V. - Applications aux maths numériques

Jean-Philippe Préaux

EOAA - 2009/10

Résolution approchée d'un système de Cramer.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Résolution approchée d'un système de Cramer.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.
On considère le système d'équations linéaires de Cramer :

$$M\mathbf{x} = \mathbf{c} \qquad (*)$$

Résolution approchée d'un système de Cramer.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.
On considère le système d'équations linéaires de Cramer :

$$M\mathbf{x} = \mathbf{c} \qquad (*)$$

La résolution d'un tel système intervient dans tous les domaines d'applications mathématiques.

Résolution approchée d'un système de Cramer.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.
On considère le système d'équations linéaires de Cramer :

$$M\mathbf{x} = \mathbf{c} \qquad (*)$$

La résolution d'un tel système intervient dans tous les domaines d'applications mathématiques. Lorsque n est grand la résolution directe de ce système est fastidieuse et prend un temps de calcul important.

Résolution approchée d'un système de Cramer.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.
On considère le système d'équations linéaires de Cramer :

$$M\mathbf{x} = \mathbf{c} \qquad (*)$$

La résolution d'un tel système intervient dans tous les domaines d'applications mathématiques. Lorsque n est grand la résolution directe de ce système est fastidieuse et prend un temps de calcul important. Aussi est-il très utile de disposer d'algorithmes de résolution approchée de système d'équations linéaires, plus rapides ou moins gourmands en ressources.
Nous allons appliquer les résultats des précédents chapitres pour y parvenir.

Pour ce faire commençons par nous ramener au cas d'une matrice symétrique définie positive. Il suffit de multiplier à gauche par la matrice transposée $M^\top$; c'est une opération peu couteuse en ressources.

Pour ce faire commençons par nous ramener au cas d'une matrice symétrique définie positive. Il suffit de multiplier à gauche par la matrice transposée $M^\top$; c'est une opération peu couteuse en ressources.

Poser $A = M^\top M$ et $\mathbf{b} = M^\top \mathbf{c}$; A est symétrique définie positive et le système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

est équivalent au système linéaire $(*)$.

Dans la suite nous ne considérerons plus que des systèmes linéaires à matrice symétrique définie positive.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive ; soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive ; soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

On souhaite appliquer un algorithme pour déterminer une valeur approchée de la solution du système de Cramer :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (*)$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive ; soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
On souhaite appliquer un algorithme pour déterminer une valeur approchée de la solution du système de Cramer :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (*)$$

Résoudre ce système, on l'a vu, équivaut au problème d'optimisation quadratique elliptique :

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive ; soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
On souhaite appliquer un algorithme pour déterminer une valeur approchée de la solution du système de Cramer :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (*)$$

Résoudre ce système, on l'a vu, équivaut au problème d'optimisation quadratique elliptique :

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}.$$

En particulier une méthode itérative de recherche de minimum fournit une méthode approchée de résolution du système linéaire.

Méthode du gradient à pas fixe. En notant λ_1, λ_n la plus petite et la plus grande valeur propre de A, elle s'écrit ici :

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}(A\mathbf{u}_k - \mathbf{b}) \ .$$

Méthode du gradient à pas fixe. En notant λ_1, λ_n la plus petite et la plus grande valeur propre de A, elle s'écrit ici :

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}(A\mathbf{u}_k - \mathbf{b}) \ .$$

Méthode du gradient à pas optimal. Elle s'écrit ici :

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - \frac{\|A\mathbf{u}_k - \mathbf{b}\|^2}{\langle A(A\mathbf{u}_k - \mathbf{b}), A\mathbf{u}_k - \mathbf{b}\rangle}(A\mathbf{u}_k - \mathbf{b}) \ .$$

Méthode du gradient conjugué. Il s'agit cette fois-ci d'une méthode exacte (si l'on exclut les erreurs d'approximation) qui converge en au plus n itérations :

Méthode du gradient conjugué. Il s'agit cette fois-ci d'une méthode exacte (si l'on exclut les erreurs d'approximation) qui converge en au plus n itérations :

- **Etape 1 :**

$$\mathbf{d}_0 = A\mathbf{u}_0 - \mathbf{b}$$

$$\rho_0 = \frac{\|\mathbf{d}_0\|^2}{\langle A\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_0\rangle}$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 - \rho_0\mathbf{d}_0$$

- **Etape $k+1$:**

$$\mathbf{d}_k = A\mathbf{u}_k - \mathbf{b} + \frac{\|A\mathbf{u}_k - \mathbf{b}\|^2}{\|A\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{b}\|^2}\mathbf{d}_{k-1}$$

$$\rho_k = \frac{\langle A\mathbf{u}_k - \mathbf{b}, \mathbf{d}_k\rangle}{\langle A\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_k\rangle}$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - \rho_k\mathbf{d}_k \qquad \text{Tant que } \nabla f(\mathbf{u}_k) = A\mathbf{u}_k - \mathbf{b} \neq \mathbf{0}.$$

