Optimisation Continue : Introduction

Jean-Philippe Préaux

EOAA - 2009/10

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Formulation
- Problème d'optimisation
- Problèmes d'optimisation continue
- Extremum global/local

Exemples en dimension 1
- Fabrication de boîtes cylindriques
- Position d'équilibre de deux ressorts

Exemples en dimension supérieure
- Production optimale d'une fonderie
- Problème de transport
- Régression linéaire
- Modélisation de données expérimentales

Copyright : Jean Philippe Préaux

Problème d'optimisation

Soit n un entier strictement positif et soient :

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, et

$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles .

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème d'optimisation

Soit n un entier strictement positif et soient :

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, et

$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles .

• Un problème d'optimisation consiste à déterminer, lorsqu'il existe, un extremum, minimum ou maximum, de f sur $\mathcal{D}$. On note :

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) .$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème d'optimisation

Soit n un entier strictement positif et soient :

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \text{ un sous-ensemble non vide de } \mathbb{R}^n, \text{ et}$$

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une application sur } \mathcal{D} \text{ à valeurs réelles .}$$

• Un problème d'optimisation consiste à déterminer, lorsqu'il existe, un extremum, minimum ou maximum, de f sur $\mathcal{D}$. On note :

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \ .$$

• un minimum (ou minimum global) $\mathbf{u}$ de f sur $\mathcal{D}$ est un point $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$, tel que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $f(\mathbf{u}) \leqslant f(\mathbf{x})$,

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème d'optimisation

Soit n un entier strictement positif et soient :

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \text{ un sous-ensemble non vide de } \mathbb{R}^n, \text{ et}$$

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une application sur } \mathcal{D} \text{ à valeurs réelles .}$$

• Un problème d'optimisation consiste à déterminer, lorsqu'il existe, un extremum, minimum ou maximum, de f sur $\mathcal{D}$. On note :

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \ .$$

• un minimum (ou minimum global) $\mathbf{u}$ de f sur $\mathcal{D}$ est un point $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$, tel que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $f(\mathbf{u}) \leqslant f(\mathbf{x})$,

• un maximum (ou minimum global) $\mathbf{u}$ de f sur $\mathcal{D}$ est un point $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$, tel que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $f(\mathbf{u}) \geqslant f(\mathbf{x})$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème d'optimisation

Soit n un entier strictement positif et soient :

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \text{ un sous-ensemble non vide de } \mathbb{R}^n, \text{ et}$$

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une application sur } \mathcal{D} \text{ à valeurs réelles .}$$

• Un problème d'optimisation consiste à déterminer, lorsqu'il existe, un extremum, minimum ou maximum, de f sur $\mathcal{D}$. On note :

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) .$$

• un minimum (ou minimum global) $\mathbf{u}$ de f sur $\mathcal{D}$ est un point $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$, tel que $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $f(\mathbf{u}) \leqslant f(\mathbf{x})$,

• un maximum (ou minimum global) $\mathbf{u}$ de f sur $\mathcal{D}$ est un point $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$, tel que $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $f(\mathbf{u}) \geqslant f(\mathbf{x})$.

• Lorsque l'inégalité est stricte $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{u}\}$ on parlera de minimum ou de maximum strict.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème d'optimisation

Soit n un entier strictement positif et soient :

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \text{ un sous-ensemble non vide de } \mathbb{R}^n, \text{ et}$$

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une application sur } \mathcal{D} \text{ à valeurs réelles .}$$

• Un problème d'optimisation consiste à déterminer, lorsqu'il existe, un extremum, minimum ou maximum, de f sur $\mathcal{D}$. On note :

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \ .$$

• L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé le domaine admissible,

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème d'optimisation

Soit n un entier strictement positif et soient :

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \text{ un sous-ensemble non vide de } \mathbb{R}^n, \text{ et}$$

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une application sur } \mathcal{D} \text{ à valeurs réelles .}$$

• Un problème d'optimisation consiste à déterminer, lorsqu'il existe, un extremum, minimum ou maximum, de f sur $\mathcal{D}$. On note :

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \ .$$

• L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé le domaine admissible,

• la fonction f à minimiser est la fonction coût, ou à maximiser la fonction objectif (ou fonction économique).

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème d'optimisation

Soit n un entier strictement positif et soient :

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \text{ un sous-ensemble non vide de } \mathbb{R}^n, \text{ et}$$

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ une application sur } \mathcal{D} \text{ à valeurs réelles .}$$

• Un problème d'optimisation consiste à déterminer, lorsqu'il existe, un extremum, minimum ou maximum, de f sur $\mathcal{D}$. On note :

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \ .$$

• L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé le domaine admissible,
• la fonction f à minimiser est la fonction coût, ou à maximiser la fonction objectif (ou fonction économique).

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} f(\mathbf{x}) \iff \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} -f(\mathbf{x}) \ .$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Optimisation combinatoire/continue

L'optimisation se scinde essentiellement en deux disciplines dont les outils et méthodes sont très disparates :

Si $\mathcal{D}$ est discret ($\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^n$, fini ou dénombrable), on parle d'**optimisation combinatoire**. Les outils proviennent essentiellement des mathématiques discrètes (théorie des graphes).

Si $\mathcal{D}$ est continu, et f est continue, on parle d'**optimisation continue**. Les outils proviennent essentiellement de l'analyse (calcul différentiel, convexité) et de l'algèbre linéaire.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Optimisation combinatoire/continue

L'optimisation se scinde essentiellement en deux disciplines dont les outils et méthodes sont très disparates :

Si $\mathcal{D}$ est discret ($\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^n$, fini ou dénombrable), on parle d'**optimisation combinatoire**. Les outils proviennent essentiellement des mathématiques discrètes (théorie des graphes).

