III.1. - Optimisation sous contraintes égalitaires

Jean-Philippe Préaux

EOAA - 2009/10

Problème : Soit une application différentiable $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dont on cherche les extrema.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème : Soit une application différentiable $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dont on cherche les extrema.

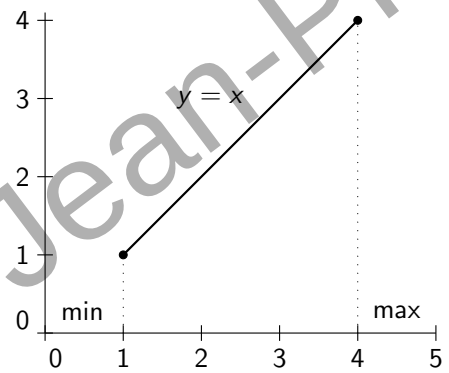
• Lorsque $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ les notions vues au chapitre II §2 s'appliquent pour étudier les extrema locaux, et en déduire (souvent) les extrema globaux de f.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème : Soit une application différentiable $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dont on cherche les extrema.

• Lorsque $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ les notions vues au chapitre II §2 s'appliquent pour étudier les extrema locaux, et en déduire (souvent) les extrema globaux de f.

• Lorsque $\mathcal{D}$ n'est pas un ouvert, ces notions sont insuffisantes pour étudier les extrema locaux de f.



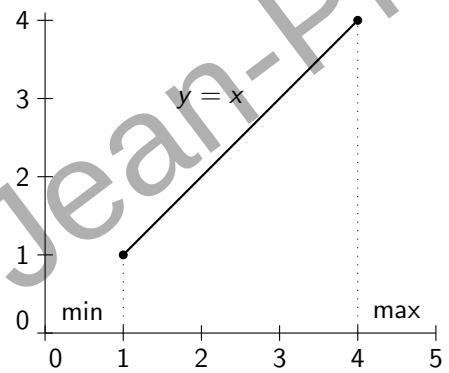
Sur $[1, 4]$ l'application dérivable $f(x) = x$ a un min en 1 et un max en 4, en lesquels sa dérivée ne s'annule pas.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème : Soit une application différentiable $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dont on cherche les extrema.

• Lorsque $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ les notions vues au chapitre II §2 s'appliquent pour étudier les extrema locaux, et en déduire (souvent) les extrema globaux de f.

• Lorsque $\mathcal{D}$ n'est pas un ouvert, ces notions sont insuffisantes pour étudier les extrema locaux de f.



Sur $[1, 4]$ l'application dérivable $f(x) = x$ a un min en 1 et un max en 4, en lesquels sa dérivée ne s'annule pas.

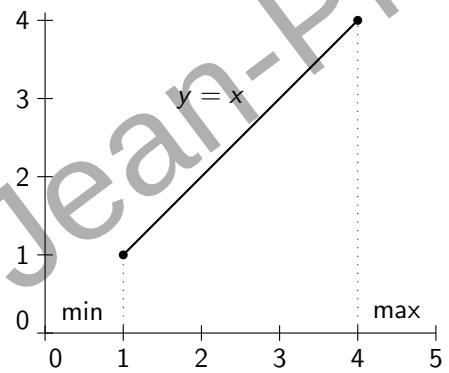
Comment généraliser les conditions du 1er et 2e ordre vues au chapitre II dans le cas sous contraintes ? C'est l'objet de ce chapitre.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Problème : Soit une application différentiable $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dont on cherche les extrema.

• Lorsque $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ les notions vues au chapitre II §2 s'appliquent pour étudier les extrema locaux, et en déduire (souvent) les extrema globaux de f.

• Lorsque $\mathcal{D}$ n'est pas un ouvert, ces notions sont insuffisantes pour étudier les extrema locaux de f.



Sur $[1, 4]$ l'application dérivable $f(x) = x$ a un min en 1 et un max en 4, en lesquels sa dérivée ne s'annule pas.

Comment généraliser les conditions du 1er et 2e ordre vues au chapitre II dans le cas sous contraintes ? C'est l'objet de ce chapitre. Dans un premier temps on se restreint à des contraintes égalitaires.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Etude sur des exemples
- Exemples
- Analyse

Condition de lagrange
- Condition de Lagrange
- Interprétation géométrique
- Lagrangien du problème
- Exemple

Prolongements de l'étude
- Contraintes affines
- Prise en compte de la convexité
- Conditions du second ordre
- Programmation quadratique

Exercices
- Exercice 1
- Exercice 2
- Exercice 3

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple A.

Soit

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

le cercle unité de centre $(0, 0)$. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x \ . \end{aligned}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple A.

Soit

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

le cercle unité de centre $(0, 0)$. Soit

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x \ . \end{aligned}$$

- L'application f n'a aucun point critique sur $\mathcal{D}$: $\nabla f(x, y) = (1, 0) \neq \mathbf{0}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple A.

Soit

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

le cercle unité de centre $(0, 0)$. Soit

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x \ . \end{aligned}$$

- L'application f n'a aucun point critique sur $\mathcal{D}$: $\nabla f(x, y) = (1, 0) \neq \mathbf{0}$.
- Or $\mathcal{D}$ est un compact (car fermé et borné) de $\mathbb{R}^n \implies \exists$ un minimum et un maximum de f sur $\mathcal{D}$. (On constate que l'équation d'Euler ne s'applique pas ici.)

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple A.

Soit

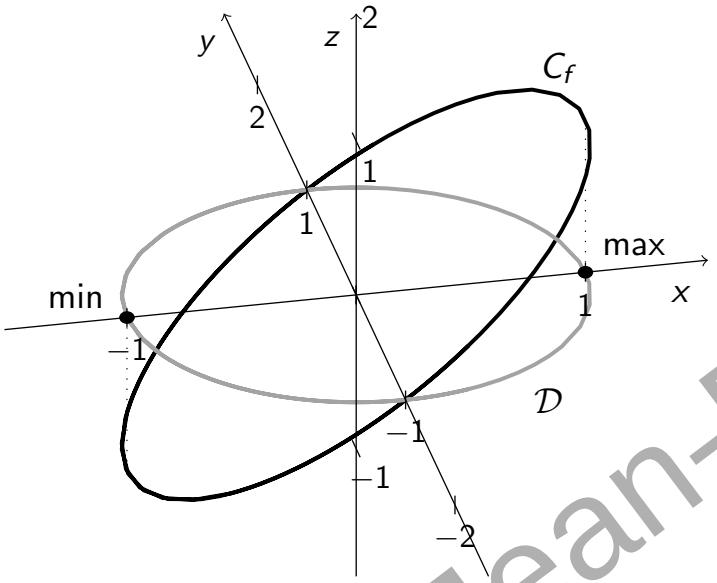
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

le cercle unité de centre $(0, 0)$. Soit

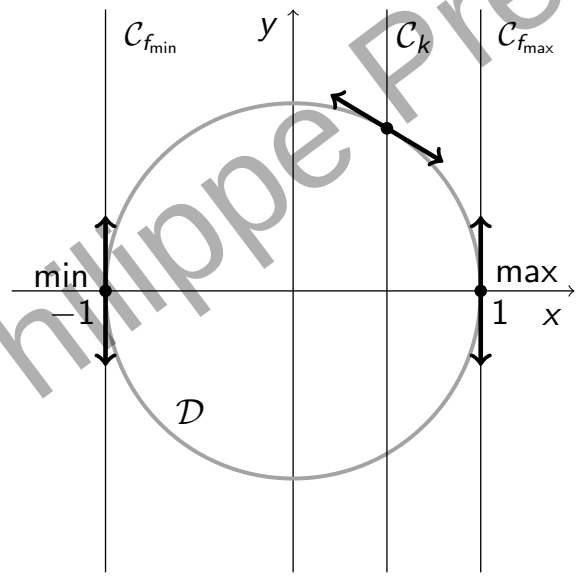
$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x \ . \end{aligned}$$

