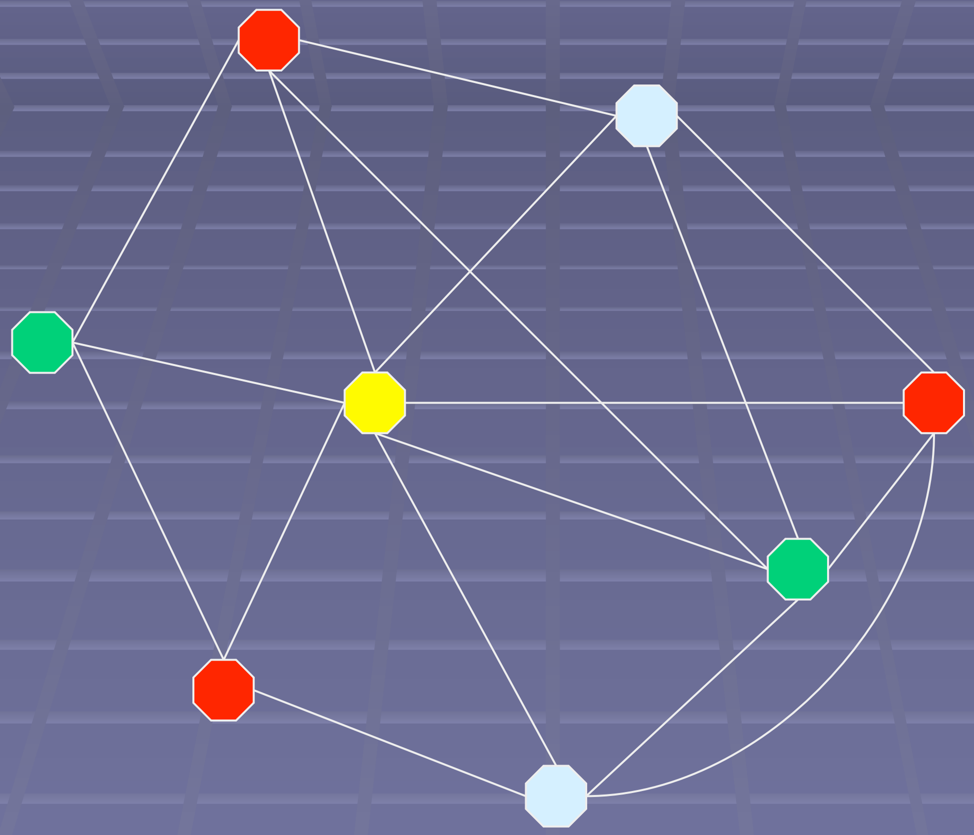
- Recherche de plus court chemin :
  - Algorithme de Dijkstra
- Problème du camion d’épandage :
  - Recherche de cycle Eulérien : Algorithme de Fleury
  - Solution au problème du camion d’épandage

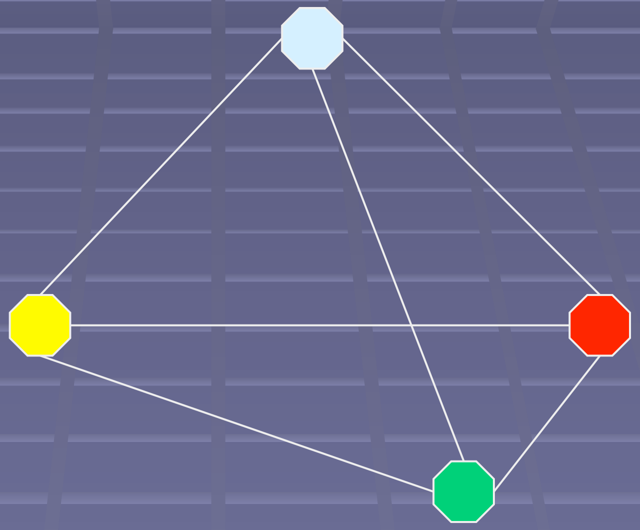
Problème de coloration

- Etant donné un graphe non orienté, colorier ses sommets de façon à ce que deux sommets adjacents soient de couleur différente. Si *k* couleurs sont nécessaires, on parle d'une *k*-coloration.
- Le *nombre chromatique* du graphe est le *k* minimum pour lequel il admet une *k* coloration.
- En général trouver le nombre chromatique est un problème NP-complet.



Avec 4 couleurs…





La présence d'un tétraèdre montre que 4 couleurs sont optimales. Le nombre chromatique est 4.

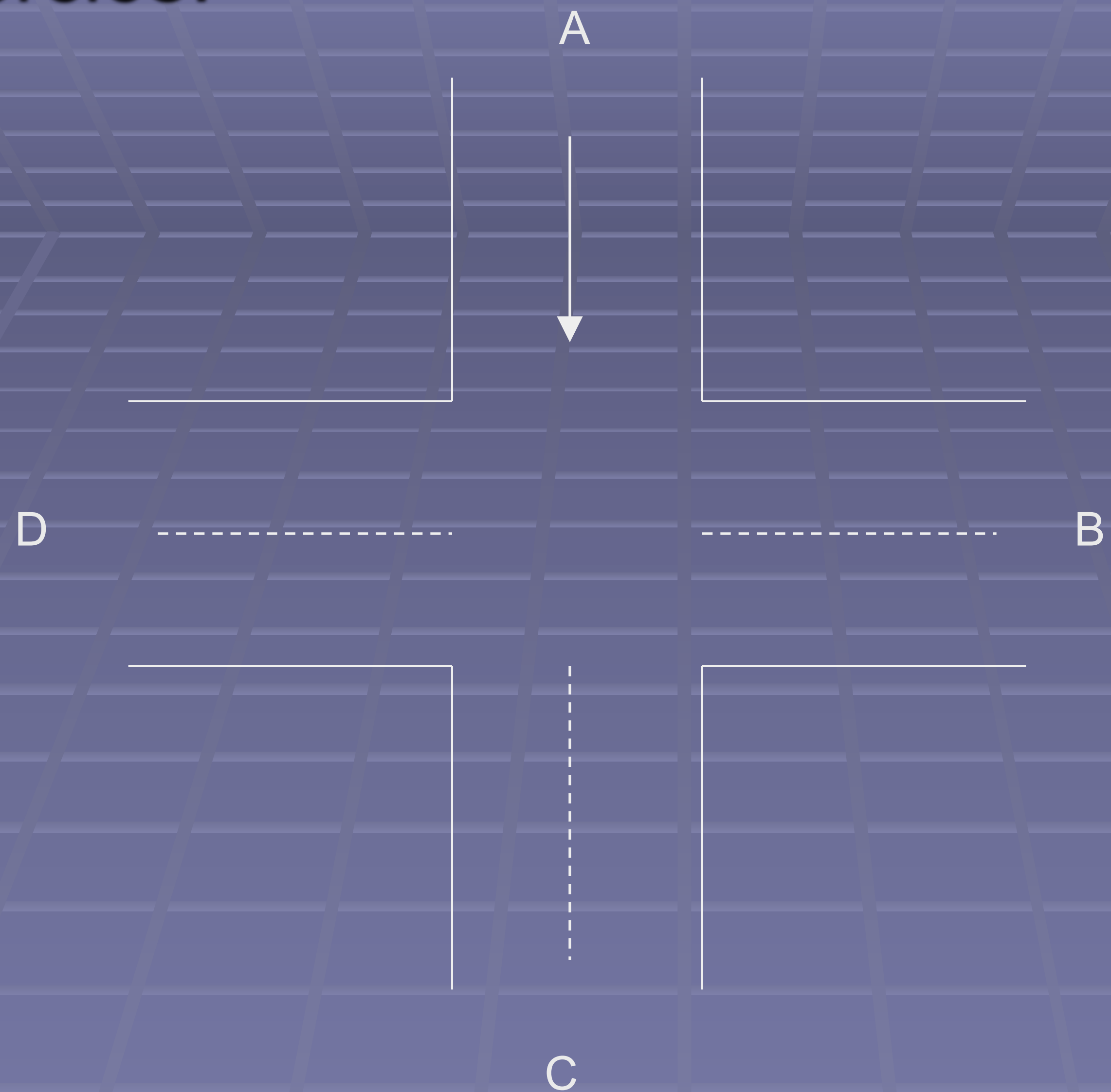
Quand utiliser les colorations ?