Si $\mathcal{D}$ est continu, et f est continue, on parle d'**optimisation continue**. Les outils proviennent essentiellement de l'analyse (calcul différentiel, convexité) et de l'algèbre linéaire.

Ce cours ne traitera que de l'optimisation continue.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Applications contraintes

En optimisation continue, le domaine admissible $\mathcal{D}$ est donné sous la forme :
soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \mid \\ \underbrace{\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, p}_{\text{contraintes inégalitaires}}, \\ \underbrace{\psi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, q}_{\text{contraintes égalitaires}} \end{array} \right\}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Applications contraintes

En optimisation continue, le domaine admissible $\mathcal{D}$ est donné sous la forme :
soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \mid \\ \underbrace{\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, p}_{\text{contraintes inégalitaires}}, \\ \underbrace{\psi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, q}_{\text{contraintes égalitaires}} \end{array} \right\}$$

Les applications φ_i, ψ_j sont appelées les applications contraintes inégalitaires et égalitaires.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Classes importantes de problèmes d'optimisation

On se restreint à des sous classes de problèmes en posant des hypothèses sur les applications f, φ_i, ψ_j. On parle de :

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Classes importantes de problèmes d'optimisation

On se restreint à des sous classes de problèmes en posant des hypothèses sur les applications f, φ_i, ψ_j. On parle de :

- **Programmation linéaire** : lorsque f, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, $\psi_1, \ldots, \psi_q$ sont des applications affines et $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Classes importantes de problèmes d'optimisation

On se restreint à des sous classes de problèmes en posant des hypothèses sur les applications f, φ_i, ψ_j. On parle de :

- **Programmation linéaire** : lorsque f, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, $\psi_1, \ldots, \psi_q$ sont des applications affines et $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.
- **Programmation quadratique** : lorsque f est une application quadratique, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, $\psi_1, \ldots, \psi_q$ sont des applications affines et $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Classes importantes de problèmes d'optimisation

On se restreint à des sous classes de problèmes en posant des hypothèses sur les applications f, φ_i, ψ_j. On parle de :

- **Programmation linéaire** : lorsque f, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, $\psi_1, \ldots, \psi_q$ sont des applications affines et $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.
- **Programmation quadratique** : lorsque f est une application quadratique, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, $\psi_1, \ldots, \psi_q$ sont des applications affines et $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.
- **Programmation convexe** : problème de minimisation, lorsque f et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont des applications convexes, $\psi_1, \ldots, \psi_q$ sont des applications affines, et $\mathcal{U}$ est convexe.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Classes importantes de problèmes d'optimisation

On se restreint à des sous classes de problèmes en posant des hypothèses sur les applications f, φ_i, ψ_j. On parle de :

- **Programmation linéaire** : lorsque $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_q$ sont des applications affines et $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.
- **Programmation quadratique** : lorsque f est une application quadratique, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_q$ sont des applications affines et $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.
- **Programmation convexe** : problème de minimisation, lorsque f et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont des applications convexes, $\psi_1, \ldots, \psi_q$ sont des applications affines, et $\mathcal{U}$ est convexe.

Nous allons établir des méthodes générales et des algorithmes pour les résoudre.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

extremum local

L'application f sera en général supposée différentiable. On dispose alors d'outils pour rechercher ses extremas locaux.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

extremum local

L'application f sera en général supposée différentiable. On dispose alors d'outils pour rechercher ses extremas locaux.

- Un point $\mathbf{u} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est un minimum local de f sur $\mathcal{D}$ si il existe un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{u}) \cap \mathcal{D}$, $f(\mathbf{u}) \leqslant f(\mathbf{x})$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

extremum local

L'application f sera en général supposée différentiable. On dispose alors d'outils pour rechercher ses extremas locaux.

- Un point $\mathbf{u} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est un minimum local de f sur $\mathcal{D}$ si il existe un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{u}) \cap \mathcal{D}$, $f(\mathbf{u}) \leqslant f(\mathbf{x})$.
- Un point $\mathbf{u} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est un maximum local de f sur $\mathcal{D}$ si il existe un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{u}) \cap \mathcal{D}$, $f(\mathbf{u}) \geqslant f(\mathbf{x})$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

extremum local

L'application f sera en général supposée différentiable. On dispose alors d'outils pour rechercher ses extremas locaux.

- Un point $\mathbf{u} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est un minimum local de f sur $\mathcal{D}$ si il existe un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{u}) \cap \mathcal{D}$, $f(\mathbf{u}) \leqslant f(\mathbf{x})$.
- Un point $\mathbf{u} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est un maximum local de f sur $\mathcal{D}$ si il existe un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{u}) \cap \mathcal{D}$, $f(\mathbf{u}) \geqslant f(\mathbf{x})$.
- Lorsque les inégalités sont strictes $\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{u}) \cap \mathcal{D} \setminus \{\mathbf{u}\}$ on parle de minimum local ou de maximum local strict.