• Le nombre d'opérations à effectuer est de l'ordre de $O(n^3)$ et ne présente pas de grand avantage par rapport à d'autres méthodes directes telles la *méthode de Cholesky*,

• Le nombre d'opérations à effectuer est de l'ordre de $O(n^3)$ et ne présente pas de grand avantage par rapport à d'autres méthodes directes telles la *méthode de Cholesky*,

• c'est dans la pratique un leurre de considérer cette méthode comme directe, à cause des erreurs d'approximations dans les calculs.

• Le nombre d'opérations à effectuer est de l'ordre de $O(n^3)$ et ne présente pas de grand avantage par rapport à d'autres méthodes directes telles la *méthode de Cholesky*,
• c'est dans la pratique un leurre de considérer cette méthode comme directe, à cause des erreurs d'approximations dans les calculs.
• Par contre elle présente une très bonne stabilité par rapport aux erreurs d'arrondi.

• Le nombre d'opérations à effectuer est de l'ordre de $O(n^3)$ et ne présente pas de grand avantage par rapport à d'autres méthodes directes telles la *méthode de Cholesky*,
• c'est dans la pratique un leurre de considérer cette méthode comme directe, à cause des erreurs d'approximations dans les calculs.
• Par contre elle présente une très bonne stabilité par rapport aux erreurs d'arrondi.
• D'autre part pour des matrices creuses (*i.e.* comportant beaucoup de zéros), le calcul des $A\mathbf{d}_k$, les plus coûteux numériquement, peut dans ce cas se faire à l'aide de relations de récurrence et permet une réduction spectaculaire de la quantité de calculs nécessaires ; c'est alors une méthode de résolution approchée des plus efficientes.

Méthode de Gauss-Seidel.

La méthode de relaxation fournit une méthode approchée de résolution de $(*)$ connue sous le nom de méthode de Gauss-Seidel.

Méthode de Gauss-Seidel.

La méthode de relaxation fournit une méthode approchée de résolution de $(*)$ connue sous le nom de méthode de Gauss-Seidel.
Elle devient dans ce cas :

$$(*) \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Méthode de Gauss-Seidel.

La méthode de relaxation fournit une méthode approchée de résolution de $(*)$ connue sous le nom de méthode de Gauss-Seidel.
Elle devient dans ce cas :

$$(*) \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

Choisir arbitrairement $\mathbf{u}_0$ et construire $\mathbf{u}_{k+1} = (x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$ à partir de $\mathbf{u}_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1^{k+1}} + a_{12}x_2^k + \cdots + a_{1n}x_n^k &= b_1 \\ a_{11}x_1^{k+1} + \boxed{a_{12}x_2^{k+1}} + \cdots + a_{1n}x_n^k &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^{k+1} + \cdots + \boxed{a_{1n}x_n^{k+1}} &= b_n \end{cases}$$

(Voir l'exercice 3 du chapitre IV.)

Méthode de Gauss-Seidel.

La méthode de relaxation fournit une méthode approchée de résolution de $(*)$ connue sous le nom de méthode de Gauss-Seidel.
Elle devient dans ce cas :

$$(*) \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

Choisir arbitrairement $\mathbf{u}_0$ et construire $\mathbf{u}_{k+1} = (x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$ à partir de $\mathbf{u}_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1^{k+1}} + a_{12}x_2^k + \cdots + a_{1n}x_n^k = b_1 \implies x_1^{k+1} \\ a_{11}x_1^{k+1} + \boxed{a_{12}x_2^{k+1}} + \cdots + a_{1n}x_n^k = b_2 \\ \vdots \\ a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^{k+1} + \cdots + \boxed{a_{1n}x_n^{k+1}} = b_n \end{cases}$$

(Voir l'exercice 3 du chapitre IV.)

Méthode de Gauss-Seidel.

La méthode de relaxation fournit une méthode approchée de résolution de $(*)$ connue sous le nom de méthode de Gauss-Seidel.
Elle devient dans ce cas :

$$(*) \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

Choisir arbitrairement $\mathbf{u}_0$ et construire $\mathbf{u}_{k+1} = (x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$ à partir de $\mathbf{u}_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1^{k+1}} + a_{12}x_2^k + \cdots + a_{1n}x_n^k = b_1 \Longrightarrow x_1^{k+1} \\ a_{11}x_1^{k+1} + \boxed{a_{12}x_2^{k+1}} + \cdots + a_{1n}x_n^k = b_2 \Longrightarrow x_2^{k+1} \\ \vdots \\ a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^{k+1} + \cdots + \boxed{a_{1n}x_n^{k+1}} = b_n \end{cases}$$

(Voir l'exercice 3 du chapitre IV.)