- Lorsque l'on veut réaliser plusieurs taches, chacune se déroulant durant une phase, et certaines taches ne pouvant 2 à 2 être réalisées durant la même phase.
- Les sommets sont les taches, les arêtes relient des taches incompatibles. Le nombre chromatique est alors le nombre optimal de phase nécessaire à l'exécution conjointe de toutes les tâches.

Exemple :

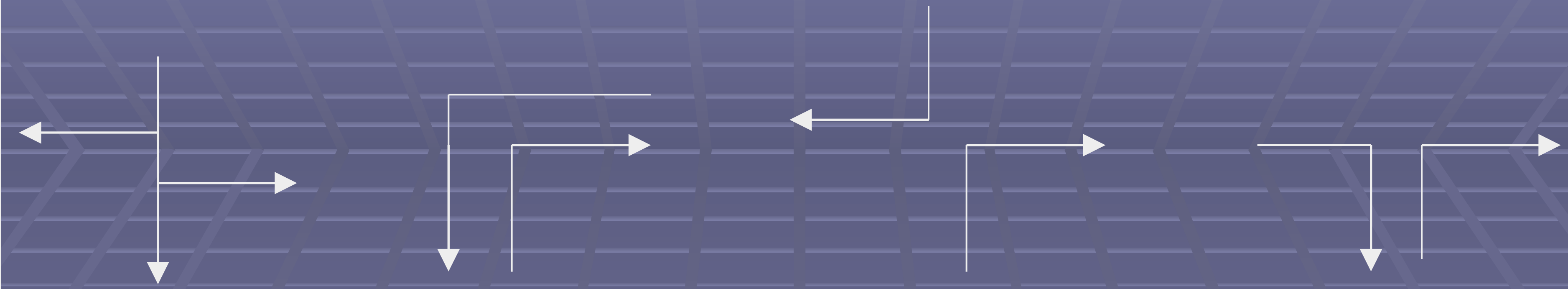
- Problème d'emploi du temps : Un certain nombre de cours devant se dispenser dans la semaine, chacun prenant un créneau horaire (phase) de 1 heure. Certains cours ne peuvent avoir lieu durant le même créneau horaire, pour diverses raisons : même enseignant, un élève suit les 2 cours, les cours nécessitent l'utilisation d'une même salle, ou d'un même matériel, etc…

Exercice:

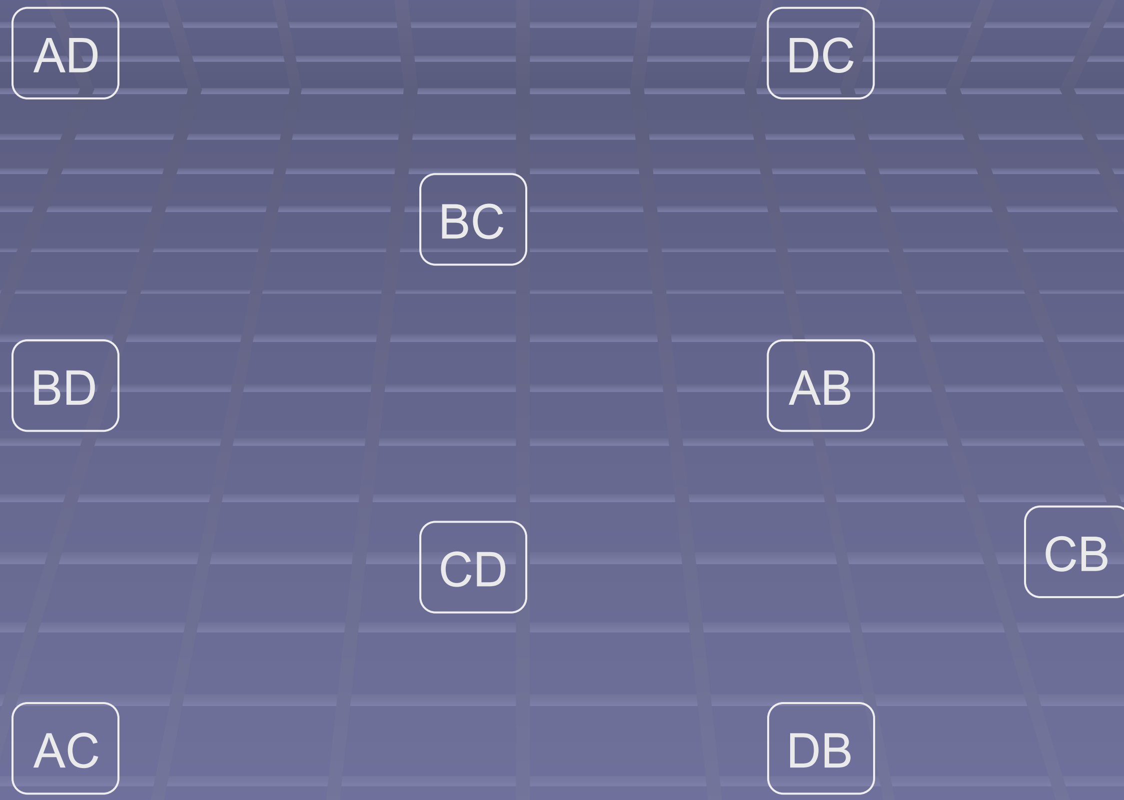


Trouver le nombre minimum de phases de 4 feux tricolores.