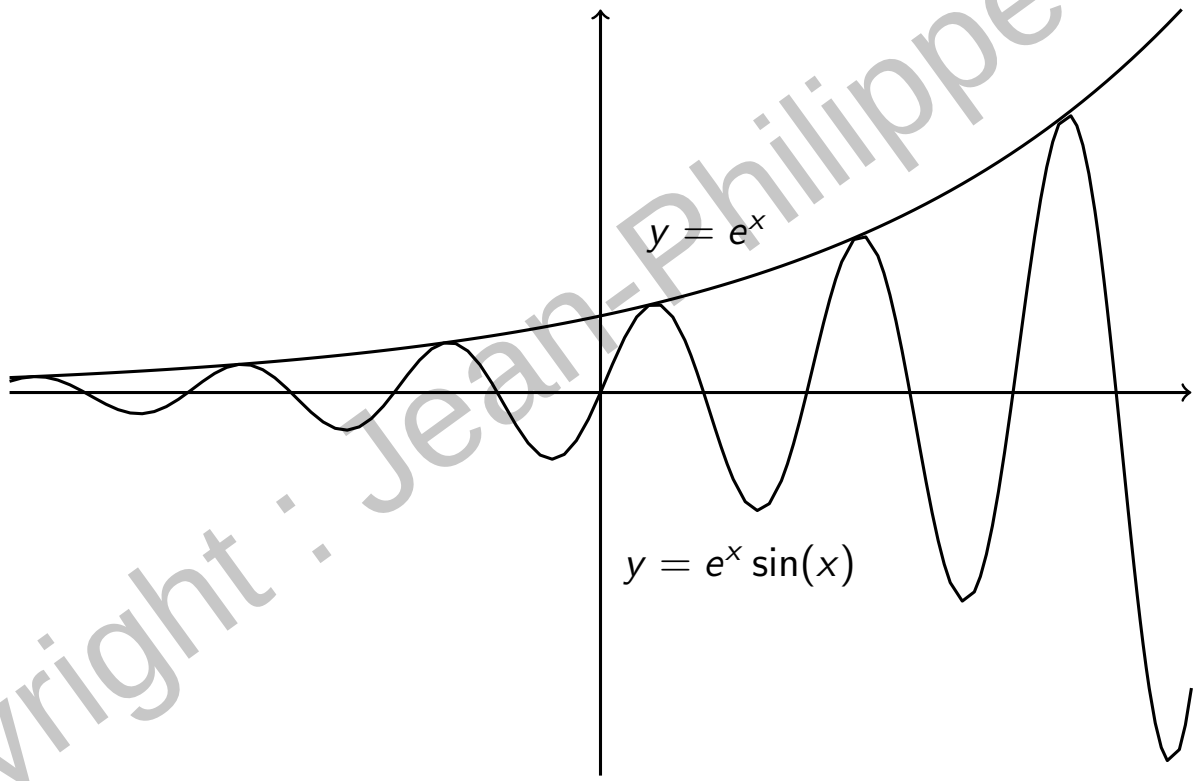
Copyright : Jean-Philippe Préaux

Clairement **tout extremum global est aussi un extremum local** (prendre $\mathcal{V}(\mathbf{u}) = \mathbb{R}^n$).

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Clairement **tout extremum global est aussi un extremum local** (prendre $\mathcal{V}(\mathbf{u}) = \mathbb{R}^n$).

La réciproque est fausse :



L'application $x \longrightarrow e^x \sin(x)$ a une infinité de minima locaux et de maxima locaux mais aucun extremum global.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Condition d'Euler

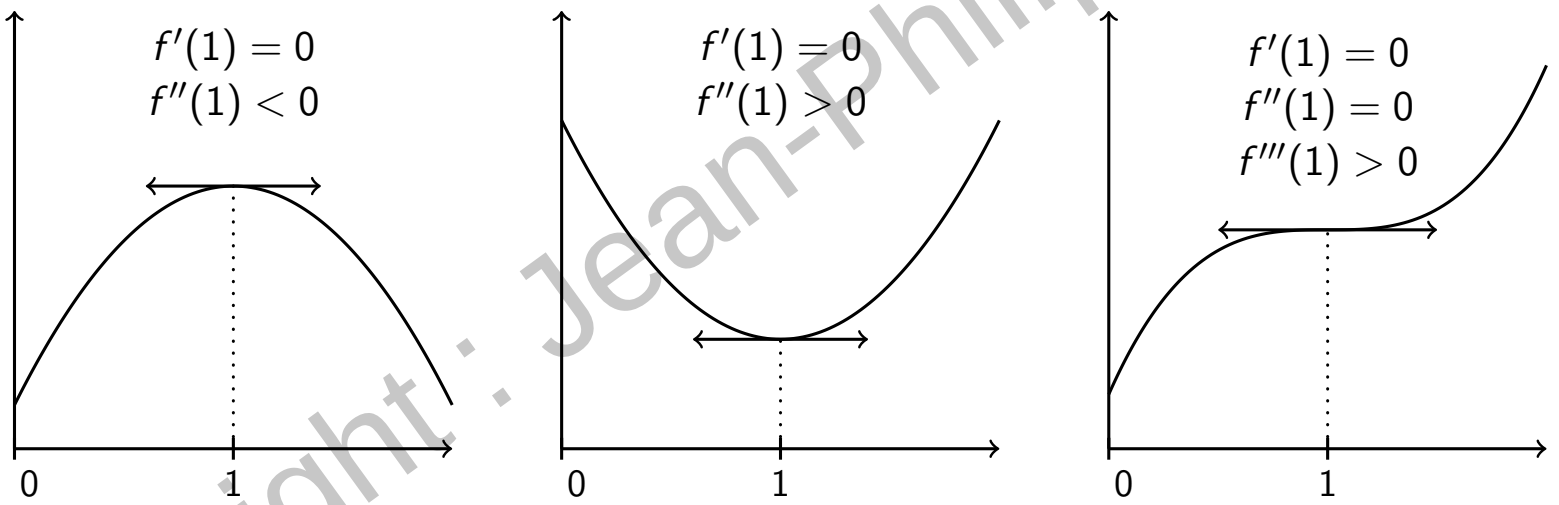
Sur un ouvert, et si f est différentiable, en un extremum local les dérivées partielles de f s'annulent : c'est la **condition d'Euler**.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Condition d'Euler

Sur un ouvert, et si f est différentiable, en un extremum local les dérivées partielles de f s'annulent : c'est la **condition d'Euler**.