- L'application f n'a aucun point critique sur $\mathcal{D}$: $\nabla f(x, y) = (1, 0) \neq \mathbf{0}$.
- Or $\mathcal{D}$ est un compact (car fermé et borné) de $\mathbb{R}^n \implies \exists$ un minimum et un maximum de f sur $\mathcal{D}$. (On constate que l'équation d'Euler ne s'applique pas ici.)
- On a deux solutions évidentes, un maximum $(1, 0)$ et un minimum $(-1, 0)$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

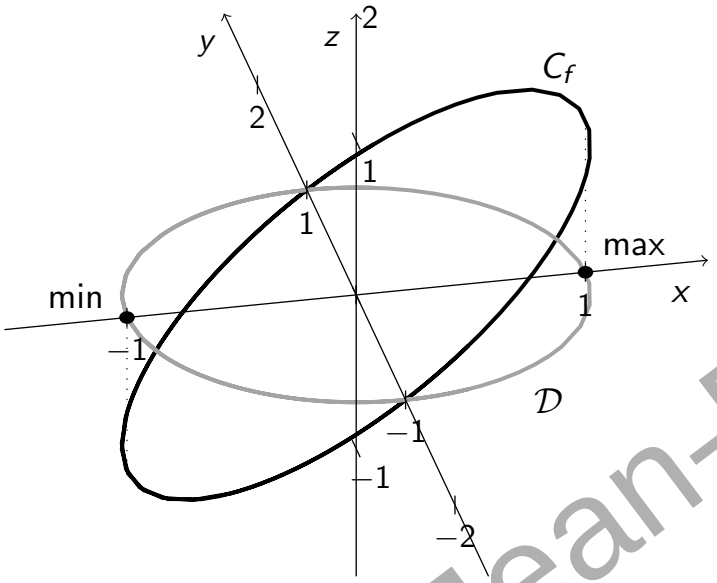


La courbe représentative C_f dans $\mathbb{R}^3$ de f au-dessus du domaine $\mathcal{D}$

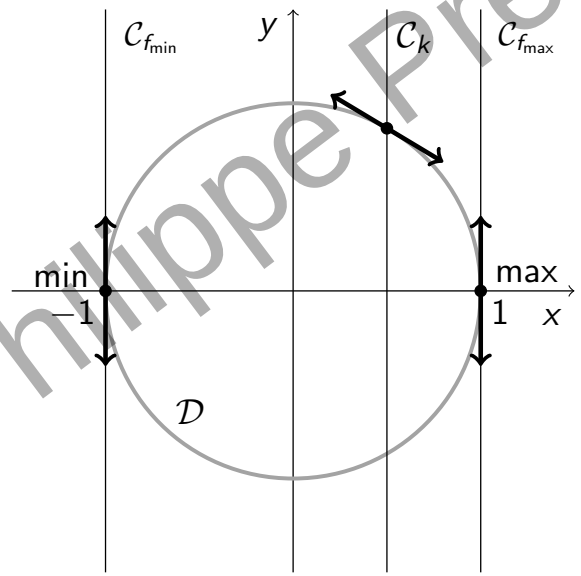


Le domaine $\mathcal{D}$ et les lignes de niveau dans $\mathbb{R}^2$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux



La courbe représentative C_f dans $\mathbb{R}^3$ de f au-dessus du domaine $\mathcal{D}$



Le domaine $\mathcal{D}$ et les lignes de niveau dans $\mathbb{R}^2$.

Graphiquement on constate qu'aux extrema de f les courbes de niveau sont tangentes au domaine $\mathcal{D}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple B.

Soit

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

et

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple B.

Soit

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

et

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

L'application f est coercive sur le fermé non borné $\mathcal{D}$ $\Longrightarrow$ $\exists$ un minimum et $\nexists$ de maximum de f sur $\mathcal{D}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple B.

Soit

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

et

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

L'application f est coercive sur le fermé non borné $\mathcal{D} \implies \exists$ un minimum et $\nexists$ de maximum de f sur $\mathcal{D}$.

On se ramène à un problème sans contrainte à une seule variable, en utilisant la contrainte pour supprimer une variable.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple B.

Soit

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

et

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

L'application f est coercive sur le fermé non borné $\mathcal{D}$ $\Longrightarrow$ $\exists$ un minimum et $\nexists$ de maximum de f sur $\mathcal{D}$.

On se ramène à un problème sans contrainte à une seule variable, en utilisant la contrainte pour supprimer une variable.
Soit $y = \frac{1}{x}$,

$$f_x : \mathbb{R}_* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On étudie les variations de f_x, sa dérivée est $f'_x(x) = 2\dfrac{x^4-1}{x^3}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On étudie les variations de f_x, sa dérivée est $f_x'(x) = 2\dfrac{x^4-1}{x^3}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_x'		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
f_x	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

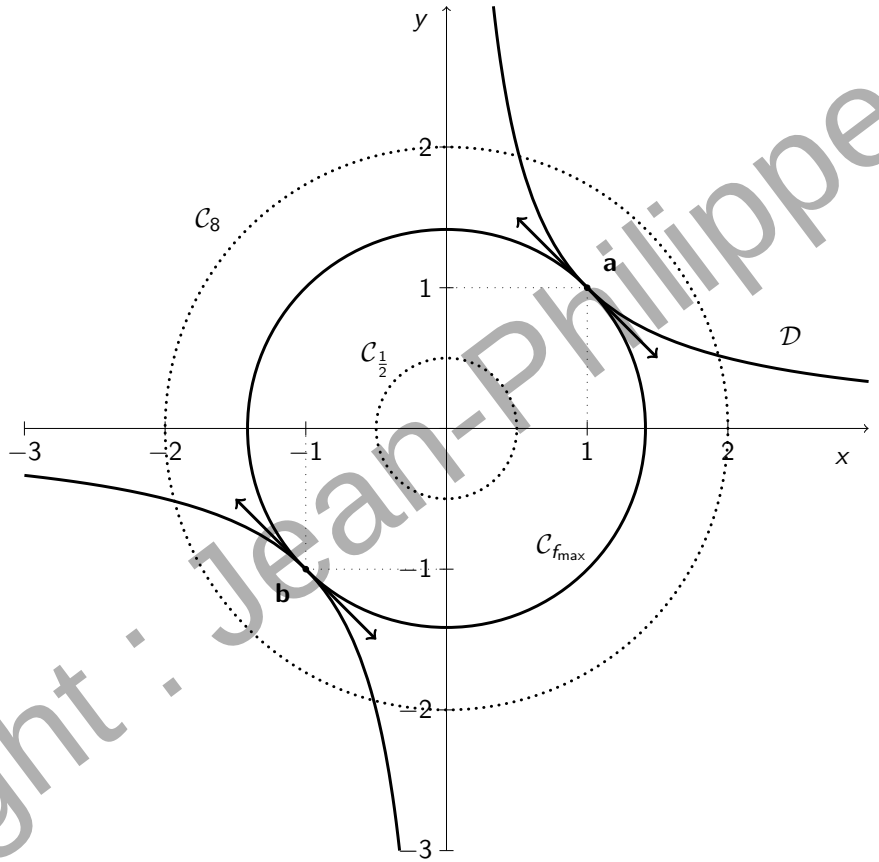
On étudie les variations de f_x, sa dérivée est $f'_x(x) = 2\dfrac{x^4-1}{x^3}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'_x		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
f_x	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi f_x a deux minima globaux : $x = \pm 1 \implies f$ a deux minima globaux sur $\mathcal{D}$: $\mathbf{a}(1,1)$ et $\mathbf{b}(-1,-1)$.