Méthode de Gauss-Seidel.

La méthode de relaxation fournit une méthode approchée de résolution de $(*)$ connue sous le nom de méthode de Gauss-Seidel.
Elle devient dans ce cas :

$$(*) \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

Choisir arbitrairement $\mathbf{u}_0$ et construire $\mathbf{u}_{k+1} = (x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$ à partir de $\mathbf{u}_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1^{k+1}} + a_{12}x_2^k + \cdots + a_{1n}x_n^k = b_1 \implies x_1^{k+1} \\ a_{11}x_1^{k+1} + \boxed{a_{12}x_2^{k+1}} + \cdots + a_{1n}x_n^k = b_2 \implies x_2^{k+1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^{k+1} + \cdots + \boxed{a_{1n}x_n^{k+1}} = b_n \implies x_n^{k+1} \end{cases}$$

(Voir l'exercice 3 du chapitre IV.)

Convergence des méthodes de résolution approchées.

Théorème

Lorsque A est une matrice symétrique définie positive, chacune des suites $(\mathbf{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ construites selon les méthodes du gradient à pas variable, à pas fixe, du gradient conjugué ou de Gauss-Seidel, convergent vers la solution $\tilde{\mathbf{u}}$ de $(*)$.

Inversion d'une matrice symétrique définie positive.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, et donc en particulier inversible.

Inversion d'une matrice symétrique définie positive.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, et donc en particulier inversible.
L'inversion d'une matrice intervient très fréquemment dans de nombreux problèmes (la méthode de Newton par exemple) et présente un intérêt qui ne se réduit pas seulement à la résolution de systèmes linéaires.

Inversion d'une matrice symétrique définie positive.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, et donc en particulier inversible.
L'inversion d'une matrice intervient très fréquemment dans de nombreux problèmes (la méthode de Newton par exemple) et présente un intérêt qui ne se réduit pas seulement à la résolution de systèmes linéaires. est une opération coûteuse numériquement, pouvant naïvement se ramener à la résolution d'un système de Cramer de n équations.

Inversion d'une matrice symétrique définie positive.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, et donc en particulier inversible.
L'inversion d'une matrice intervient très fréquemment dans de nombreux problèmes (la méthode de Newton par exemple) et présente un intérêt qui ne se réduit pas seulement à la résolution de systèmes linéaires. est une opération coûteuse numériquement, pouvant naïvement se ramener à la résolution d'un système de Cramer de n équations.
Nous allons développer une technique d'inversion basée sur la méthode du gradient conjugué ; ce que nous voyons ici ne s'adapte qu'à une matrice symétrique définie positive. Il s'agit d'une méthode exacte, pour peu que l'on oublie les erreurs d'arrondi.

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, et $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille est dite *A-orthogonale* si pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant p$, $i \neq j$, $\omega_i^\top A \omega_j = 0$.

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, et $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille est dite *A-orthogonale* si pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant p$, $i \neq j$, $\omega_i^\top A \omega_j = 0$.

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de p vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ A-orthogonale ($p \leqslant n$). On construit une suite finie $C_1, \ldots, C_p$ de matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top}{\omega_i^\top A \omega_i} \ , \quad k = 1, \ldots, p \ .$$

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, et $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille est dite *A-orthogonale* si pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant p$, $i \neq j$, ${\omega_i}^\top A \omega_j = 0$.

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de p vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ A-orthogonale ($p \leqslant n$). On construit une suite finie $C_1, \ldots, C_p$ de matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i {\omega_i}^\top}{{\omega_i}^\top A \omega_i} \ , \quad k = 1, \ldots, p \ .$$

Théorème (Calcul itératif de l'inverse de la matrice A.)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive et si $\omega_1, \ldots, \omega_n$ est une famille A-orthogonale de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$C_n = A^{-1} \ .$$

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de p vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ A-orthogonale.

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top}{\omega_i^\top A \omega_i} \ , \quad k = 1, \ldots, p \ .$$

$$C_n = A^{-1}$$

Démonstration.

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de p vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ A-orthogonale.

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top}{\omega_i^\top A \omega_i} \ , \quad k = 1, \ldots, p \ .$$

$$C_n = A^{-1}$$

Démonstration. Par construction, pour $j = 1, \ldots, k$,

$$C_k A \omega_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top A \omega_j}{\omega_i^\top A \omega_i} = \frac{\omega_j \omega_j^\top A \omega_j}{\omega_j^\top A \omega_j} = \omega_j \ .$$

Soit $\omega_1, \dots, \omega_p$ une famille de p vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ A-orthogonale.