C'est une condition nécessaire non suffisante :



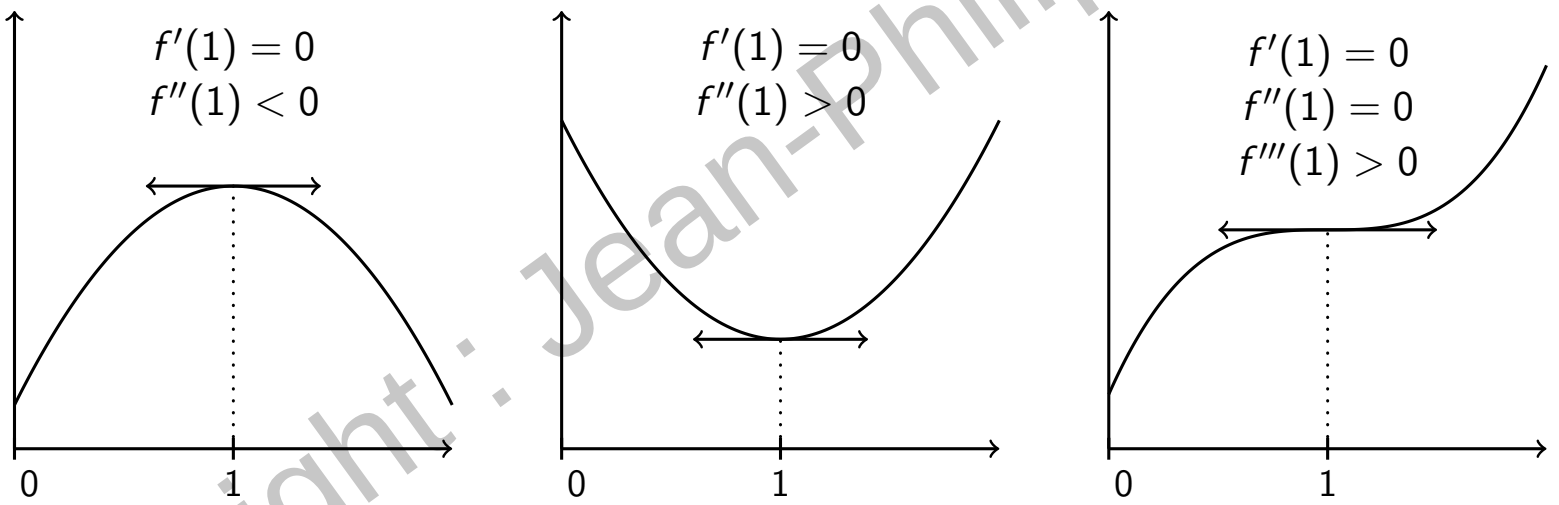
Trois types de points critiques pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: un maximum local, un minimum local et un point d'inflexion.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Condition d'Euler

Sur un ouvert, et si f est différentiable, en un extremum local les dérivées partielles de f s'annulent : c'est la **condition d'Euler**.

C'est une condition nécessaire non suffisante :



Trois types de points critiques pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: un maximum local, un minimum local et un point d'inflexion.

Il est utile de regarder les dérivées partielles secondes ; lorsque ces dernières s'annulent il faut regarder les dérivées d'ordre 3, *etc...*

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Extremum local de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ analytique

Théorème

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞. Soit $u \in \mathcal{U}$ en lequel au moins une des dérivées successives de f est non nulle.
Alors u est un extremum local de $f \Leftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$ impair tel que :

$$\forall\, i = 1, \ldots, n,\ f^{[i]}(u) = 0,\ \text{et}\ \ f^{[n+1]}(u) \neq 0$$

De plus si $f^{[n+1]}(u) > 0$ alors u est un minimum local et sinon c'est un maximum local.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Extremum local de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ analytique

Théorème

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞. Soit $u \in \mathcal{U}$ en lequel au moins une des dérivées successives de f est non nulle.
Alors u est un extremum local de $f \Leftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$ impair tel que :

$$\forall\, i = 1, \ldots, n,\ f^{[i]}(u) = 0,\ \textit{et}\ \ f^{[n+1]}(u) \neq 0$$

De plus si $f^{[n+1]}(u) > 0$ alors u est un minimum local et sinon c'est un maximum local.

- Sans utilité en dimension $n > 1$, (hormis jusqu'à l'ordre 2).

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Extremum local de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ analytique

Théorème

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞. Soit $u \in \mathcal{U}$ en lequel au moins une des dérivées successives de f est non nulle.
Alors u est un extremum local de $f \Leftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$ impair tel que :

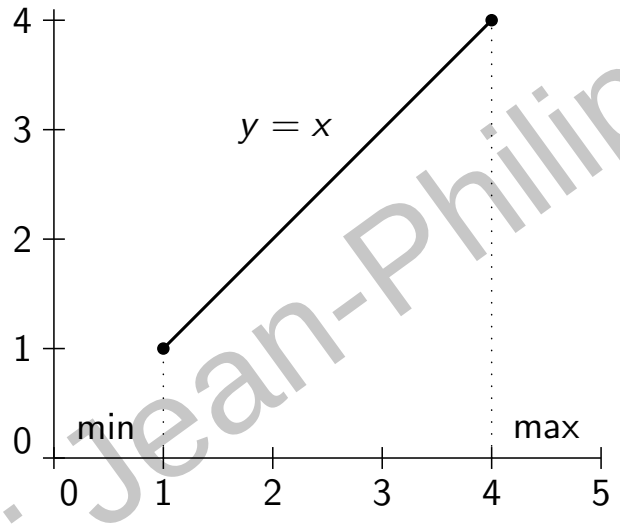
$$\forall\, i = 1, \ldots, n,\ f^{[i]}(u) = 0,\ \textit{et}\ \ f^{[n+1]}(u) \neq 0$$

De plus si $f^{[n+1]}(u) > 0$ alors u est un minimum local et sinon c'est un maximum local.

- Sans utilité en dimension $n > 1$, (hormis jusqu'à l'ordre 2).
- Parmi les extrema locaux déterminés, comment déterminer ce qui sont globaux ?