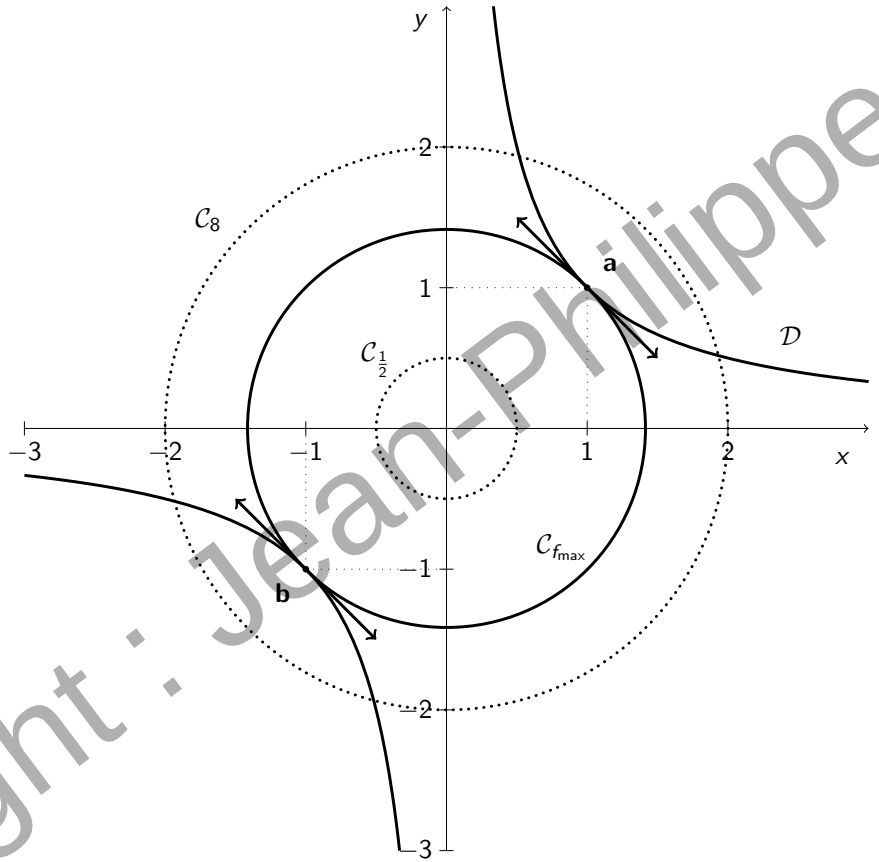
Copyright : Jean-Philippe Préaux

Dans $\mathbb{R}^2$ le domaine $\mathcal{D}$ ainsi que des courbes de niveau de f :



Copyright : Jean-Philippe Préaux

Dans $\mathbb{R}^2$ le domaine $\mathcal{D}$ ainsi que des courbes de niveau de f :



Une fois de plus aux extrema trouvés les courbes de niveau de f sont tangentes au domaine $\mathcal{D}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

• Que dire de cette constatation ? Est-ce une coïncidence ou un principe général ? Dans ce dernier cas est-ce une condition nécessaire, suffisante, à l'existence d'extrema ?

Copyright : Jean-Philippe Préaux

• Que dire de cette constatation ? Est-ce une coïncidence ou un principe général ? Dans ce dernier cas est-ce une condition nécessaire, suffisante, à l'existence d'extrema ?

Soit $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

• Que dire de cette constatation ? Est-ce une coïncidence ou un principe général ? Dans ce dernier cas est-ce une condition nécessaire, suffisante, à l'existence d'extrema ?

Soit $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$. $\nabla\varphi(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$ l'espace tangent à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{a}$ est une droite engendrée par un vecteur tangent $\mathbf{d_a} \neq \mathbf{0}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

• Que dire de cette constatation ? Est-ce une coïncidence ou un principe général ? Dans ce dernier cas est-ce une condition nécessaire, suffisante, à l'existence d'extrema ?

Soit $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$. $\nabla\varphi(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$ l'espace tangent à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{a}$ est une droite engendrée par un vecteur tangent $\mathbf{d_a} \neq \mathbf{0}$.
$\Longrightarrow$ $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ s'écrit $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{d_a} + o(|\lambda|)$, avec λ dans un voisinage de 0.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

• Que dire de cette constatation ? Est-ce une coïncidence ou un principe général ? Dans ce dernier cas est-ce une condition nécessaire, suffisante, à l'existence d'extrema ?

Soit $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$. $\nabla\varphi(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$ l'espace tangent à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{a}$ est une droite engendrée par un vecteur tangent $\mathbf{d_a} \neq \mathbf{0}$. $\Longrightarrow$ $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ s'écrit $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{d_a} + o(|\lambda|)$, avec λ dans un voisinage de 0. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1 :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}), \lambda\mathbf{d_a} \rangle + o(|\lambda|)$$
$$\approx f(\mathbf{a}) + \lambda\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{d_a} \rangle$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

• Que dire de cette constatation ? Est-ce une coïncidence ou un principe général ? Dans ce dernier cas est-ce une condition nécessaire, suffisante, à l'existence d'extrema ?

Soit $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$. $\nabla\varphi(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$ l'espace tangent à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{a}$ est une droite engendrée par un vecteur tangent $\mathbf{d_a} \neq \mathbf{0}$. $\Longrightarrow$ $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ s'écrit $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{d_a} + o(|\lambda|)$, avec λ dans un voisinage de 0. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}), \lambda\mathbf{d_a} \rangle + o(|\lambda|) \\ &\approx f(\mathbf{a}) + \lambda \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{d_a} \rangle \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ si $\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{d_a} \rangle \neq 0$, $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ ne garde pas un signe constant sur un voisinage de $\mathbf{a}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

• Que dire de cette constatation ? Est-ce une coïncidence ou un principe général ? Dans ce dernier cas est-ce une condition nécessaire, suffisante, à l'existence d'extrema ?

Soit $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$. $\nabla\varphi(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$ l'espace tangent à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{a}$ est une droite engendrée par un vecteur tangent $\mathbf{d_a} \neq \mathbf{0}$.
$\Longrightarrow$ $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ s'écrit $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{d_a} + o(|\lambda|)$, avec λ dans un voisinage de 0. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \langle \nabla f(\mathbf{a}), \lambda\mathbf{d_a} \rangle + o(|\lambda|) \\ &\approx f(\mathbf{a}) + \lambda \langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{d_a} \rangle \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ si $\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{d_a} \rangle \neq 0$, $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ ne garde pas un signe constant sur un voisinage de $\mathbf{a}$.
$\Longrightarrow$ si $\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{d_a} \rangle \neq 0$, $\mathbf{a}$ n'est pas un extremum local.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Or en **x** le vecteur gradient est orthogonal à la courbe de niveau.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Or en **x** le vecteur gradient est orthogonal à la courbe de niveau.

$\Longrightarrow$ Une condition nécessaire pour que **a** soit un extremum local est que la courbe de niveau passant par **a** soit tangente à $\mathcal{D}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Or en **x** le vecteur gradient est orthogonal à la courbe de niveau.

$\Longrightarrow$ Une condition nécessaire pour que **a** soit un extremum local est que la courbe de niveau passant par **a** soit tangente à $\mathcal{D}$.

On peut exprimer cette condition par une équation.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Or en $\mathbf{x}$ le vecteur gradient est orthogonal à la courbe de niveau.

$\Longrightarrow$ Une condition nécessaire pour que $\mathbf{a}$ soit un extremum local est que la courbe de niveau passant par $\mathbf{a}$ soit tangente à $\mathcal{D}$.

On peut exprimer cette condition par une équation. L'équation de la tangente à la courbe de niveau passant par $\mathbf{a}$ est :

$$\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Or en $\mathbf{x}$ le vecteur gradient est orthogonal à la courbe de niveau.

$\Longrightarrow$ Une condition nécessaire pour que $\mathbf{a}$ soit un extremum local est que la courbe de niveau passant par $\mathbf{a}$ soit tangente à $\mathcal{D}$.

On peut exprimer cette condition par une équation. L'équation de la tangente à la courbe de niveau passant par $\mathbf{a}$ est :

$$\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}.$$

L'équation de la tangente au domaine $\mathcal{D}$ en $\mathbf{a}$ est :

$$\langle \nabla \varphi(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Or en $\mathbf{x}$ le vecteur gradient est orthogonal à la courbe de niveau.

$\Longrightarrow$ Une condition nécessaire pour que $\mathbf{a}$ soit un extremum local est que la courbe de niveau passant par $\mathbf{a}$ soit tangente à $\mathcal{D}$.