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top}{\omega_i^\top A \omega_i} \ , \quad k = 1, \dots, p \ .$$

$$C_n = A^{-1}$$

Démonstration. Par construction, pour $j = 1, \dots, k$,

$$C_k A \omega_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top A \omega_j}{\omega_i^\top A \omega_i} = \frac{\omega_j \omega_j^\top A \omega_j}{\omega_j^\top A \omega_j} = \omega_j \ .$$

Posons $D_k = \mathrm{Id} - C_k A$;

Soit $\omega_1, \dots, \omega_p$ une famille de p vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ A-orthogonale.

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top}{\omega_i^\top A \omega_i} \ , \quad k = 1, \dots, p \ .$$

$$C_n = A^{-1}$$

Démonstration. Par construction, pour $j = 1, \dots, k$,

$$C_k A \omega_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top A \omega_j}{\omega_i^\top A \omega_i} = \frac{\omega_j \omega_j^\top A \omega_j}{\omega_j^\top A \omega_j} = \omega_j \ .$$

Posons $D_k = \mathrm{Id} - C_k A$; avec ce qui précède, pour $j = 1, \dots, k$,

$$D_k \omega_j = \omega_j - C_k A \omega_j = \omega_j - \omega_j = \mathbf{0} \ .$$

Soit $\omega_1, \dots, \omega_p$ une famille de p vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ A-orthogonale.

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top}{\omega_i^\top A \omega_i} \ , \quad k = 1, \dots, p \ .$$

$$C_n = A^{-1}$$

Démonstration. Par construction, pour $j = 1, \dots, k$,

$$C_k A \omega_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top A \omega_j}{\omega_i^\top A \omega_i} = \frac{\omega_j \omega_j^\top A \omega_j}{\omega_j^\top A \omega_j} = \omega_j \ .$$

Posons $D_k = \mathrm{Id} - C_k A$; avec ce qui précède, pour $j = 1, \dots, k$,

$$D_k \omega_j = \omega_j - C_k A \omega_j = \omega_j - \omega_j = \mathbf{0} \ .$$

En particulier $D_n \omega_j = \mathbf{0}$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

Soit $\omega_1, \dots, \omega_p$ une famille de p vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ A-orthogonale.

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top}{\omega_i^\top A \omega_i} \ , \quad k = 1, \dots, p \ .$$

$$C_n = A^{-1}$$

Démonstration. Par construction, pour $j = 1, \dots, k$,

$$C_k A \omega_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top A \omega_j}{\omega_i^\top A \omega_i} = \frac{\omega_j \omega_j^\top A \omega_j}{\omega_j^\top A \omega_j} = \omega_j \ .$$

Posons $D_k = \mathrm{Id} - C_k A$; avec ce qui précède, pour $j = 1, \dots, k$,

$$D_k \omega_j = \omega_j - C_k A \omega_j = \omega_j - \omega_j = \mathbf{0} \ .$$

En particulier $D_n \omega_j = \mathbf{0}$ pour tout $j = 1, \dots, n$.
Or $\omega_1, \dots, \omega_n$ est une famille libre et donc une base de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\omega_1, \dots, \omega_p$ une famille de p vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ A-orthogonale.

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top}{\omega_i^\top A \omega_i} \ , \quad k = 1, \dots, p \ .$$

$$C_n = A^{-1}$$

Démonstration. Par construction, pour $j = 1, \dots, k$,

$$C_k A \omega_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top A \omega_j}{\omega_i^\top A \omega_i} = \frac{\omega_j \omega_j^\top A \omega_j}{\omega_j^\top A \omega_j} = \omega_j \ .$$

Posons $D_k = \mathrm{Id} - C_k A$; avec ce qui précède, pour $j = 1, \dots, k$,

$$D_k \omega_j = \omega_j - C_k A \omega_j = \omega_j - \omega_j = \mathbf{0} \ .$$

En particulier $D_n \omega_j = \mathbf{0}$ pour tout $j = 1, \dots, n$.
Or $\omega_1, \dots, \omega_n$ est une famille libre et donc une base de $\mathbb{R}^n$.
Ainsi, D_n est la matrice nulle $\mathbf{0}$.