Copyright : Jean-Philippe Préaux

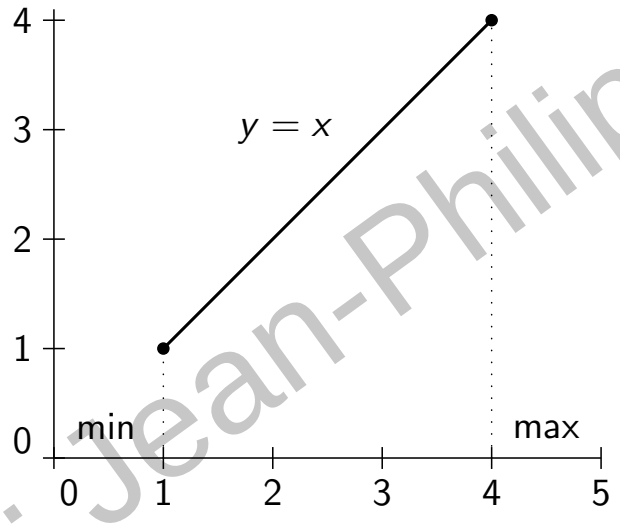
Attention sur un domaine non ouvert, un extremum local n'est pas un point critique :



Sur l'intervalle fermé $[1, 4]$ l'application dérivable $f(x) = x$ a un minimum en 1 et un maximum en 4, en lesquels la dérivée de f ne s'annule pas.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Attention sur un domaine non ouvert, un extremum local n'est pas un point critique :



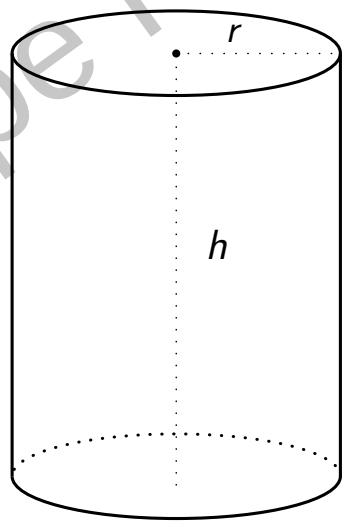
Sur l'intervalle fermé $[1, 4]$ l'application dérivable $f(x) = x$ a un minimum en 1 et un maximum en 4, en lesquels la dérivée de f ne s'annule pas.

Comment généraliser la condition d'Euler à un domaine non ouvert ?

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Fabrication de boîtes cylindriques

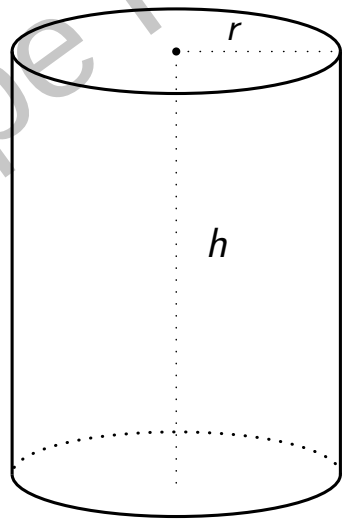
Dans la fabrication de boîtes de conserve cylindriques on minimise les coûts de matière première en cherchant le cylindre de surface minimale à volume constant. Considérons un cylindre, donné par sa hauteur h et le rayon r de sa base.



Copyright : Jean-Philippe Préaux

Fabrication de boîtes cylindriques

Dans la fabrication de boîtes de conserve cylindriques on minimise les coûts de matière première en cherchant le cylindre de surface minimale à volume constant. Considérons un cylindre, donné par sa hauteur h et le rayon r de sa base.

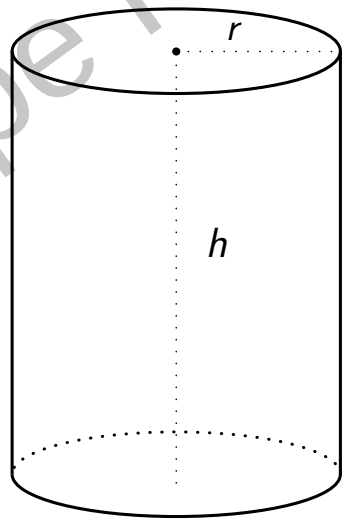


Le volume est : $\pi r^2 h = K = constante$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Fabrication de boîtes cylindriques

Dans la fabrication de boîtes de conserve cylindriques on minimise les coûts de matière première en cherchant le cylindre de surface minimale à volume constant. Considérons un cylindre, donné par sa hauteur h et le rayon r de sa base.

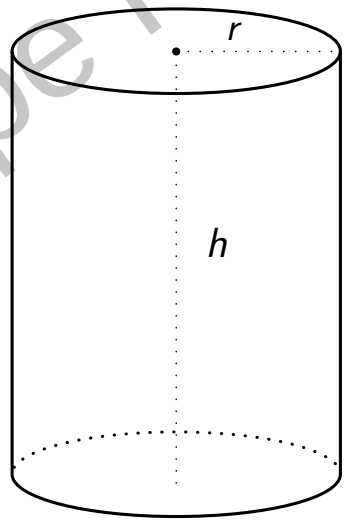


Le volume est : $\pi r^2 h = K = constante$. L'aire est : $2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Fabrication de boîtes cylindriques

Dans la fabrication de boîtes de conserve cylindriques on minimise les coûts de matière première en cherchant le cylindre de surface minimale à volume constant. Considérons un cylindre, donné par sa hauteur h et le rayon r de sa base.