On peut exprimer cette condition par une équation. L'équation de la tangente à la courbe de niveau passant par $\mathbf{a}$ est :

$$\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}.$$

L'équation de la tangente au domaine $\mathcal{D}$ en $\mathbf{a}$ est :

$$\langle \nabla \varphi(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}.$$

Cette condition nécessaire s'écrit : "$\nabla f(\mathbf{a})$ et $\nabla \varphi(\mathbf{a})$ sont colinéaires".

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Or en **x** le vecteur gradient est orthogonal à la courbe de niveau.

$\Longrightarrow$ Une condition nécessaire pour que **a** soit un extremum local est que la courbe de niveau passant par **a** soit tangente à $\mathcal{D}$.

On peut exprimer cette condition par une équation. L'équation de la tangente à la courbe de niveau passant par **a** est :

$$\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}.$$

L'équation de la tangente au domaine $\mathcal{D}$ en **a** est :

$$\langle \nabla \varphi(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}.$$

Cette condition nécessaire s'écrit : "$\nabla f(\mathbf{a})$ et $\nabla \varphi(\mathbf{a})$ sont colinéaires".

a extremum local $\Longrightarrow$ $\exists\, \lambda_1, \lambda_2$ non tous deux nuls, tels que :

$$\boxed{\lambda_1 \nabla f(\mathbf{a}) + \lambda_2 \nabla \varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Or en **x** le vecteur gradient est orthogonal à la courbe de niveau.

$\Longrightarrow$ Une condition nécessaire pour que **a** soit un extremum local est que la courbe de niveau passant par **a** soit tangente à $\mathcal{D}$.

On peut exprimer cette condition par une équation. L'équation de la tangente à la courbe de niveau passant par **a** est :

$$\langle \nabla f(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}.$$

L'équation de la tangente au domaine $\mathcal{D}$ en **a** est :

$$\langle \nabla \varphi(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}.$$

Cette condition nécessaire s'écrit : "$\nabla f(\mathbf{a})$ et $\nabla \varphi(\mathbf{a})$ sont colinéaires".

a extremum local $\Longrightarrow$ $\exists\, \lambda_1, \lambda_2$ non tous deux nuls, tels que :

$$\boxed{\lambda_1 \nabla f(\mathbf{a}) + \lambda_2 \nabla \varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}}$$

Généralisée dans $\mathbb{R}^n$, c'est la condition de Lagrange.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Condition de Lagrange

Théorème (Condition de Lagrange.)

Soient f une application différentiable sur un ouvert $\mathcal{U}$ non vide de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des applications de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \mid \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, p\}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Condition de Lagrange

Théorème (Condition de Lagrange.)

Soient f une application différentiable sur un ouvert $\mathcal{U}$ non vide de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des applications de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \mid \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, p\}$$

Si $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ est un extremum local de f sur $\mathcal{D}$, et si les vecteurs $\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ forment une famille linéairement indépendante, alors $\exists\,!\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que :

$$\nabla f(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla\varphi_i(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Il s'agit d'une condition nécessaire à l'existence d'un extremum local pour un problème sous contrainte égalitaire, généralisant l'équation d'Euler.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Il s'agit d'une condition nécessaire à l'existence d'un extremum local pour un problème sous contrainte égalitaire, généralisant l'équation d'Euler.

Preuve. Le fait que les vecteurs $\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ forment une famille linéairement indépendante implique que l'espace tangent à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{u}$ est :

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} &= <\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})>^{\perp} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid <\nabla\varphi_i(\mathbf{u}), \mathbf{x}> = 0, \forall\, i = 1, \ldots, p\} \end{aligned}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Il s'agit d'une condition nécessaire à l'existence d'un extremum local pour un problème sous contrainte égalitaire, généralisant l'équation d'Euler.

Preuve. Le fait que les vecteurs $\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ forment une famille linéairement indépendante implique que l'espace tangent à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{u}$ est :

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} &= <\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})>^{\perp} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid <\nabla\varphi_i(\mathbf{u}), \mathbf{x}> = 0, \forall\, i = 1, \ldots, p\} \end{aligned}$$

Un argument similaire à celui vu plus haut montre alors la conclusion. □

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Interprétation géométrique

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Interprétation géométrique

Si les vecteurs $\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ sont linéairement indépendants l'espace tangent $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{u}$ est :

$$T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla\varphi_i(\mathbf{u}), \mathbf{x}\rangle = 0, \forall\, i = 1, \ldots, p\} \ .$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Interprétation géométrique

Si les vecteurs $\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ sont linéairement indépendants l'espace tangent $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{u}$ est :

$$T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla\varphi_i(\mathbf{u}), \mathbf{x}\rangle = 0, \forall\, i = 1, \ldots, p\} \ .$$

Les conditions de Lagrange expriment qu'en un point extremum, le vecteur gradient est orthogonal à l'espace tangent.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Interprétation géométrique

Si les vecteurs $\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ sont linéairement indépendants l'espace tangent $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{u}$ est :

$$T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla\varphi_i(\mathbf{u}), \mathbf{x}\rangle = 0, \forall\, i = 1, \ldots, p\} \ .$$

Les conditions de Lagrange expriment qu'en un point extremum, le vecteur gradient est orthogonal à l'espace tangent.

Noter que $\nabla f(\mathbf{u})$ (resp. $-\nabla f(\mathbf{u})$) est la direction locale de plus grand accroissement (resp. de plus grande décroissance) de f, et qu'elle est orthogonale aux hypersurfaces de niveau.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Interprétation géométrique

Si les vecteurs $\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ sont linéairement indépendants l'espace tangent $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{u}$ est :

$$T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla\varphi_i(\mathbf{u}), \mathbf{x}\rangle = 0, \forall\, i = 1, \ldots, p\} \ .$$

Les conditions de Lagrange expriment qu'en un point extremum, le vecteur gradient est orthogonal à l'espace tangent.

Noter que $\nabla f(\mathbf{u})$ (resp. $-\nabla f(\mathbf{u})$) est la direction locale de plus grand accroissement (resp. de plus grande décroissance) de f, et qu'elle est orthogonale aux hypersurfaces de niveau.

Ainsi, on retrouve la constatation déjà faite, qu'en un extremum local l'hypersurface de niveau est tangente au domaine.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Formulation Lagrangienne

Le Lagrangien du problème est l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L} & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & (\mathbf{x}, \lambda) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i(\mathbf{x}) \end{array}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Formulation Lagrangienne

Le Lagrangien du problème est l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L} & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & (\mathbf{x}, \lambda) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i(\mathbf{x}) \end{array}$$

Le vecteur gradient du Lagrangien en $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\mathbf{u}, \lambda) \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\mathbf{u}, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

$$= \nabla f(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) \ .$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

La condition de Lagrange s'écrit alors, sous les hypothèses (de qualification des contraintes) adéquates :

$$\boxed{\mathbf{u} \text{ est un extemum local} \implies \exists ! \lambda \in \mathbb{R}^p, \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

La condition de Lagrange s'écrit alors, sous les hypothèses (de qualification des contraintes) adéquates :

$$\boxed{\mathbf{u} \text{ est un extemum local} \implies \exists ! \, \lambda \in \mathbb{R}^p, \, \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}}$$

On définit aussi, lorsque $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont deux fois différentiables, la matrice hessienne du Lagrangien en $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, par :

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{u}, \lambda) \right)_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}} = \nabla^2 f(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla^2 \varphi_i(\mathbf{u}) \, .$$

Copyright - Jean-Philippe Préaux

Exemple.

Soit $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple.

Soit $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.
Puisque f est continue sur le compact $\mathcal{D}$, il existe un minimum et un maximum global de f sur $\mathcal{D}$. Soit $\mathbf{u} = (x,y)$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple.

Soit $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$. Puisque f est continue sur le compact $\mathcal{D}$, il existe un minimum et un maximum global de f sur $\mathcal{D}$. Soit $\mathbf{u} = (x,y)$.

$$\nabla f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 6x \\ 8y \end{pmatrix}, \nabla \varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \begin{pmatrix} 6x + 2\lambda x \\ 8y + 2\lambda y \end{pmatrix}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple.