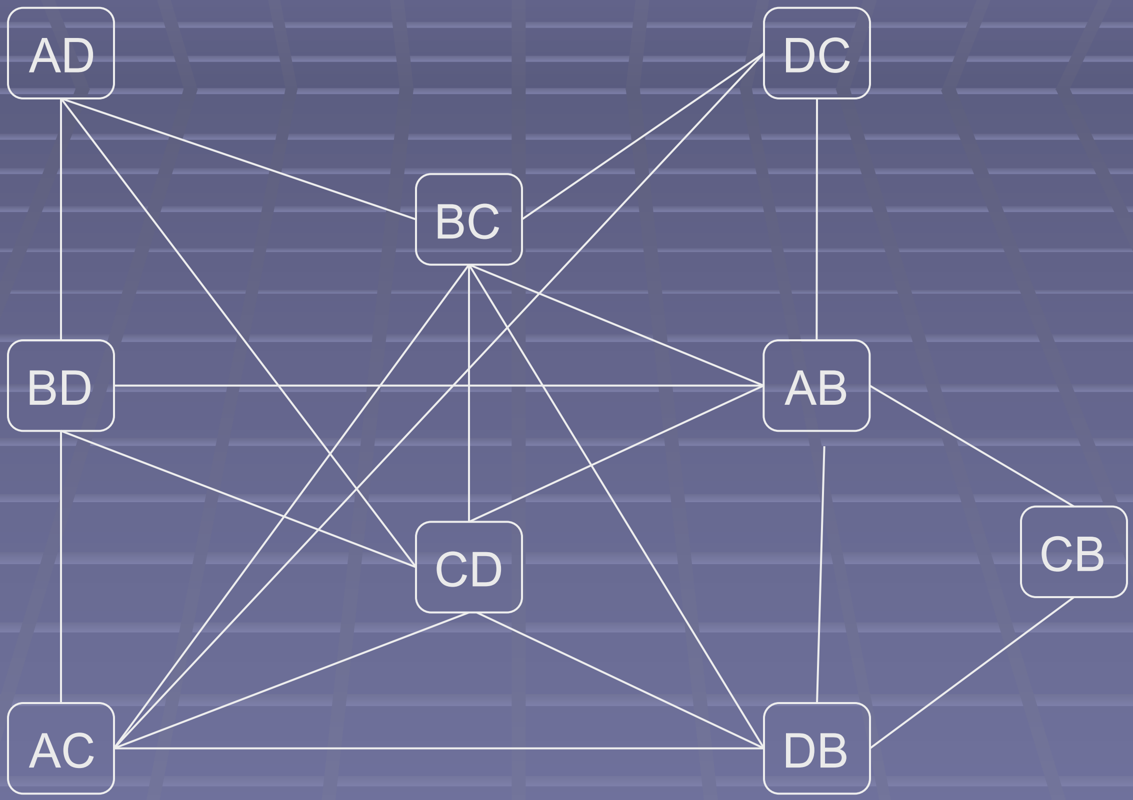
Autorisés :



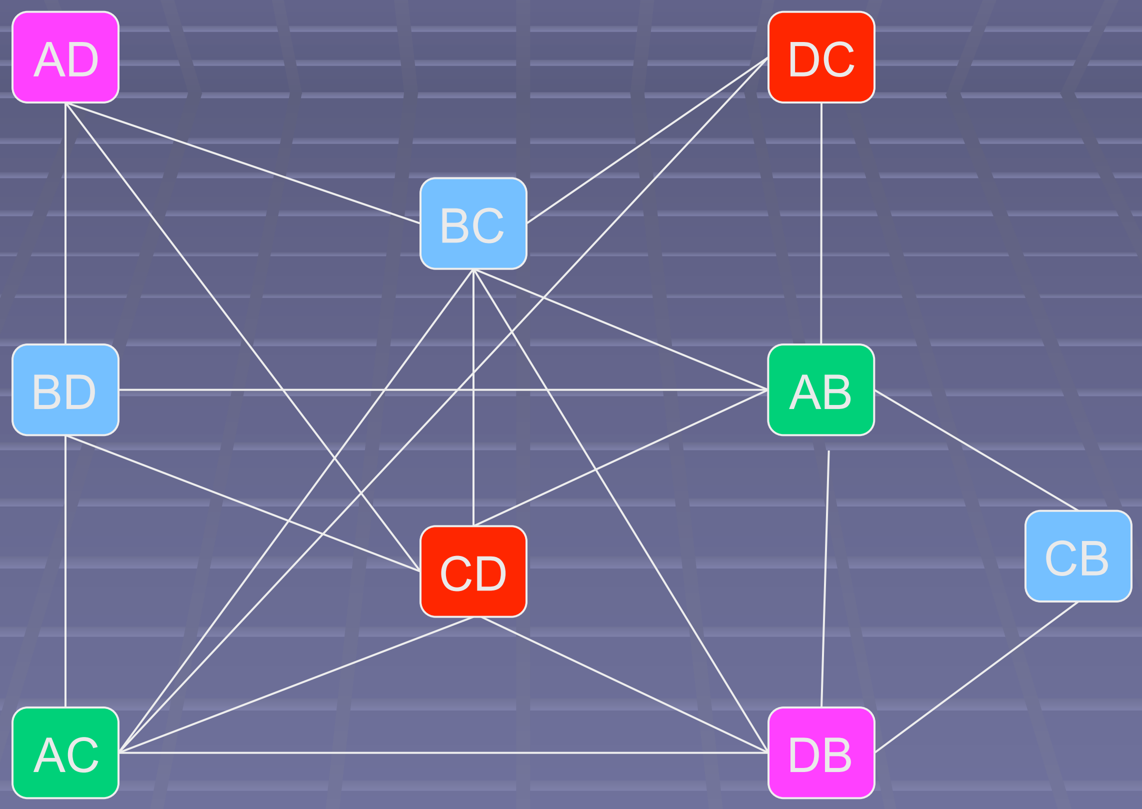
Interdits :