Le volume est : $\pi r^2 h = K = constante$. L'aire est : $2\pi r^2 + 2\pi rh$.

$$\min_{r,h} 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$\pi r^2 h = K$$

$$r, h > 0$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On utilise la contrainte égalitaire pour se ramener à un problème à une variable :

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On utilise la contrainte égalitaire pour se ramener à un problème à une variable :

$$h = \frac{K}{\pi r^2} \Longrightarrow \text{Aire}(r) = 2\pi r^2 + \frac{2K}{r}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On utilise la contrainte égalitaire pour se ramener à un problème à une variable :

$$h = \frac{K}{\pi r^2} \implies \text{Aire}(r) = 2\pi r^2 + \frac{2K}{r}$$

On s'est ramené au problème équivalent :

$$\min_{r>0} A(r) = \pi r^2 + \frac{K}{r}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On utilise la contrainte égalitaire pour se ramener à un problème à une variable :

$$h = \frac{K}{\pi r^2} \implies \text{Aire}(r) = 2\pi r^2 + \frac{2K}{r}$$

On s'est ramené au problème équivalent :

$$\boxed{\min_{r>0} A(r) = \pi r^2 + \frac{K}{r}}$$

On étudie les variations de $A(r)$ (dérivable) :

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{K}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - K}{r^2}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On utilise la contrainte égalitaire pour se ramener à un problème à une variable :

$$h = \frac{K}{\pi r^2} \implies \text{Aire}(r) = 2\pi r^2 + \frac{2K}{r}$$

On s'est ramené au problème équivalent :

$$\boxed{\min_{r>0} A(r) = \pi r^2 + \frac{K}{r}}$$

On étudie les variations de $A(r)$ (dérivable) :

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{K}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - K}{r^2}$$

$$\implies A'(r) \geqslant 0 \iff r \geqslant \sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Variations de $A(r)$:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A		↘	$A_{\min}$	↗	

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Variations de $A(r)$:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A		↘	$A_{\min}$	↗	

Le minimum est :

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Variations de $A(r)$:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A		↘	$A_{\min}$	↗	

Le minimum est :

$$\boxed{r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}}$$

$$h_{\min} = \frac{K}{\pi^3 \frac{K^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{4K}{\pi}} \Longrightarrow \boxed{h_{\min} = 2r_{\min}}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Variations de $A(r)$:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}$		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A		↘	$A_{\min}$	↗	

Le minimum est :

$$\boxed{r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{K}{2\pi}}}$$

$$h_{\min} = \frac{K}{\pi^3 \frac{K^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{4K}{\pi}} \Longrightarrow \boxed{h_{\min} = 2r_{\min}}$$

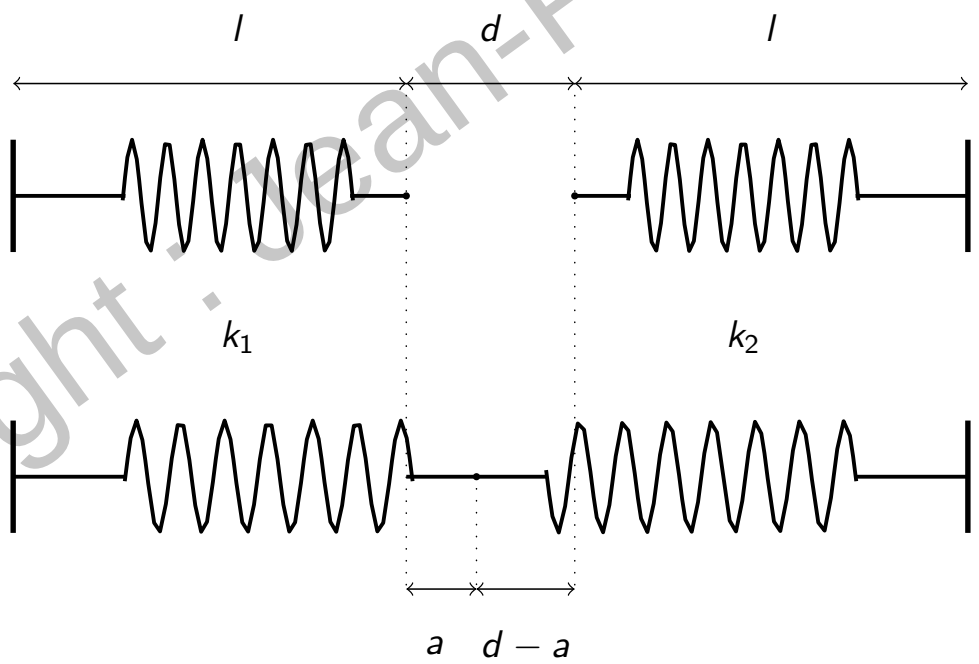
$$\text{Aire}_{\min} = 2\pi r_{\min}^2 + 2\pi r_{\min} h_{\min} = 2\pi \sqrt[3]{\frac{K^2}{4\pi^2}} + 4\pi \sqrt[3]{\frac{K^2}{4\pi^2}} = 3\sqrt[3]{\pi K^2}$$

$$\boxed{\text{Aire}_{\min} = 3\sqrt[3]{\pi K^2}} .$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Position d'équilibre de 2 ressorts

Deux ressorts de coefficients de tension k_1, k_2 et ayant même longueur à vide, ont chacun une extrémité fixe, et l'autre à distance mutuelle d. Lorsqu'on les attache par leur extrémité libre, comment s'exprime leur position d'équilibre ?



Copyright : Jean-Philippe Préaux

L'énergie potentielle à l'équilibre de chaque ressort est :

$$E_1 = \frac{1}{2} k_1 a^2 \qquad E_2 = \frac{1}{2} k_2 (a - d)^2$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

L'énergie potentielle à l'équilibre de chaque ressort est :

$$E_1 = \frac{1}{2} k_1 a^2 \qquad E_2 = \frac{1}{2} k_2 (a-d)^2$$

L'énergie totale du système est :

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}(k_1 a^2 + k_2 (a-d)^2)$$

Copyright : Jean Philippe Préaux

L'énergie potentielle à l'équilibre de chaque ressort est :

$$E_1 = \frac{1}{2}k_1 a^2 \qquad E_2 = \frac{1}{2}k_2(a-d)^2$$

L'énergie totale du système est :

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}(k_1 a^2 + k_2(a-d)^2)$$

La position d'équilibre est celle pour laquelle l'énergie potentielle du système est minimale.