Soit $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.
Puisque f est continue sur le compact $\mathcal{D}$, il existe un minimum et un maximum global de f sur $\mathcal{D}$. Soit $\mathbf{u} = (x,y)$.

$$\nabla f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 6x \\ 8y \end{pmatrix}, \nabla \varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \begin{pmatrix} 6x + 2\lambda x \\ 8y + 2\lambda y \end{pmatrix}$$

$\nabla \varphi(\mathbf{u}) \neq 0$ sur $\mathcal{D}$; on applique les conditions de Lagrange :

$$\begin{cases} 6x + 2\lambda x = 0 & (1) \\ 8y + 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Copyright. Jean-Philippe Préaux

Exemple.

Soit $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
Puisque f est continue sur le compact $\mathcal{D}$, il existe un minimum et un maximum global de f sur $\mathcal{D}$. Soit $\mathbf{u} = (x,y)$.

$$\nabla f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 6x \\ 8y \end{pmatrix}, \nabla \varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \begin{pmatrix} 6x + 2\lambda x \\ 8y + 2\lambda y \end{pmatrix}$$

$\nabla \varphi(\mathbf{u}) \neq 0$ sur $\mathcal{D}$; on applique les conditions de Lagrange :

$$\begin{cases} 6x + 2\lambda x = 0 & (1) \\ 8y + 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\lambda \neq -4 \text{ ou } -3 \implies x = y = 0 \text{ impossible avec (3)}$$

$$\lambda = -4 \overset{(1)}{\implies} x = 0 \overset{(3)}{\implies} y = \pm 1$$

$$\lambda = -3 \overset{(2)}{\implies} y = 0 \overset{(3)}{\implies} x = \pm 1$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On obtient 4 solutions :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (avec } \lambda = -4)$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (avec } \lambda = -3)$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On obtient 4 solutions :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (avec } \lambda = -4)$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (avec } \lambda = -3)$$

On évalue f en ces 4 points :

$$f(\mathbf{c}) = f(\mathbf{d}) = 3 < f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b}) = 4.$$

c et **d** sont des minima globaux ; **a** et **b** des maxima globaux.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Simplification de l'énoncé sous contraintes affines.

Proposition

Si φ_i, $i = 1, \ldots, p$ sont affines, les conditions de Lagrange restent vraies, à l'exception de l'unicité des multiplicateurs de lagrange, sans l'hypothèse de qualification des contraintes :
$\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ *est libre.*

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Simplification de l'énoncé sous contraintes affines.

Proposition

Si φ_i, $i = 1, \ldots, p$ sont affines, les conditions de Lagrange restent vraies, à l'exception de l'unicité des multiplicateurs de lagrange, sans l'hypothèse de qualification des contraintes :
$\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ *est libre.*

Démonstration. $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ affines $\Longrightarrow$ $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})$ ne dépendent pas de $\mathbf{x}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Simplification de l'énoncé sous contraintes affines.

Proposition

Si φ_i, $i = 1, \ldots, p$ sont affines, les conditions de Lagrange restent vraies, à l'exception de l'unicité des multiplicateurs de lagrange, sans l'hypothèse de qualification des contraintes :
$\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ *est libre.*

Démonstration. $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ affines $\Longrightarrow$ $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})$ ne dépendent pas de $\mathbf{x}$.
Si $\{\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})\}$ n'est pas libre alors : $\nabla\varphi_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i \nabla\varphi_i(\mathbf{x})$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Simplification de l'énoncé sous contraintes affines.

Proposition

Si φ_i, $i = 1, \ldots, p$ sont affines, les conditions de Lagrange restent vraies, à l'exception de l'unicité des multiplicateurs de lagrange, sans l'hypothèse de qualification des contraintes :
$\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ *est libre.*

Démonstration. $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ affines $\Longrightarrow$ $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})$ ne dépendent pas de $\mathbf{x}$.
Si $\{\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})\}$ n'est pas libre alors : $\nabla\varphi_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i \nabla\varphi_i(\mathbf{x})$. Or φ_i affines $\Longrightarrow$ $\varphi_i(\mathbf{x}) = \langle \nabla\varphi_i(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle + k_i$; ainsi $\varphi_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i \varphi_i(\mathbf{x})$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Simplification de l'énoncé sous contraintes affines.

Proposition

Si φ_i, $i = 1, \ldots, p$ sont affines, les conditions de Lagrange restent vraies, à l'exception de l'unicité des multiplicateurs de lagrange, sans l'hypothèse de qualification des contraintes :
$\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ *est libre.*

Démonstration. $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ affines $\Longrightarrow$ $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})$ ne dépendent pas de $\mathbf{x}$. Si $\{\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})\}$ n'est pas libre alors : $\nabla\varphi_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i \nabla\varphi_i(\mathbf{x})$. Or φ_i affines $\Longrightarrow$ $\varphi_i(\mathbf{x}) = \langle \nabla\varphi_i(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle + k_i$; ainsi $\varphi_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i \varphi_i(\mathbf{x})$. En particulier la contrainte $\varphi_p(\mathbf{x}) = 0$ peut être supprimée. On aboutit à une sous-famille $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, pour $1 \leq r \leq p$, vérifiant $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_r(\mathbf{x})$ est libre.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Simplification de l'énoncé sous contraintes affines.

Proposition

Si φ_i, $i = 1, \ldots, p$ sont affines, les conditions de Lagrange restent vraies, à l'exception de l'unicité des multiplicateurs de lagrange, sans l'hypothèse de qualification des contraintes :
$\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ *est libre.*

Démonstration. $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ affines $\Longrightarrow$ $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})$ ne dépendent pas de $\mathbf{x}$. Si $\{\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})\}$ n'est pas libre alors : $\nabla\varphi_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i \nabla\varphi_i(\mathbf{x})$. Or φ_i affines $\Longrightarrow$ $\varphi_i(\mathbf{x}) = \langle \nabla\varphi_i(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle + k_i$; ainsi $\varphi_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i \varphi_i(\mathbf{x})$. En particulier la contrainte $\varphi_p(\mathbf{x}) = 0$ peut être supprimée. On aboutit à une sous-famille $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, pour $1 \leq r \leq p$, vérifiant $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla\varphi_r(\mathbf{x})$ est libre. En un extremum local $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ les conditions de Lagrange s'appliquent et donc $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nabla\varphi_i(\mathbf{u}) = 0$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Simplification de l'énoncé sous contraintes affines.

Proposition

Si φ_i, $i = 1, \dots, p$ sont affines, les conditions de Lagrange restent vraies, à l'exception de l'unicité des multiplicateurs de lagrange, sans l'hypothèse de qualification des contraintes :
$\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \dots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ *est libre.*

Démonstration. $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ affines $\implies$ $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})$ ne dépendent pas de $\mathbf{x}$. Si $\{\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla\varphi_p(\mathbf{x})\}$ n'est pas libre alors : $\nabla\varphi_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i \nabla\varphi_i(\mathbf{x})$. Or φ_i affines $\implies$ $\varphi_i(\mathbf{x}) = \langle \nabla\varphi_i(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle + k_i$; ainsi $\varphi_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i \varphi_i(\mathbf{x})$. En particulier la contrainte $\varphi_p(\mathbf{x}) = 0$ peut être supprimée. On aboutit à une sous-famille $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, pour $1 \leq r \leq p$, vérifiant $\nabla\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla\varphi_r(\mathbf{x})$ est libre. En un extremum local $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ les conditions de Lagrange s'appliquent et donc $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nabla\varphi_i(\mathbf{u}) = 0$. En posant $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p = 0$, on a aussi $\nabla f(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla\varphi_i(\mathbf{u}) = 0$. □

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Prise en compte de la convexité

Théorème (CNS en programmation convexe.)

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert convexe, si f est différentiable et convexe et si $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont affines,

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Prise en compte de la convexité

Théorème (CNS en programmation convexe.)

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert convexe, si f est différentiable et convexe et si $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont affines, alors $\mathbf{u}$ est un minimum global de f sur $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \mid \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \forall i = 1, \ldots, p\}$, si et seulement si $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\nabla f(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \ .$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Prise en compte de la convexité

Théorème (CNS en programmation convexe.)