Les sommets représentent les différents trajets

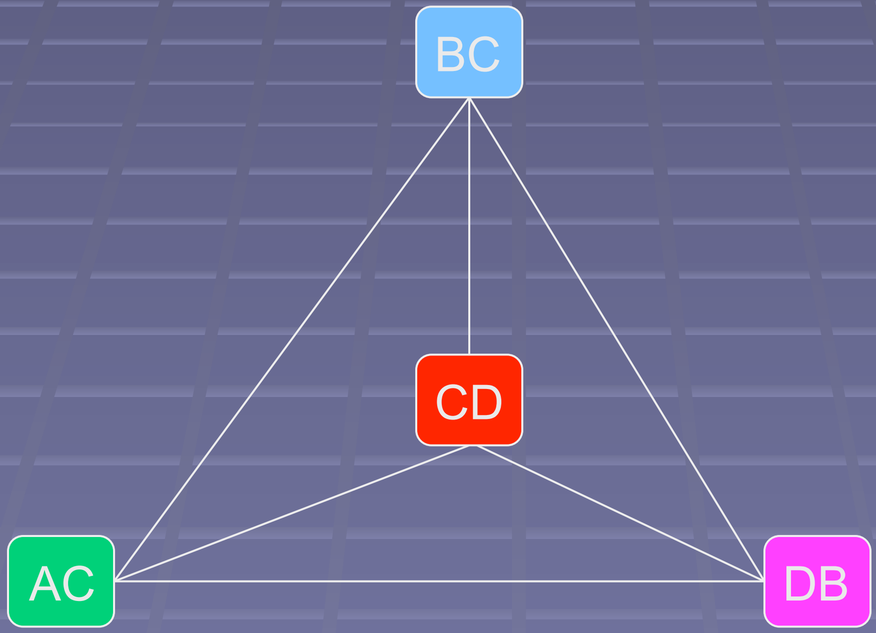


Les arêtes relient des trajets incompatibles



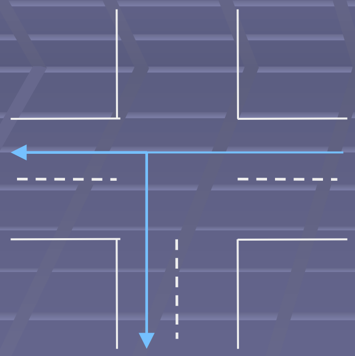
Une *coloration réalisable* du graphe

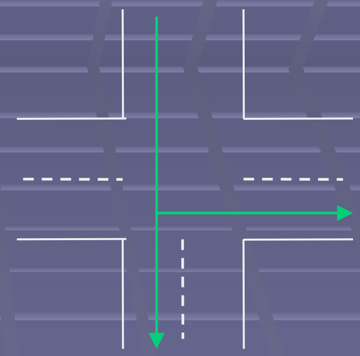
La présence d'un tétraèdre montre qu'on ne peut pas colorier le graphe avec moins de 4 couleurs.

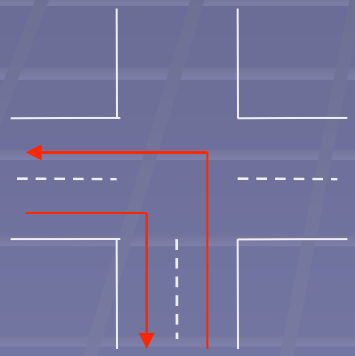


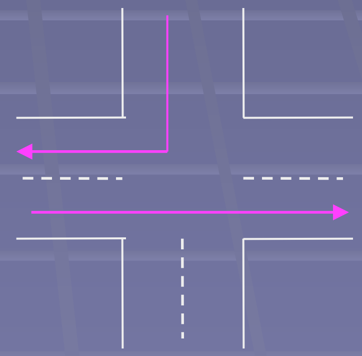
Le nombre minimum de phases est 4

Ce qui donne :









Problème du plus court chemin

- Dans un graphe pondéré (les arêtes sont munies d'un poids strictement positif), trouver le plus court chemin reliant deux sommets *(géodésique)*.
- Applications : évidentes (www.mappy)
- On dispose d'un bon algorithme pour résoudre ce problème : l'algorithme de Dijkstra.

Algorithme de Dijkstra

- Pour tout sommet t, dist(s,t)=+∞, et t est non marqué
- dist(s,s)=0
- Tant qu'il reste des sommets non marqués
  - Choisir un sommet t non marqué, avec dist(s,t) minimale
  - Marquer t
  - Pour tout successeur $t1$ de t
    - Si dist(s,$t1$) > dist(s,t) + p[t , t1]
    - Alors dist(s,$t1$):=dist(s,t) + p[t, t1]
    - Fin Si
  - Fin Pour
- Fin Tant que
- Sa compléxité est quadratique …

Problème du camion d'épandage

- Un camion doit répandre du sel sur la chaussée d'un réseau routier.
- Il circule à deux vitesses différentes selon qu'il répand ou non du sel.
- **<u>Problème :</u>** déterminer un parcours qui permette de répandre le sel sur toute la chaussée et qui minimise la durée.
- **<u>Nota :</u>** C'est un problème facile…

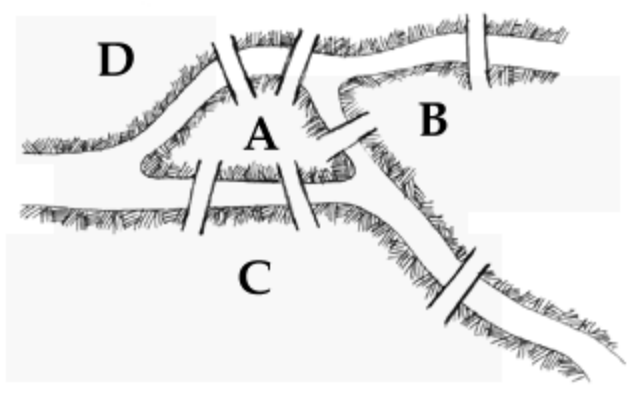
- Sous un énoncé différent, il s’agit du *problème du postier chinois*.

- On le modélise en considérant un graphe $\mathcal{G}$ connexe non orienté pondéré (par ex: le plan des rues muni de leur longueurs respectives). La donnée des vitesses est inutile !!