Copyright : Jean Philippe Préaux

L'énergie potentielle à l'équilibre de chaque ressort est :

$$E_1 = \frac{1}{2}k_1 a^2 \qquad E_2 = \frac{1}{2}k_2(a-d)^2$$

L'énergie totale du système est :

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}(k_1 a^2 + k_2(a-d)^2)$$

La position d'équilibre est celle pour laquelle l'énergie potentielle du système est minimale.
On est amené à résoudre le problème d'optimisation :

$$\min_{0 \leqslant a \leqslant d} \quad E(a) = \left(k_1 a^2 + k_2(a-d)^2\right)$$

Copyright : Jean Philippe Préaux

$$E'(a) = 2(k_1 + k_2)a - 2k_2 d,$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$E'(a) = 2(k_1 + k_2)a - 2k_2 d,$$

donc $E'(a) \geqslant 0 \iff a \geqslant \dfrac{k_2}{k_1 + k_2} d.$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$E'(a) = 2(k_1 + k_2)a - 2k_2 d,$$

$$\text{donc } E'(a) \geqslant 0 \iff a \geqslant \frac{k_2}{k_1 + k_2} d.$$

a	0		$\frac{k_2 d}{k_1 + k_2}$		d
E'		$-$	0	$+$	
E	$k_2 d^2$	↘	$E_{\min}$	↗	$k_1 d^2$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$E'(a) = 2(k_1 + k_2)a - 2k_2 d,$$

$$\text{donc } E'(a) \geqslant 0 \iff a \geqslant \frac{k_2}{k_1 + k_2} d.$$

a	0		$\frac{k_2 d}{k_1 + k_2}$		d
E'		$-$	0	$+$	
E	$k_2 d^2$	↘	$E_{\min}$	↗	$k_1 d^2$

La position d'équilibre est atteinte pour :

$$a = \frac{k_2}{k_1 + k_2} d \qquad d - a = \frac{k_1}{k_1 + k_2} d$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Production optimale d'une fonderie

Une fonderie fabrique 3 qualités de bronze à partir de cuivre et d'étain, en proportions variables. Elle dispose d'une quantité mensuelle de 65 tonnes de cuivre et de 5 tonnes d'étain.

Qualité	Bénéfice brut (K€/t)	% cuivre	% étain
A	2	90	10
B	1.6	93	7
C	1.8	95	5

Quelle production maximise le bénéfice mensuel ?

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Notons :

– x la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité A.

– y la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité B.

– z la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité C.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Notons :

– x la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité A.

– y la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité B.

– z la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité C.

La fonction bénéfice brut mensuel à maximiser s'écrit :

$$f(x, y, z) = 2x + 1.6y + 1.8z$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Notons :

– x la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité A.

– y la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité B.

– z la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité C.

La fonction bénéfice brut mensuel à maximiser s'écrit :

$$f(x, y, z) = 2x + 1.6y + 1.8z$$

sous les contraintes inégalitaires :

$$\begin{aligned} 90x + 93y + 95z &\leqslant 6500 \\ 10x + 7y + 5z &\leqslant 500 \\ x, y, z &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Comment le résoudre ?

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Notons :

– x la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité A.

– y la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité B.

– z la quantité mensuelle produite (en t) de bronze de qualité C.

La fonction bénéfice brut mensuel à maximiser s'écrit :

$$f(x, y, z) = 2x + 1.6y + 1.8z$$

sous les contraintes inégalitaires :

$$\begin{aligned} 90x + 93y + 95z &\leqslant 6500 \\ 10x + 7y + 5z &\leqslant 500 \\ x, y, z &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Comment le résoudre ? Toutes les fonctions étant linéaires, on est dans le cadre de la programmation linéaire.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème de transport

On souhaite ravitailler en carburant 3 sites à partir de 2 dépôts de capacité limitée. L'acheminement en carburant d'un dépôt à un site a un coût unitaire. Le tableau suivant résume chacun de ces coûts ainsi que la demande de chaque site, et le stock disponible dans chaque dépôt.

	site 1	site 2	site 3	diponibilité
dépôt 1	10	12	9	300
dépôt 2	11	11	10	450
demande	200	250	250	

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème de transport

On souhaite ravitailler en carburant 3 sites à partir de 2 dépôts de capacité limitée. L'acheminement en carburant d'un dépôt à un site a un coût unitaire. Le tableau suivant résume chacun de ces coûts ainsi que la demande de chaque site, et le stock disponible dans chaque dépôt.

	site 1	site 2	site 3	diponibilité
dépôt 1	10	12	9	300
dépôt 2	11	11	10	450
demande	200	250	250	

Il s'agit d'un problème de transport.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Notons x_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ la quantité de carburants (en unité de volume) acheminée du dépôt i au site j.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Notons x_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ la quantité de carburants (en unité de volume) acheminée du dépôt i au site j. Fonction coût :

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 10x_{11}+12x_{12}+9x_{13}+11x_{21}+11x_{22}+10x_{23}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Notons x_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ la quantité de carburants (en unité de volume) acheminée du dépôt i au site j. Fonction coût :

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 10x_{11}+12x_{12}+9x_{13}+11x_{21}+11x_{22}+10x_{23}$$

– Contraintes égalitaires provenant de la demande :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 200 \\ x_{12} + x_{22} = 250 \\ x_{13} + x_{23} = 250 \end{cases}$$

– Contraintes inégalitaires provenant du stock disponible :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 450 \end{cases}$$

– Contraintes de signe : (S) $\quad x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geqslant 0.$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Notons x_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ la quantité de carburants (en unité de volume) acheminée du dépôt i au site j. Fonction coût :