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert convexe, si f est différentiable et convexe et si $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont affines, alors $\mathbf{u}$ est un minimum global de f sur $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \mid \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \forall i = 1, \ldots, p\}$, si et seulement si $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\nabla f(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \ .$$

C'est à dire qu'en programmation convexe :

- la condition de Lagrange est nécessaire et suffisante.
- les contraintes étant affines, nul besoin de l'hypothèse de qualification des contraintes.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Conditions du second ordre

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_p : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \,|\, \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \forall i = 1, \ldots, p\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Conditions du second ordre

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_p : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \,|\, \varphi_i(\mathbf{x}) = 0, \forall\, i = 1, \ldots, p\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Si en $\mathbf{u}$, $\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ sont linéairement indépendants, alors l'espace tangent $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{u}$ existe et

$$T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle \nabla\varphi_i(\mathbf{u}), \mathbf{x}\rangle = 0, \forall\, i = 1, \ldots, p\} \ .$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - p$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Théorème (Conditions, nécessaire, suffisante, du 2e ordre.)

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_p : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications deux fois différentiables. Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ tel que $\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ soient linéairement indépendants. Alors :

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Théorème (Conditions, nécessaire, suffisante, du 2e ordre.)

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_p : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications deux fois différentiables. Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ tel que $\nabla\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \nabla\varphi_p(\mathbf{u})$ soient linéairement indépendants. Alors :

(CN) *Si $\mathbf{u}$ est un minimum (resp. maximum) local de f sur $\mathcal{D}$, alors :*

$$\exists\,!\,\lambda \in \mathbb{R}^p,\ \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{u},\lambda) = 0, \text{ et}$$
$$\forall\,\mathbf{x} \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{D},\ \langle \nabla^2_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{u},\lambda)\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \ \geqslant 0 \ (\text{resp. } \leqslant 0),$$

(CS) *Si*

$$\exists\,\lambda \in \mathbb{R}^p,\ \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{u},\lambda) = 0, \text{ et}$$
$$\forall\,\mathbf{x} \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} \setminus \{0\},\ \langle \nabla^2_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{u},\lambda)\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \ > 0 \ (\text{resp. } < 0),$$

alors $\mathbf{u}$ est un minimum (resp. max) local strict de f sur $\mathcal{D}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple

On reprend l'exemple ci-dessus. On a déterminé en appliquant les conditions de Lagrange 4 points :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple

On reprend l'exemple ci-dessus. On a déterminé en appliquant les conditions de Lagrange 4 points :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ ou $\mathbf{b}$, $\nabla\varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$, et donc $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$.

$$\nabla^2_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{u}, -4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\mathbf{x} = (x, 0) \neq 0 \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{D}$, $\mathbf{x}^\top \nabla^2_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{u}, -4)\,\mathbf{x} = -2x^2 < 0$.
Donc $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont deux maxima locaux.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

En $\mathbf{u} = \mathbf{c}$ ou $\mathbf{d}$, $\nabla\varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$.

$$\nabla^2_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{u}, -3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\mathbf{y} = (0, y) \neq 0 \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{D}$, $\mathbf{y}^\top \nabla^2_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{u}, -3)\,\mathbf{y} = 2y^2 > 0$.
Donc $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ sont deux minima locaux.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Programmation quadratique sous contraintes '='

Soit $f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} - b^\top \mathbf{u}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, ainsi que les contraintes affines :

$$\begin{cases} \varphi_1(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n m_{1j}x_j = c_1 \\ \vdots \\ \varphi_i(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j = c_i \\ \vdots \\ \varphi_p(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n m_{pj}x_j = c_p \end{cases}$$

On note $M = (m_{ij})_{\substack{i=1\dots p \\ j=1\dots n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p) \in \mathbb{R}^p$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Les contraintes étant affines on peut appliquer les conditions de Lagrange :

$$\nabla_X \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \nabla f(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Les contraintes étant affines on peut appliquer les conditions de Lagrange :

$$\nabla_X \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) = \nabla f(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A\mathbf{u} - \mathbf{b} + M^\top \lambda & = \mathbf{0} \\ M\mathbf{u} & = \mathbf{c} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & M^\top \\ \hline M & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \hline \lambda \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} \end{array} \right) \qquad (S)$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Théorème (Programmation quadratique sous contraintes égalitaires.)

Soit $f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} - \mathbf{b}^\top\mathbf{u}$ *sous la contrainte* $M\mathbf{u} = \mathbf{c}$. *Supposons* $p < n$ *et le domaine non vide.*

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Théorème (Programmation quadratique sous contraintes égalitaires.)

Soit $f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} - \mathbf{b}^\top\mathbf{u}$ *sous la contrainte* $M\mathbf{u} = \mathbf{c}$. *Supposons* $p < n$ *et le domaine non vide.*

- *Si A est semi-définie positive (resp. négative), alors un extremum, s'il existe, est global et caractérisé par le système* (S).

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Théorème (Programmation quadratique sous contraintes égalitaires.)

Soit $f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top A\mathbf{u} - \mathbf{b}^\top\mathbf{u}$ *sous la contrainte* $M\mathbf{u} = \mathbf{c}$. *Supposons* $p < n$ *et le domaine non vide.*

- *Si A est semi-définie positive (resp. négative), alors un extremum, s'il existe, est global et caractérisé par le système* (S).
- *Si A est définie positive (resp. négative) alors* $\exists !$ *minimum (resp. maximum) global et il est caractérisé par le système* (S).

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la droite Δ d'équation :

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = 10x + 15y + 20z - 60 = 0 \\ \varphi_2(x,y,z) = -6x + 5y + 10z - 20 = 0 \end{cases}$$

Quelle est la distance de Δ à l'origine ?

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la droite Δ d'équation :

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = 10x + 15y + 20z - 60 = 0 \\ \varphi_2(x,y,z) = -6x + 5y + 10z - 20 = 0 \end{cases}$$

Quelle est la distance de Δ à l'origine ?

La distance de Δ à l'origine O est la distance minimale de O à un point de Δ. Le problème se ramène donc au problème d'optimisation :

$$\min_{(x,y,z)\in\Delta} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

La fonction f est quadratique, $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\top A\,\mathbf{x}$ avec :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

La fonction f est quadratique, $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\top A\,\mathbf{x}$ avec :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les contraintes sont affines, la matrice et le vecteur des contraintes sont :

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ -6 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

La fonction f est quadratique, $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\top A\,\mathbf{x}$ avec :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les contraintes sont affines, la matrice et le vecteur des contraintes sont :

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ -6 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Puisque A est définie positive, $\exists !$ minimum global de f, caractérisé par le système :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & M^\top \\ \hline M & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \hline \lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \mathbf{c} \end{array}\right)$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 20 & 10 \\ \hline 10 & 15 & 20 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 10 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 60 \\ 20 \end{array}\right)$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 20 & 10 \\ \hline 10 & 15 & 20 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 10 & 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 60 \\ 20 \end{array}\right)$$

Le système a pour solution exacte :

$$\mathbf{u}_{\min} = (\frac{88}{141}, \frac{884}{705}, \frac{1232}{705}, -\frac{536}{3525}, -\frac{32}{705})$$

donc,

$$f_{min} = (\frac{88}{141})^2 + (\frac{884}{705})^2 + (\frac{1232}{705})^2 = \frac{3536}{705} \approx 5,1055$$

et la distance $\sqrt{f_{min}}$ de Δ à l'origine est proche de $\sqrt{5}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exercices

- Exercice 1.
- Exercice 2.
- Exercice 3.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exercice 1.

Retrouver les résultats obtenus aux exemples A et B en appliquant les conditions de Lagrange.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exercice 1.

Retrouver les résultats obtenus aux exemples A et B en appliquant les conditions de Lagrange.

Exemple A. $f(x,y) = x$ et $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 = 1\}$; on retrouve les solutions évidentes trouvées en appliquant ici les conditions de Lagrange.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exercice 1.