  Exemple de solution :
- Un circuit passant une et une seule fois par chaque arête (*cycle eulérien*).
- C’est nécessairement un trajet optimal …
- Un cycle eulérien n’existe pas toujours …

Cycles Eulériens

- Problème des ponts de Koenigsberg
- Dans la ville de Koenigsberg, 7 ponts croisent la ‘pregel’. Peut-on effectuer une promenade en passant une seule fois sur chaque pont ?
- Le problème est simple, est la solution facile fut apportée par Euler … Son article est cependant considéré comme l’acte fondateur de la *théorie des graphes* et de l’*analysis situs* (ou *topologie*).



La rivière ‘pregel’ et les sept ponts de Koenigsberg

Leonhard Euler, Mathématicien suisse, 1707-1783.

- **Définitions :** Dans un graphe $\mathcal{G}$,

  - Un circuit (ou cycle) ***eulérien*** est un circuit (*i.e.* un chemin fermé) qui passe une et une seule fois par chaque arête.

  - Le ***degré*** *(ou* ***valence****)* d'un sommet est le nombre des arêtes qui en sont issues.

- **Théorème (Euler) :** Un graphe connexe non orienté contient un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de valence paire.

  Preuve […]

Algorithme de Fleury

Le sous-graphe G contient l'ensemble les sommets et arêtes non marquées.

Initialement G = Tout le graphe.

- Choisir un sommet initial $s^* \in G$.
- Marquer s^* ; $s \leftarrow s^*$
  - TANT QUE G est non-vide
    - Choisir une arête $a \in G$ d'origine s, qui ne disconnecte pas $G \cup s^*$.
    - $s \leftarrow$ l'extrémité de a.
    - Marquer s et a.
  - FIN TANT QUE

DE COMPLEXITE LINEAIRE […]

Revenons au problème du camion d'épandage…

- Si tous les sommets de $\mathcal{G}$ sont de valence paire, chercher un cycle eulérien : c'est une solution optimale.
- Sinon :
- Il faudra nécessairement parcourir chaque arête de $\mathcal{G}$ au moins une fois… Certaine arêtes seront parcourues plusieurs fois …
- Idée : Construire un sur-graphe -- en dupliquant un sous-ensemble $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ d'arêtes de coût minimal – qui contienne un cycle eulérien.

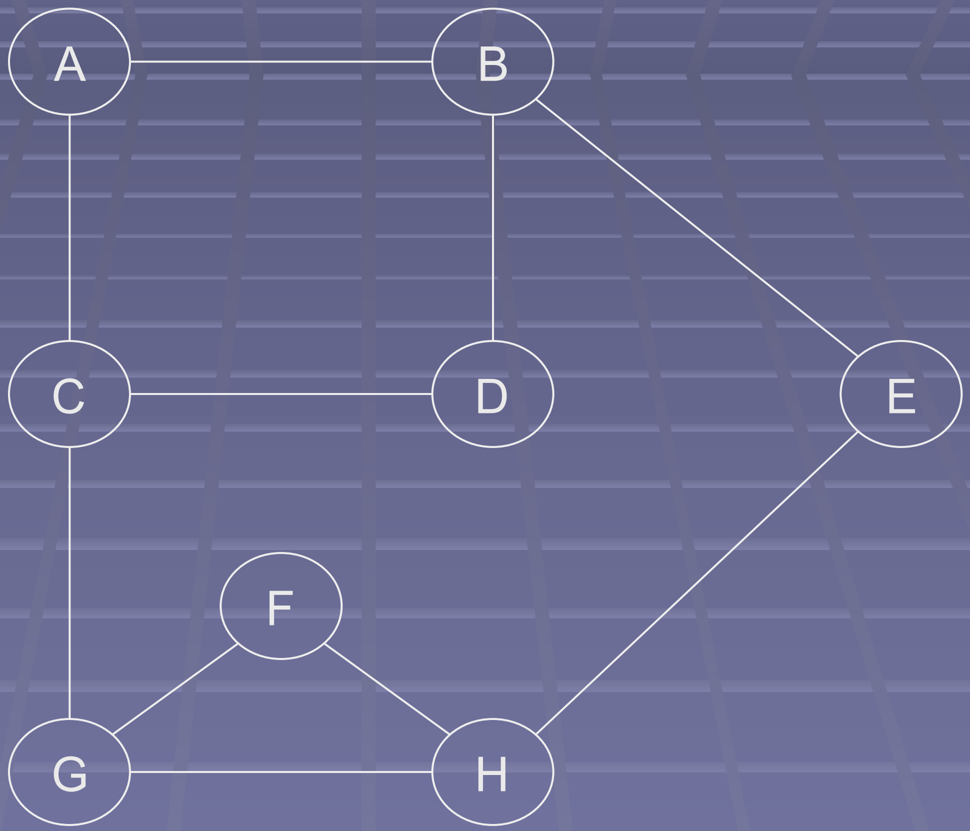
- On note S_1 l'ensemble des sommets de valence impaire.
- On construit le graphe $\mathcal{G}_1$:
  - *complet* (les sommets sont 2 à 2 adjacents)
  - *simple* (aucune arête de s à s)
  - de sommets S_1.
- L'arête reliant deux sommets s et s' est pondérée par la longueur minimale de s à s' dans $\mathcal{G}$.

- *Définition :* Un *couplage parfait* de $\mathcal{G}_1$ est un ensemble constitué d'arêtes de $\mathcal{G}_1$, tel que chaque sommet de $\mathcal{G}_1$ est incident à une et une seule de ces arêtes.

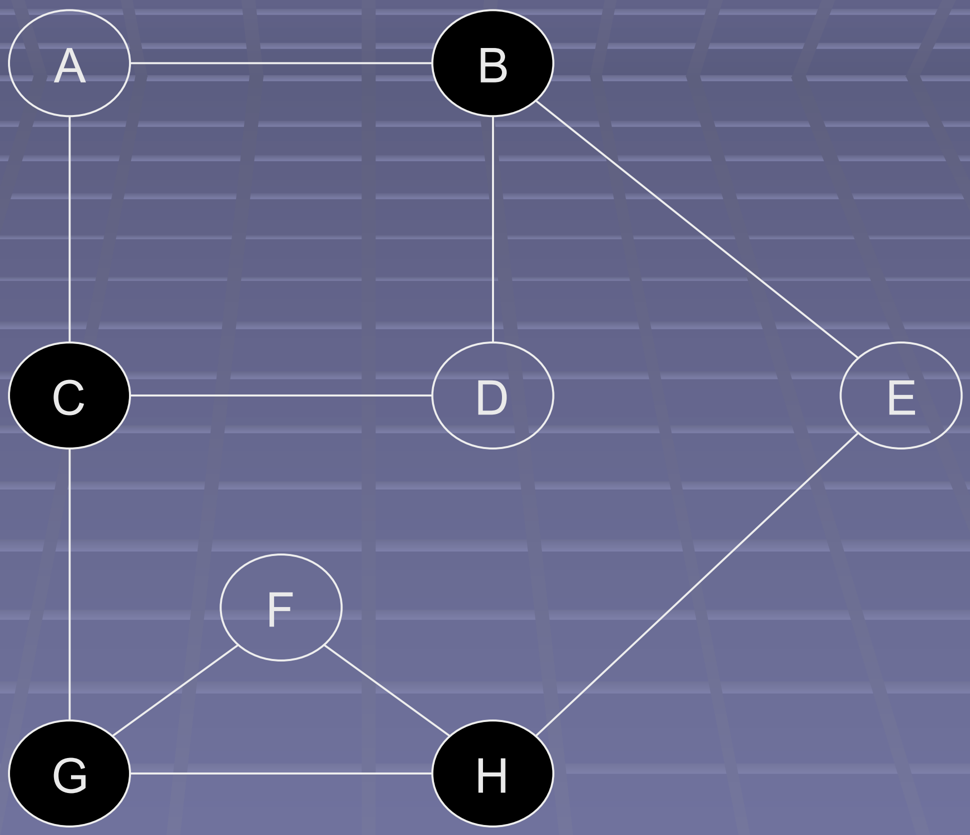
Solution au problème du camion d'épandage