Soit $\omega_1, \dots, \omega_p$ une famille de p vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ A-orthogonale.

$$C_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top}{\omega_i^\top A \omega_i} \ , \quad k = 1, \dots, p \ .$$

$$C_n = A^{-1}$$

Démonstration. Par construction, pour $j = 1, \dots, k$,

$$C_k A \omega_j = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i \omega_i^\top A \omega_j}{\omega_i^\top A \omega_i} = \frac{\omega_j \omega_j^\top A \omega_j}{\omega_j^\top A \omega_j} = \omega_j \ .$$

Posons $D_k = \mathrm{Id} - C_k A$; avec ce qui précède, pour $j = 1, \dots, k$,

$$D_k \omega_j = \omega_j - C_k A \omega_j = \omega_j - \omega_j = \mathbf{0} \ .$$

En particulier $D_n \omega_j = \mathbf{0}$ pour tout $j = 1, \dots, n$.
Or $\omega_1, \dots, \omega_n$ est une famille libre et donc une base de $\mathbb{R}^n$.
Ainsi, D_n est la matrice nulle $\mathbf{0}$.
Donc $D_n = \mathrm{Id} - C_n A = \mathbf{0} \implies C_n = A^{-1}$. □

Il suffit donc de construire une famille A-orthogonale de n vecteurs $\neq \mathbf{0}$.

Il suffit donc de construire une famille A-orthogonale de n vecteurs $\neq \mathbf{0}$. On peut appliquer la méthode du gradient conjugué à $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ pour construire une famille de $p \leqslant n$ vecteurs A-orthogonale.

Il suffit donc de construire une famille A-orthogonale de n vecteurs $\neq \mathbf{0}$. On peut appliquer la méthode du gradient conjugué à $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ pour construire une famille de $p \leqslant n$ vecteurs A-orthogonale. Si $p < n$ on complète cette famille (que l'on peut aussi construire directement) par :

Il suffit donc de construire une famille A-orthogonale de n vecteurs $\neq \mathbf{0}$. On peut appliquer la méthode du gradient conjugué à $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ pour construire une famille de $p \leqslant n$ vecteurs A-orthogonale. Si $p < n$ on complète cette famille (que l'on peut aussi construire directement) par :

Théorème (Construction d'une n-famille A-orthogonale.)

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de $p < n$ vecteurs $\neq \mathbf{0}$ A-orthogonale. Posons pour $k = 1, \ldots, p$,

$$D_k = \mathrm{Id} - C_k A \ .$$

Il suffit donc de construire une famille A-orthogonale de n vecteurs $\neq \mathbf{0}$. On peut appliquer la méthode du gradient conjugué à $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ pour construire une famille de $p \leqslant n$ vecteurs A-orthogonale. Si $p < n$ on complète cette famille (que l'on peut aussi construire directement) par :

Théorème (Construction d'une n-famille A-orthogonale.)

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de $p < n$ vecteurs $\neq \mathbf{0}$ A-orthogonale. Posons pour $k = 1, \ldots, p$,

$$D_k = \mathrm{Id} - C_k A \ .$$

Si D_p est la matrice nulle alors, $C_p = A^{-1}$, et sinon soit $\mathbf{u} \notin \ker D_p$ et $\omega_{p+1} = D_p\mathbf{u}$. Alors $\omega_1, \ldots, \omega_{p+1}$ est une famille A-orthogonale de $p+1$ vecteurs non nuls.

Il suffit donc de construire une famille A-orthogonale de n vecteurs $\neq \mathbf{0}$. On peut appliquer la méthode du gradient conjugué à $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ pour construire une famille de $p \leqslant n$ vecteurs A-orthogonale. Si $p < n$ on complète cette famille (que l'on peut aussi construire directement) par :

Théorème (Construction d'une n-famille A-orthogonale.)

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de $p < n$ vecteurs $\neq \mathbf{0}$ A-orthogonale. Posons pour $k = 1, \ldots, p$,

$$D_k = \mathrm{Id} - C_k A \ .$$

Si D_p est la matrice nulle alors, $C_p = A^{-1}$, et sinon soit $\mathbf{u} \notin \ker D_p$ et $\omega_{p+1} = D_p\mathbf{u}$. Alors $\omega_1, \ldots, \omega_{p+1}$ est une famille A-orthogonale de $p+1$ vecteurs non nuls.

Démonstration. Il est clair par construction que si D_p est la matrice nulle alors $C_p = A^{-1}$.

Il suffit donc de construire une famille A-orthogonale de n vecteurs $\neq \mathbf{0}$. On peut appliquer la méthode du gradient conjugué à $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ pour construire une famille de $p \leqslant n$ vecteurs A-orthogonale. Si $p < n$ on complète cette famille (que l'on peut aussi construire directement) par :

Théorème (Construction d'une n-famille A-orthogonale.)

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de $p < n$ vecteurs $\neq \mathbf{0}$ A-orthogonale. Posons pour $k = 1, \ldots, p$,

$$D_k = \mathrm{Id} - C_k A \ .$$

Si D_p est la matrice nulle alors, $C_p = A^{-1}$, et sinon soit $\mathbf{u} \notin \ker D_p$ et $\omega_{p+1} = D_p\mathbf{u}$. Alors $\omega_1, \ldots, \omega_{p+1}$ est une famille A-orthogonale de $p+1$ vecteurs non nuls.