Retrouver les résultats obtenus aux exemples A et B en appliquant les conditions de Lagrange.

Exemple A. $f(x,y) = x$ et $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 = 1\}$; on retrouve les solutions évidentes trouvées en appliquant ici les conditions de Lagrange. On l'a vu, puisque f est continue et $\mathcal{D}$ est compact, il existe un minimum et un maximum global.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exercice 1.

Retrouver les résultats obtenus aux exemples A et B en appliquant les conditions de Lagrange.

Exemple A. $f(x,y) = x$ et $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 = 1\}$; on retrouve les solutions évidentes trouvées en appliquant ici les conditions de Lagrange. On l'a vu, puisque f est continue et $\mathcal{D}$ est compact, il existe un minimum et un maximum global.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exercice 1.

Retrouver les résultats obtenus aux exemples A et B en appliquant les conditions de Lagrange.

Exemple A. $f(x,y) = x$ et $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 = 1\}$; on retrouve les solutions évidentes trouvées en appliquant ici les conditions de Lagrange. On l'a vu, puisque f est continue et $\mathcal{D}$ est compact, il existe un minimum et un maximum global.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Puisque $\nabla \varphi(x,y) \neq 0$ sur $\mathcal{D}$, $\nabla \varphi(x,y)$ forme une famille linéairement indépendante.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exercice 1.

Retrouver les résultats obtenus aux exemples A et B en appliquant les conditions de Lagrange.

Exemple A. $f(x,y) = x$ et $\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 = 1\}$; on retrouve les solutions évidentes trouvées en appliquant ici les conditions de Lagrange. On l'a vu, puisque f est continue et $\mathcal{D}$ est compact, il existe un minimum et un maximum global.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Puisque $\nabla \varphi(x,y) \neq 0$ sur $\mathcal{D}$, $\nabla \varphi(x,y)$ forme une famille linéairement indépendante. On applique la condition nécessaire de Lagrange :

$$(x,y) \text{ extremum local } \Longrightarrow \nabla_x \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \mathbf{0}.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

On résout ce système d'inconnues x, y :

$$\left.\begin{array}{lll} (2) & \Longrightarrow & y = 0 \text{ ou } \lambda = 0 \\ (1) & \Longrightarrow & \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} x = \pm 1.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

On résout ce système d'inconnues x, y :

$$\left.\begin{array}{lll} (2) & \Longrightarrow & y = 0 \text{ ou } \lambda = 0 \\ (1) & \Longrightarrow & \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} x = \pm 1.$$

On obtient deux solutions :

$\mathbf{a} = (1, 0)$ (avec $\lambda = -1/2$) ; $\mathbf{b} = (-1, 0)$ (avec $\lambda = 1/2$).

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

On résout ce système d'inconnues x, y :

$$\left.\begin{array}{lll} (2) & \Longrightarrow & y = 0 \text{ ou } \lambda = 0 \\ (1) & \Longrightarrow & \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} x = \pm 1.$$

On obtient deux solutions :

$$\mathbf{a} = (1, 0) \text{ (avec } \lambda = -1/2) \quad ; \quad \mathbf{b} = (-1, 0) \text{ (avec } \lambda = 1/2).$$

Puisque $f(\mathbf{a}) = 1$ et $f(\mathbf{b}) = -1$, et que l'on connait déjà l'existence d'un minimum et d'un maximum global, on peut d'ores et déjà conclure que $\mathbf{b}$ est le minimum et $\mathbf{a}$ est le maximum (globaux).

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On retrouve cependant qu'il sont minimum et maximum (local) en appliquant les conditions du second ordre.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On retrouve cependant qu'il sont minimum et maximum (local) en appliquant les conditions du second ordre.

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On retrouve cependant qu'il sont minimum et maximum (local) en appliquant les conditions du second ordre.

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

L'espace tangent à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ ou $\mathbf{b}$ est ici le même, $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = Vect((0, 1))$;

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On retrouve cependant qu'il sont minimum et maximum (local) en appliquant les conditions du second ordre.

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

L'espace tangent à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ ou $\mathbf{b}$ est ici le même, $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = Vect((0, 1))$; ça n'a ici peu d'importance, puisque :

$\nabla_x^2 \mathcal{L}(\mathbf{a}, -1/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est définie négative $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}$ est un max,

$\nabla_x^2 \mathcal{L}(\mathbf{b}, 1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive $\Longrightarrow$ $\mathbf{b}$ est un min,

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On retrouve cependant qu'il sont minimum et maximum (local) en appliquant les conditions du second ordre.

$$\nabla^2_x \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

L'espace tangent à $\mathcal{D}$ en $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ ou $\mathbf{b}$ est ici le même, $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = Vect((0, 1))$; ça n'a ici peu d'importance, puisque :

$\nabla^2_x \mathcal{L}(\mathbf{a}, -1/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est définie négative $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}$ est un max,

$\nabla^2_x \mathcal{L}(\mathbf{b}, 1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive $\Longrightarrow$ $\mathbf{b}$ est un min,

et puisque ce sont les seuls extrema locaux de f sur $\mathcal{D}$, ce sont des extrema globaux par compacité.

Retour.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple B.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\right\}.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple B.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\right\}.$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \ \nabla \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \ \nabla_x \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x + \lambda y \\ 2y + \lambda x \end{pmatrix}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exemple B.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\right\}.$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \ \nabla \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \ \nabla_x \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x + \lambda y \\ 2y + \lambda x \end{pmatrix}$$

Sur $\mathcal{D}$, $\nabla \varphi(x,y) \neq 0$, aussi on peut appliquer les conditions de Lagrange, ce qui nous amène à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 & (1) \\ 2y + \lambda x = 0 & (2) \\ y = 1/x & (3) \end{cases}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

En formant l'équation $(1)-(2)$ on obtient :

$$(x-y)(2-\lambda)=0 \implies \begin{cases} x=y \overset{(3)}{\implies} x^2=1 \implies x=\pm 1 \\ \text{ou} \\ \lambda=2 \overset{(1)}{\implies} y=-x \overset{(3)}{\implies} x^2=-1 \text{ impossible} \end{cases}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

En formant l'équation $(1)-(2)$ on obtient :

$$(x-y)(2-\lambda)=0 \implies \begin{cases} x=y \overset{(3)}{\implies} x^2=1 \implies x=\pm 1 \\ \text{ou} \\ \lambda=2 \overset{(1)}{\implies} y=-x \overset{(3)}{\implies} x^2=-1 \text{ impossible} \end{cases}$$

On obtient deux solutions :

$$\mathbf{a}=(1,1) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}=(-1,-1) \quad (\text{avec } \lambda=-2).$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

En formant l'équation $(1)-(2)$ on obtient :

$$(x-y)(2-\lambda)=0 \implies \begin{cases} x=y \overset{(3)}{\implies} x^2=1 \implies x=\pm 1 \\ \text{ou} \\ \lambda=2 \overset{(1)}{\implies} y=-x \overset{(3)}{\implies} x^2=-1 \text{ impossible} \end{cases}$$

On obtient deux solutions :

$$\mathbf{a}=(1,1) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}=(-1,-1) \quad (\text{avec } \lambda=-2).$$

On détermine en $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ la matrice Hessienne du Lagrangien :

$$\nabla_x^2\mathcal{L}(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla_x^2\mathcal{L}(\mathbf{a},-2)=\nabla_x^2\mathcal{L}(\mathbf{b},-2)=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

En $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ ou $\mathbf{b}$, $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = Vect((1,-1)) = \{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(orthogonal de $\nabla\varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

Copyright : Jean-Philippe Préaux

En $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ ou $\mathbf{b}$, $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = Vect((1,-1)) = \{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(orthogonal de $\nabla\varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

Si $t \neq 0$:

$$(t,-t)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = 8t^2 > 0$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

En $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ ou $\mathbf{b}$, $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = Vect((1,-1)) = \{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(orthogonal de $\nabla\varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$).
Si $t \neq 0$:

$$(t,-t)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = 8t^2 > 0$$

Ainsi, $\forall\, \mathbf{x} \neq 0 \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{D}$, $\mathbf{x}^\top \nabla^2_x \mathcal{L}(\mathbf{u}, -2)\, \mathbf{x} > 0$, et donc $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont deux minima locaux stricts.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

En $\mathbf{u} = \mathbf{a}$ ou $\mathbf{b}$, $T_{\mathbf{u}}\mathcal{D} = Vect((1,-1)) = \{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(orthogonal de $\nabla\varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

Si $t \neq 0$:

$$(t,-t)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = 8t^2 > 0$$

Ainsi, $\forall\, \mathbf{x} \neq 0 \in T_{\mathbf{u}}\mathcal{D}$, $\mathbf{x}^\top \nabla_x^2 \mathcal{L}(\mathbf{u}, -2)\, \mathbf{x} > 0$, et donc $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont deux minima locaux stricts.