- Trouver une solution optimale c'est trouver l'ensemble d'arêtes $\mathcal{A}_1$ (de coût minimal) à dupliquer…
- …C'est trouver un couplage parfait de $\mathcal{G}_1$ de coût minimal…
- …chaque arête du couplage correspond à un chemin géodésique …
- $\mathcal{A}_1$ est la réunion des arêtes constituant les chemins associés aux arêtes d'un couplage parfait de coût optimal.
- Par construction le graphe obtenu $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \mathcal{A}$ a tous ses sommets de valence paire et donc contient un cycle eulérien.

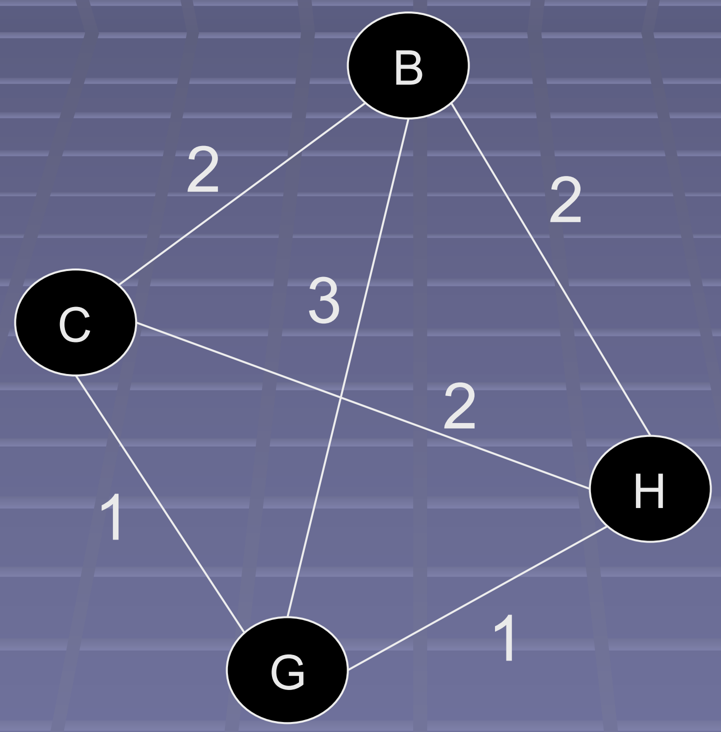
Exemple : Ici, toutes les arêtes sont de poids 1.

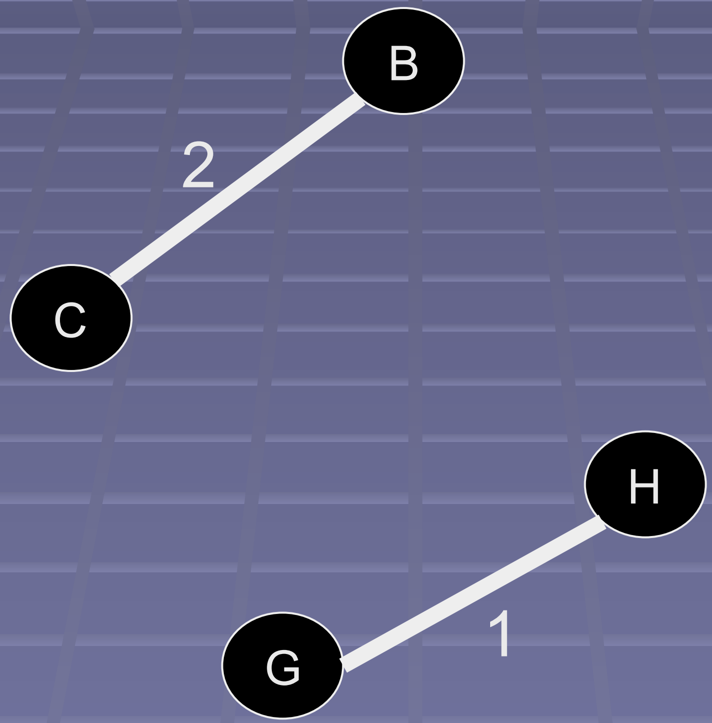


Exemple : Ici, toutes les arêtes sont de poids 1.