Démonstration. Il est clair par construction que si D_p est la matrice nulle alors $C_p = A^{-1}$. Supposons que ce n'est pas le cas et soit $\mathbf{u} \notin \ker D_p$.

Il suffit donc de construire une famille A-orthogonale de n vecteurs $\neq \mathbf{0}$. On peut appliquer la méthode du gradient conjugué à $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ pour construire une famille de $p \leqslant n$ vecteurs A-orthogonale. Si $p < n$ on complète cette famille (que l'on peut aussi construire directement) par :

Théorème (Construction d'une n-famille A-orthogonale.)

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de $p < n$ vecteurs $\neq \mathbf{0}$ A-orthogonale. Posons pour $k = 1, \ldots, p$,

$$D_k = \mathrm{Id} - C_k A \ .$$

Si D_p est la matrice nulle alors, $C_p = A^{-1}$, et sinon soit $\mathbf{u} \notin \ker D_p$ et $\omega_{p+1} = D_p\mathbf{u}$. Alors $\omega_1, \ldots, \omega_{p+1}$ est une famille A-orthogonale de $p+1$ vecteurs non nuls.

Démonstration. Il est clair par construction que si D_p est la matrice nulle alors $C_p = A^{-1}$. Supposons que ce n'est pas le cas et soit $\mathbf{u} \notin \ker D_p$. Pour $j = 1, \ldots, p$

$$(D_p\mathbf{u})^\top A\omega_j = \mathbf{u}^\top D_p^\top A\omega_j = \mathbf{u}^\top(\mathrm{Id} - AC_p)A\omega_j = \mathbf{u}^\top A\omega_j - \mathbf{u}^\top A(C_pA\omega_j)$$

or $C_pA\omega_j = \omega_j$, voir la preuve du précédent théorème,

$$= \mathbf{u}^\top A\omega_j - \mathbf{u}^\top A\omega_j = 0$$

Il suffit donc de construire une famille A-orthogonale de n vecteurs $\neq \mathbf{0}$. On peut appliquer la méthode du gradient conjugué à $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ pour construire une famille de $p \leqslant n$ vecteurs A-orthogonale. Si $p < n$ on complète cette famille (que l'on peut aussi construire directement) par :

Théorème (Construction d'une n-famille A-orthogonale.)

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une famille de $p < n$ vecteurs $\neq \mathbf{0}$ A-orthogonale. Posons pour $k = 1, \ldots, p$,

$$D_k = \mathrm{Id} - C_k A \ .$$

Si D_p est la matrice nulle alors, $C_p = A^{-1}$, et sinon soit $\mathbf{u} \notin \ker D_p$ et $\omega_{p+1} = D_p\mathbf{u}$. Alors $\omega_1, \ldots, \omega_{p+1}$ est une famille A-orthogonale de $p+1$ vecteurs non nuls.

Démonstration. Il est clair par construction que si D_p est la matrice nulle alors $C_p = A^{-1}$. Supposons que ce n'est pas le cas et soit $\mathbf{u} \notin \ker D_p$. Pour $j = 1, \ldots, p$

$$(D_p\mathbf{u})^\top A\omega_j = \mathbf{u}^\top D_p^\top A\omega_j = \mathbf{u}^\top(\mathrm{Id} - AC_p)A\omega_j = \mathbf{u}^\top A\omega_j - \mathbf{u}^\top A(C_pA\omega_j)$$

or $C_pA\omega_j = \omega_j$, voir la preuve du précédent théorème,

$$= \mathbf{u}^\top A\omega_j - \mathbf{u}^\top A\omega_j = 0$$

Ainsi $\omega_1, \ldots, \omega_{p+1}$ est une famille A-orthogonale, non nulle puisque $\omega_{k+1} = D_p\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. □

Exemple.

Soit la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est définie positive car à trace et déterminant > 0.

Exemple.

Soit la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est définie positive car à trace et déterminant > 0.
Prenons $\omega_1 = (1, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1}$$

Exemple.

Soit la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est définie positive car à trace et déterminant > 0.
Prenons $\omega_1 = (1, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple.

Soit la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est définie positive car à trace et déterminant > 0.
Prenons $\omega_1 = (1, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple.

Soit la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est définie positive car à trace et déterminant > 0.
Prenons $\omega_1 = (1, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $\mathbf{u} = (0, 1) \notin \ker D_1$ et $\omega_2 = D_1 \mathbf{u} = (-\frac{1}{2}, 1)$. Alors :

$$\frac{\omega_2 \omega_2^\top}{\omega_2^\top A \omega_2}$$

Exemple.