Ils sont en fait globaux car f est coercive sur le fermé $\mathcal{D}$ et $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$.

Retour

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exercice 2.

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - 1.$$

Soit $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2\}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Justifier de l'existence d'extrema globaux de f sur $\mathcal{D}$, et les déterminer.

◂ Retour.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Le cercle $\mathcal{C}$ est un compact (fermé borné) de $\mathbb{R}^2$, donc f étant continue elle admet un minimum et un maximum global sur $\mathcal{C}$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Le cercle $\mathcal{C}$ est un compact (fermé borné) de $\mathbb{R}^2$, donc f étant continue elle admet un minimum et un maximum global sur $\mathcal{C}$.
Soit la contrainte égalitaire $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. On a $\nabla\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0$ sur $\mathcal{C}$. Donc en tout point de $\mathcal{C}$ les contraintes sont qualifiées.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Le cercle $\mathcal{C}$ est un compact (fermé borné) de $\mathbb{R}^2$, donc f étant continue elle admet un minimum et un maximum global sur $\mathcal{C}$. Soit la contrainte égalitaire $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. On a $\nabla\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0$ sur $\mathcal{C}$. Donc en tout point de $\mathcal{C}$ les contraintes sont qualifiées. On a donc en tout extrémum $(x,y) \in \mathcal{C}$ de f, les conditions de Lagrange :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \nabla f(x,y) + \lambda \nabla\varphi(x,y) = 0$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Le cercle $\mathcal{C}$ est un compact (fermé borné) de $\mathbb{R}^2$, donc f étant continue elle admet un minimum et un maximum global sur $\mathcal{C}$. Soit la contrainte égalitaire $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. On a $\nabla\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0$ sur $\mathcal{C}$. Donc en tout point de $\mathcal{C}$ les contraintes sont qualifiées. On a donc en tout extrémum $(x,y) \in \mathcal{C}$ de f, les conditions de Lagrange :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \nabla f(x,y) + \lambda \nabla\varphi(x,y) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + 2\lambda x &= 0 \\ 3y^2 + 2y + 2\lambda y &= 0 \end{cases}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(3x+2+2\lambda) & = & 0 \\ y(3y+2+2\lambda) & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2+2\lambda}{3} \\ y = 0 \text{ ou } y = -\frac{2+2\lambda}{3} \end{array} \right.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(3x+2+2\lambda) & = & 0 \\ y(3y+2+2\lambda) & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2+2\lambda}{3} \\ y = 0 \text{ ou } y = -\frac{2+2\lambda}{3} \end{array} \right.$$

Puisque $(x, y) \in \mathcal{C}$, on a $x^2 + y^2 = 1$, et donc :

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(3x+2+2\lambda) & = & 0 \\ y(3y+2+2\lambda) & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2+2\lambda}{3} \\ y = 0 \text{ ou } y = -\frac{2+2\lambda}{3} \end{array} \right.$$

Puisque $(x, y) \in \mathcal{C}$, on a $x^2 + y^2 = 1$, et donc :

$$\boxed{x = 0} \Longrightarrow \boxed{y = \pm 1}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(3x+2+2\lambda) & = & 0 \\ y(3y+2+2\lambda) & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2+2\lambda}{3} \\ y = 0 \text{ ou } y = -\frac{2+2\lambda}{3} \end{array} \right.$$

Puisque $(x, y) \in \mathcal{C}$, on a $x^2 + y^2 = 1$, et donc :

$$\boxed{x = 0} \Longrightarrow \boxed{y = \pm 1}$$

$$\boxed{y = 0} \Longrightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x(3x+2+2\lambda) & = 0 \\ y(3y+2+2\lambda) & = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2+2\lambda}{3} \\ y = 0 \text{ ou } y = -\frac{2+2\lambda}{3} \end{array} \right.$$

Puisque $(x, y) \in \mathcal{C}$, on a $x^2 + y^2 = 1$, et donc :

$$\boxed{x = 0} \Longrightarrow \boxed{y = \pm 1}$$

$$\boxed{y = 0} \Longrightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

$$x = y = -\frac{2+2\lambda}{3} \Longrightarrow 2\left(\frac{2+2\lambda}{3}\right)^2 = 1$$

$$\Longrightarrow \lambda = -1 \pm \frac{3}{4}\sqrt{2} \Longrightarrow \boxed{x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On obtient donc 6 points vérifiant les conditions nécessaires de Lagrange :

Point	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$
Valeur de f	1	-1	1	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

On obtient donc 6 points vérifiant les conditions nécessaires de Lagrange :

Point	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$
Valeur de f	1	-1	1	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ainsi f admet sur $\mathcal{C}$:
– pour minima les 2 points $(-1,0)$ et $(0,-1)$,
– pour maxima les 2 points $(1,0)$ et $(0,1)$.

Retour.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Exercice 3.

On évalue que le volume de vente d'un produit est fonction du nombre de publicités dans les magazines x et du nombre de minutes de temps de télévision y : $f(x, y) = 3xy - x^2 - 3y^2$. Chaque publicité dans les magazines et chaque minute de télévision coûtent 100 u.m.. On dispose de 2800 u.m. de budget de publicité. Comment l'allouer de façon optimale pour maximiser la vente de ce produit ?

Retour.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Le problème se formule :

$$\max_{x,y} 3xy - x^2 - 3y^2$$
$$x + y = 28$$
$$x, y > 0$$

Il s'agit d'un problème de programmation quadratique sous contrainte égalitaire, sur l'ouvert $\mathcal{U} = (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Le problème se formule :

$$\max_{x,y} 3xy - x^2 - 3y^2$$
$$x + y = 28$$
$$x, y > 0$$

Il s'agit d'un problème de programmation quadratique sous contrainte égalitaire, sur l'ouvert $\mathcal{U} = (\mathbb{R}_+^*)^2$. La matrice hessienne de f est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Le problème se formule :

$$\max_{x,y} 3xy - x^2 - 3y^2$$
$$x + y = 28$$
$$x, y > 0$$

Il s'agit d'un problème de programmation quadratique sous contrainte égalitaire, sur l'ouvert $\mathcal{U} = (\mathbb{R}_+^*)^2$. La matrice hessienne de f est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det A = 3 > 0$ et $tr(A) = -8 < 0$, A est définie négative *i.e.* f est strictement concave et admet donc au plus un maximum **u**.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Si le maximum (x, y) existe il est solution sur $(\mathbb{R}_+)^2$ du système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + \lambda = 0 \\ 3x - 6y + \lambda = 0 \\ x + y = 28 \end{cases}$$

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Si le maximum (x, y) existe il est solution sur $(\mathbb{R}_+)^2$ du système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + \lambda = 0 \\ 3x - 6y + \lambda = 0 \\ x + y = 28 \end{cases}$$

Que l'on résout pour obtenir $x = 18$ et $y = 10$.

Copyright : Jean-Philippe Préaux

Si le maximum (x, y) existe il est solution sur $(\mathbb{R}_+)^2$ du système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + \lambda = 0 \\ 3x - 6y + \lambda = 0 \\ x + y = 28 \end{cases}$$

Que l'on résout pour obtenir $x = 18$ et $y = 10$. L'allocation optimale est 18 publicités en magazine et 10mn de télévision.

Retour.

Copyright : Jean-Philippe Préaux