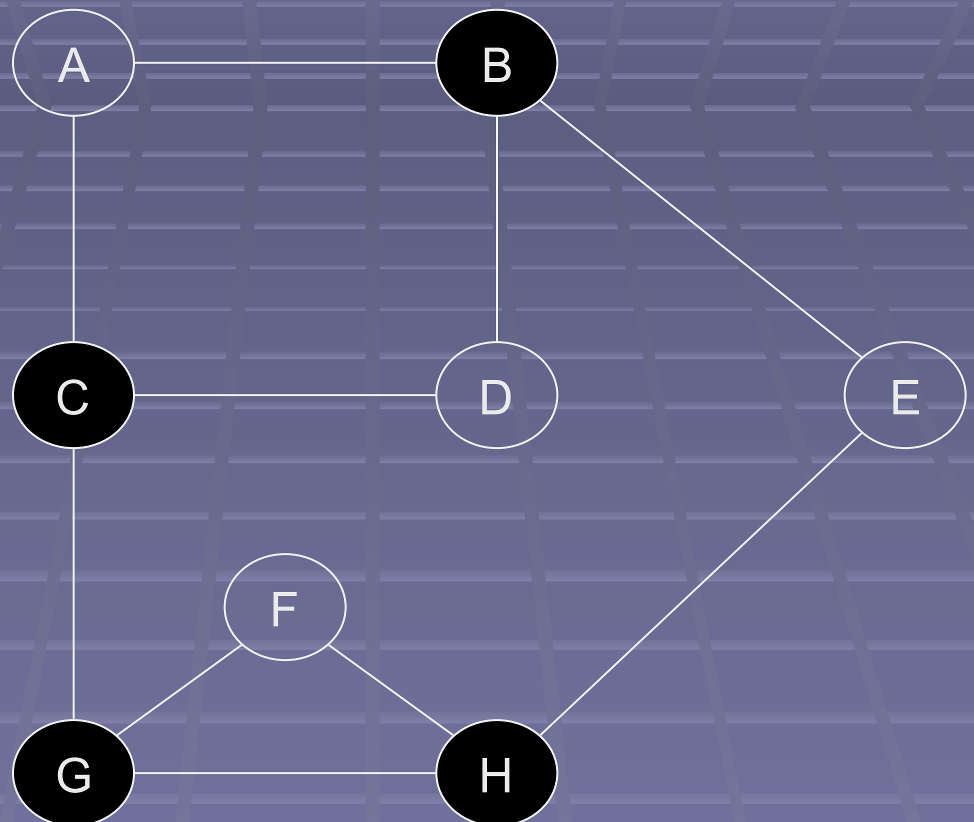


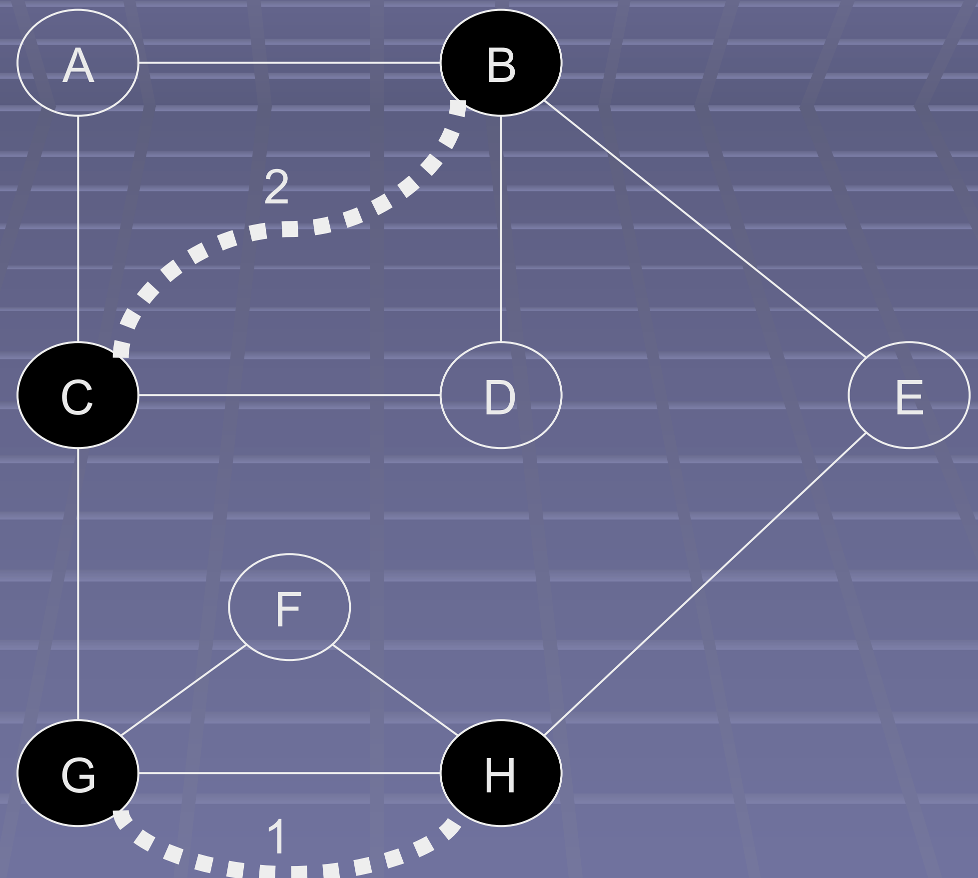
4 sommets de valence impaire : ne contient pas de cycle eulérien