Soit la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est définie positive car à trace et déterminant > 0.
Prenons $\omega_1 = (1, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $\mathbf{u} = (0, 1) \notin \ker D_1$ et $\omega_2 = D_1 \mathbf{u} = (-\frac{1}{2}, 1)$. Alors :

$$\frac{\omega_2 \omega_2^\top}{\omega_2^\top A \omega_2} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Exemple.

Soit la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est définie positive car à trace et déterminant > 0.
Prenons $\omega_1 = (1, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $\mathbf{u} = (0, 1) \notin \ker D_1$ et $\omega_2 = D_1 \mathbf{u} = (-\frac{1}{2}, 1)$. Alors :

$$\frac{\omega_2 \omega_2^\top}{\omega_2^\top A \omega_2} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C_2 = C_1 + \frac{\omega_2 \omega_2^\top}{\omega_2^\top A \omega_2} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = A^{-1} .$$

Résolution approchée d'un système non linéaire.

Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 ; résoudre $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ équivaut à résoudre un système de n équations à n inconnues :

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ g_n(x_1, \ldots, x_n) & = 0 \end{cases}$$

Résolution approchée d'un système non linéaire.

Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 ; résoudre $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ équivaut à résoudre un système de n équations à n inconnues :

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ g_n(x_1, \ldots, x_n) & = 0 \end{cases}$$

On peut le résoudre en appliquant la méthode de Newton :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - DF(\mathbf{x}_n)^{-1} F(\mathbf{x}_n)$$

Résolution approchée d'un système non linéaire.

Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 ; résoudre $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ équivaut à résoudre un système de n équations à n inconnues :

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ g_n(x_1, \ldots, x_n) & = 0 \end{cases}$$

On peut le résoudre en appliquant la méthode de Newton :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - DF(\mathbf{x}_n)^{-1} F(\mathbf{x}_n)$$

Chaque itération revient à résoudre le système d'équations linéaires d'inconnue $\delta\mathbf{x}_n$:

$$DF(\mathbf{x}_n)\delta\mathbf{x}_n = F(\mathbf{x}_n)$$

puis à poser : $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \delta\mathbf{x}_n$.

Méthode quasi-Newton

Seulement chaque itération est coûteuse en temps de calcul.

Méthode quasi-Newton

Seulement chaque itération est coûteuse en temps de calcul. Aussi peut-on lui préférer en pratique une **méthode quasi-Newton** qui consiste en chaque itération à remplacer $DF(\mathbf{x}_n)$ par une matrice $A_n(\mathbf{x}_n)$ pour laquelle la résolution du système linéaire est moins coûteuse.

Méthode quasi-Newton

Seulement chaque itération est coûteuse en temps de calcul. Aussi peut-on lui préférer en pratique une **méthode quasi-Newton** qui consiste en chaque itération à remplacer $DF(\mathbf{x}_n)$ par une matrice $A_n(\mathbf{x}_n)$ pour laquelle la résolution du système linéaire est moins coûteuse.

Il y a beaucoup de telles méthodes, en voici deux :

Méthode quasi-Newton

Seulement chaque itération est coûteuse en temps de calcul. Aussi peut-on lui préférer en pratique une **méthode quasi-Newton** qui consiste en chaque itération à remplacer $DF(\mathbf{x}_n)$ par une matrice $A_n(\mathbf{x}_n)$ pour laquelle la résolution du système linéaire est moins coûteuse.

Il y a beaucoup de telles méthodes, en voici deux :

- Fixer un entier k et poser $\forall\, n = p, p+1, \ldots, p+k$, $A_n(\mathbf{x}_n) = DF(\mathbf{x}_p)$ et $A_{p+k+1}(\mathbf{x}_{p+k+1}) = DF(\mathbf{x}_{p+k+1})$ (c'est-à-dire conserve la matrice $DF(\mathbf{x}_p)$ sur k itérations). Lorsque k est suffisamment petit, cette méthode quasi-Newton converge.

Méthode quasi-Newton

Seulement chaque itération est coûteuse en temps de calcul. Aussi peut-on lui préférer en pratique une **méthode quasi-Newton** qui consiste en chaque itération à remplacer $DF(\mathbf{x}_n)$ par une matrice $A_n(\mathbf{x}_n)$ pour laquelle la résolution du système linéaire est moins coûteuse.
Il y a beaucoup de telles méthodes, en voici deux :

- Fixer un entier k et poser $\forall\, n = p, p+1, \ldots, p+k$, $A_n(\mathbf{x}_n) = DF(\mathbf{x}_p)$ et $A_{p+k+1}(\mathbf{x}_{p+k+1}) = DF(\mathbf{x}_{p+k+1})$ (c'est-à-dire conserve la matrice $DF(\mathbf{x}_p)$ sur k itérations). Lorsque k est suffisamment petit, cette méthode quasi-Newton converge.
- Poser $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A_n(\mathbf{x}_n) = Id$, *i.e.* $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - F(\mathbf{x}_n)$. C'est la **méthode des approximations successives**.