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 10x_{11}+12x_{12}+9x_{13}+11x_{21}+11x_{22}+10x_{23}$$

– Contraintes égalitaires provenant de la demande :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 200 \\ x_{12} + x_{22} = 250 \\ x_{13} + x_{23} = 250 \end{cases}$$

– Contraintes inégalitaires provenant du stock disponible :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 450 \end{cases}$$

– Contraintes de signe : $(S) \quad x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geqslant 0.$

Il s'agit encore d'un problème de programmation linéaire.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Régression linéaire

On considère un nuage de points $(\mathbf{x}_n)_{n=1,..N}$ dans $\mathbb{R}^2$. On cherche la droite affine qui approche le mieux ce nuage de points au sens des moindres carrés.
Si l'on note $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)$, et $\Delta : y = \alpha x + \beta$, on cherche :

$$\min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{N} \|y_n - \alpha x_n - \beta\|^2$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Régression linéaire

On considère un nuage de points $(\mathbf{x}_n)_{n=1,..N}$ dans $\mathbb{R}^2$. On cherche la droite affine qui approche le mieux ce nuage de points au sens des moindres carrés.
Si l'on note $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)$, et $\Delta : y = \alpha x + \beta$, on cherche :

$$\min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{N} \|y_n - \alpha x_n - \beta\|^2$$

C'est équivalent au problème de programmation quadratique :

$$\min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{N} (y_n - \alpha x_n - \beta)^2$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Régression linéaire

On considère un nuage de points $(\mathbf{x}_n)_{n=1,..N}$ dans $\mathbb{R}^2$. On cherche la droite affine qui approche le mieux ce nuage de points au sens des moindres carrés.
Si l'on note $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)$, et $\Delta : y = \alpha x + \beta$, on cherche :

$$\min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{N} \|y_n - \alpha x_n - \beta\|^2$$

C'est équivalent au problème de programmation quadratique :

$$\min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{N} (y_n - \alpha x_n - \beta)^2$$

On verra pourquoi ce problème admet toujours une solution, et l'on retrouvera les formules bien connus de la droite de régression linéaire.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Modélisation de données expérimentales

On a effectué une série de p mesures physiques dépendant d'un paramètre.

paramètre	t_1	t_2	$\cdots$	t_p
valeur mesurée	y_1	y_2	$\cdots$	y_p

On souhaite modéliser ces données expérimentales par une application mathématique $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendant de paramètres réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.
On cherche les paramètres pour lesquels la fonction évaluée aux points $t_1, \ldots, t_p$ colle au mieux aux valeurs mesurées au sens des moindres carrés.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Modélisation de données expérimentales

On a effectué une série de p mesures physiques dépendant d'un paramètre.

paramètre	t_1	t_2	$\cdots$	t_p
valeur mesurée	y_1	y_2	$\cdots$	y_p

On souhaite modéliser ces données expérimentales par une application mathématique $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendant de paramètres réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.
On cherche les paramètres pour lesquels la fonction évaluée aux points $t_1, \ldots, t_p$ colle au mieux aux valeurs mesurées au sens des moindres carrés.

$$\min_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{N} (y_n - F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(x_n))^2$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

FIN DE L'INTRODUCTION.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Plan du cours

Chapitre 1 - Programmation linéaire.
Chapitre 2 - Généralités sur l'optimisation.
Chapitre 3 - Optimisation sous contrainte.
Chapitre 4 - Algorithmes itératifs.
Chapitre 5 - Applications aux Maths numériques.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Plan du cours

Chapitre 1 - Programmation linéaire.
Chapitre 2 - Généralités sur l'optimisation.
Chapitre 3 - Optimisation sous contrainte.
Chapitre 4 - Algorithmes itératifs.
Chapitre 5 - Applications aux Maths numériques.

Nous verrons la programmation linéaire, et comment résoudre ces problèmes grâce à la célèbre méthode du simplexe.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Plan du cours

Chapitre 1 - Programmation linéaire.
Chapitre 2 - Généralités sur l'optimisation.
Chapitre 3 - Optimisation sous contrainte.
Chapitre 4 - Algorithmes itératifs.
Chapitre 5 - Applications aux Maths numériques.

Nous verrons :

- des conditions assurant de l'existence d'extrema,
- comment rechercher des extrema locaux en l'absence de contraintes,
- la notion de convexité : dans ce cas tout extremum local est aussi global,
- ces notions s'appliquent à l'optimisation sans contrainte.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Plan du cours

Chapitre 1 - Programmation linéaire.
Chapitre 2 - Généralités sur l'optimisation.
Chapitre 3 - Optimisation sous contrainte.
Chapitre 4 - Algorithmes itératifs.
Chapitre 5 - Applications aux Maths numériques.

Comment généraliser les notions vues au chapitre 2 au cas sous contrainte.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Plan du cours

Chapitre 1 - Programmation linéaire.
Chapitre 2 - Généralités sur l'optimisation.
Chapitre 3 - Optimisation sous contrainte.
Chapitre 4 - Algorithmes itératifs.
Chapitre 5 - Applications aux Maths numériques.

Nous construirons divers algorithmes pour rechercher des extrema.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Plan du cours

Chapitre 1 - Programmation linéaire.
Chapitre 2 - Généralités sur l'optimisation.
Chapitre 3 - Optimisation sous contrainte.
Chapitre 4 - Algorithmes itératifs.
Chapitre 5 - Applications aux Maths numériques.

Nous appliquons les notions vues à diverses problèmes de Maths numériques.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Plan du cours

Chapitre 1 - Programmation linéaire.
Chapitre 2 - Généralités sur l'optimisation.
Chapitre 3 - Optimisation sous contrainte.
Chapitre 4 - Algorithmes itératifs.
Chapitre 5 - Applications aux Maths numériques.

Copyright : Jean-Philippe Préaux