B
C
H
G
2
2
3
2
1
1

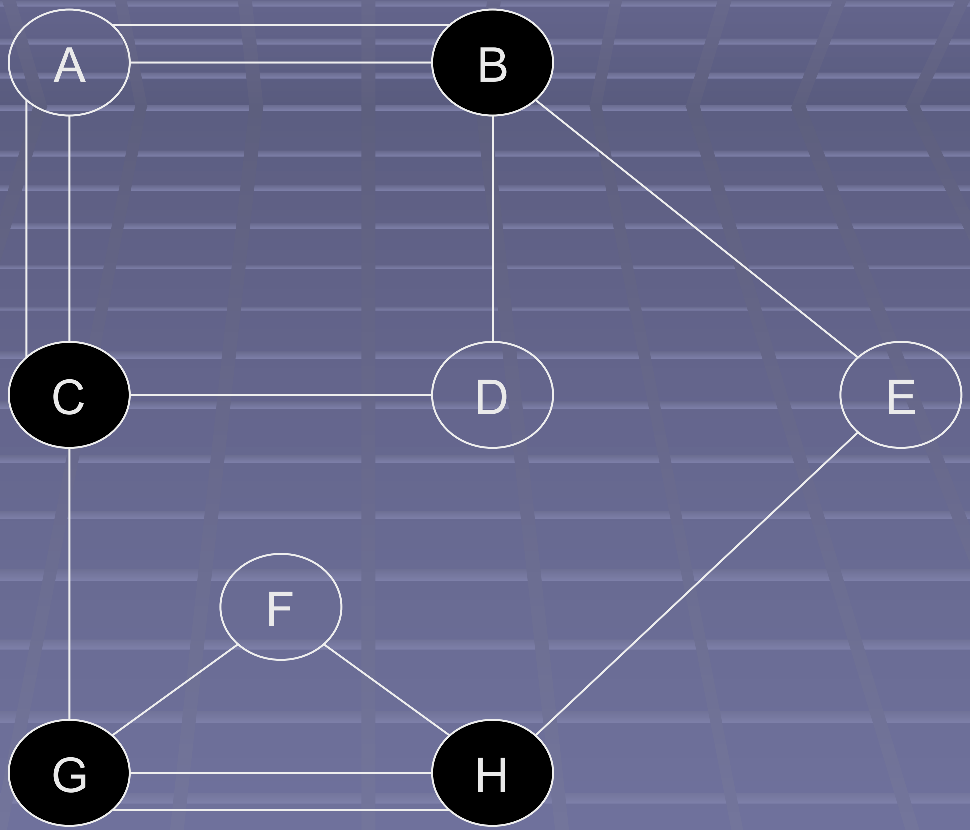


Un couplage parfait de coût minimal = 3

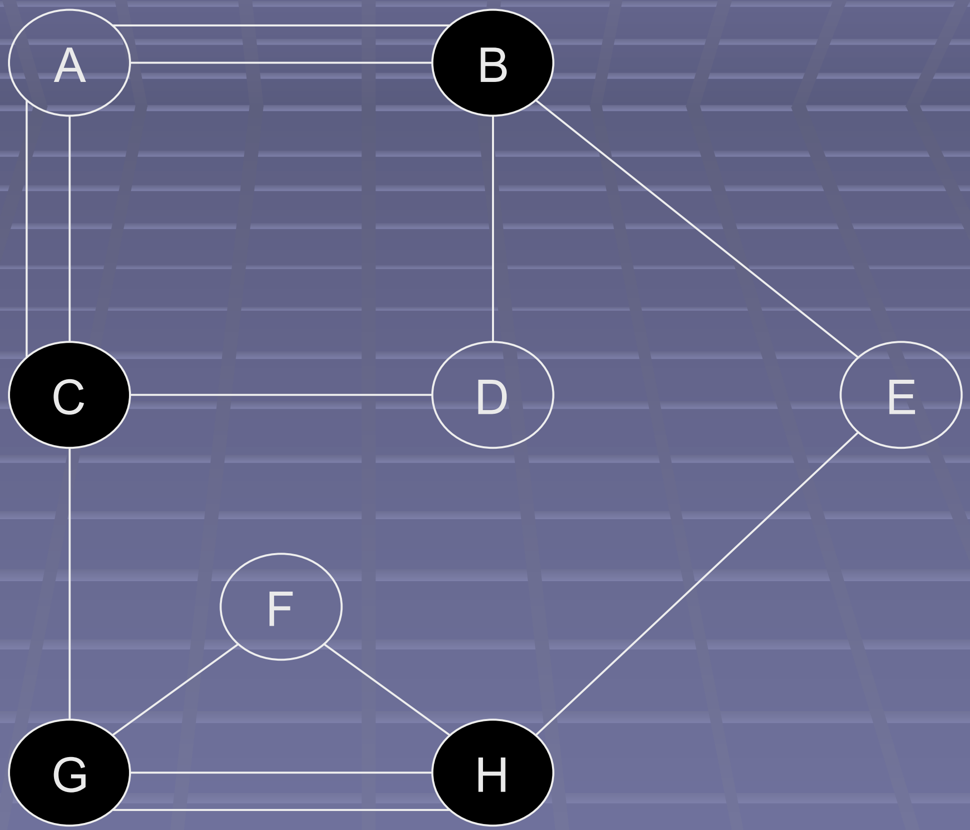

A
B
C
D
E
F
G
H



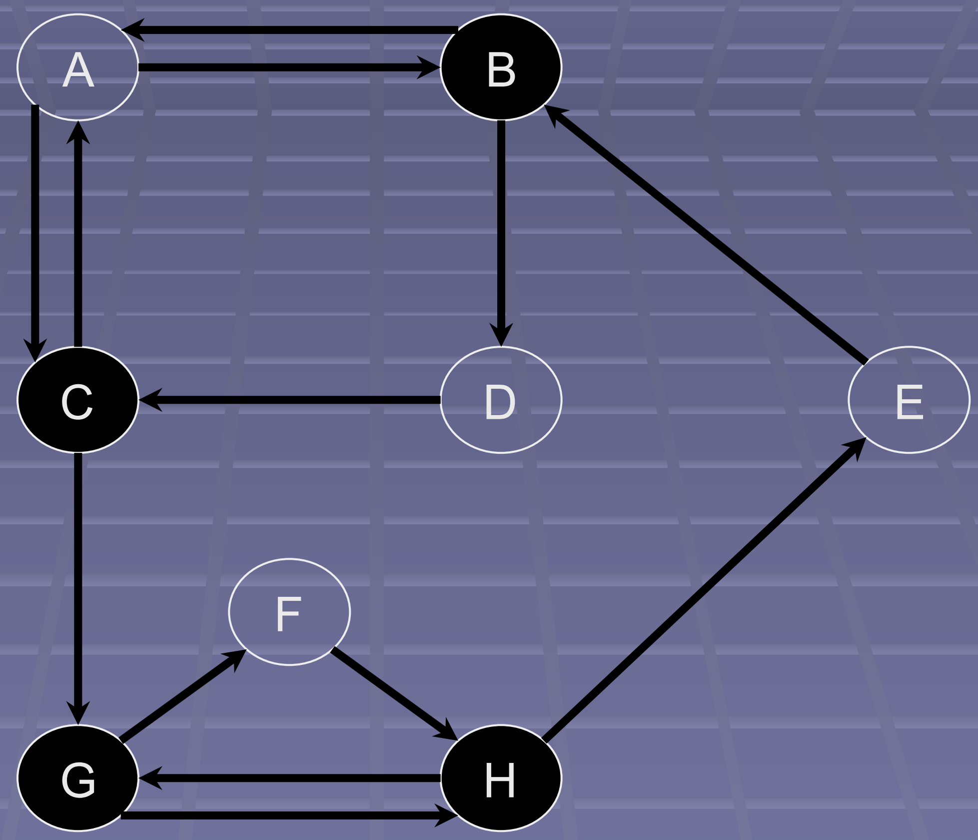
On se souvient du couplage parfait de coût minimal..



On duplique les arêtes provenant de chemins associés au couplage …



Le graphe obtenu est eulérien …



La solution est optimale, de sur-coût 3

Compléxité

- $O(\#\mathcal{A} + \#\mathcal{S}) = O(\#\mathcal{A})$ opérations pour déterminer $\mathcal{S}_1$.
- On applique $\#\mathcal{S}_1$ fois l'algorithme de Dijkstra pour construire $\mathcal{G}_1$.

  Soit $O((\#\mathcal{S}_1)^3)$.

- Compléxité = $\max(\#\mathcal{A}, (\#\mathcal{S}_1)^3)$.
- Efficace lorsque peu de sommets de valence impaire...