Soit p un entier strictement positif, et un nuage (=suite finie) de p points de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)\} \ .$$

Soit p un entier strictement positif, et un nuage (=suite finie) de p points de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)\} \ .$$

Soit

$$\{f_{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$$

une famille d'applications dépendant continûment de n paramètres réels.

Soit p un entier strictement positif, et un nuage (=suite finie) de p points de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)\} \ .$$

Soit

$$\{f_{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$$

une famille d'applications dépendant continûment de n paramètres réels. Soit $\|.\|_{\mathbb{R}^p}$ une norme de $\mathbb{R}^p$, posons :

$$Z(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} y_1 - f_{\mathbf{u}}(x_1) \\ y_2 - f_{\mathbf{u}}(x_2) \\ \vdots \\ y_p - f_{\mathbf{u}}(x_p) \end{pmatrix}$$

Soit p un entier strictement positif, et un nuage (=suite finie) de p points de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)\} \ .$$

Soit

$$\{f_{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$$

une famille d'applications dépendant continûment de n paramètres réels. Soit $\|.\|_{\mathbb{R}^p}$ une norme de $\mathbb{R}^p$, posons :

$$Z(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} y_1 - f_{\mathbf{u}}(x_1) \\ y_2 - f_{\mathbf{u}}(x_2) \\ \vdots \\ y_p - f_{\mathbf{u}}(x_p) \end{pmatrix}$$

et considérons le problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \quad \|Z(\mathbf{u})\|_{\mathbb{R}^p}$$

Soit p un entier strictement positif, et un nuage (=suite finie) de p points de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)\} \ .$$

Soit

$$\{f_{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$$

une famille d'applications dépendant continûment de n paramètres réels. Soit $\|.\|_{\mathbb{R}^p}$ une norme de $\mathbb{R}^p$, posons :

$$Z(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} y_1 - f_{\mathbf{u}}(x_1) \\ y_2 - f_{\mathbf{u}}(x_2) \\ \vdots \\ y_p - f_{\mathbf{u}}(x_p) \end{pmatrix}$$

et considérons le problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \quad \|Z(\mathbf{u})\|_{\mathbb{R}^p}$$

C'est un **problème d'approximation** du nuage de points par une application de la classe $\{f_{\mathbf{u}} \,|\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$.

• Lorsque $\|Z(\mathbf{u})\|$ a pour valeur minimale 0, il s'agit d'un **problème d'interpolation**. Dans ce cas le résultat est indépendant de la norme $\|.\|_{\mathbb{R}^p}$ considérée.

• Lorsque $\|Z(\mathbf{u})\|$ a pour valeur minimale 0, il s'agit d'un **problème d'interpolation**. Dans ce cas le résultat est indépendant de la norme $\|.\|_{\mathbb{R}^p}$ considérée.

• Lorsque $\|.\|_{\mathbb{R}^p} = \|.\|_2$, c'est-à-dire, $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ il s'agit d'un **problème d'approximation au sens des moindres carrés**.

• Lorsque $\|Z(\mathbf{u})\|$ a pour valeur minimale 0, il s'agit d'un **problème d'interpolation**. Dans ce cas le résultat est indépendant de la norme $\|.\|_{\mathbb{R}^p}$ considérée.

• Lorsque $\|.\|_{\mathbb{R}^p} = \|.\|_2$, c'est-à-dire, $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ il s'agit d'un **problème d'approximation au sens des moindres carrés**.

• Lorsque $\|.\|_{\mathbb{R}^p} = \|.\|_\infty$, c'est-à-dire, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, il s'agit d'un **problème d'approximation au sens de Tchebychev** ou encore d'un **problème d'approximation minimax**.

- Lorsque $f_{\mathbf{u}}$ dépend linéairement des paramètres $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ on parle d'**approximation linéaire** ; c'est-à-dire, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \longrightarrow f_{\mathbf{u}}(x)$ est linéaire.

• Lorsque $f_{\mathbf{u}}$ dépend linéairement des paramètres $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ on parle d'**approximation linéaire** ; c'est-à-dire, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \longrightarrow f_{\mathbf{u}}(x)$ est linéaire. Dans ce cas, on a la notation matricielle :

$$\forall\, i = 1, \ldots, p, \quad f_{\mathbf{u}}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} z_{ij}\, u_j$$

$$M = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{p1} & \cdots & z_{pn} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \ ,$$

et le problème s'écrit :

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \quad \|M\mathbf{u} - \mathbf{y}\|$$

Approximation linéaire au sens des moindres carrés.

Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ donnés. On s'intéresse à :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2 = \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \left(\|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2\right)^2 = \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{p} \left((M\mathbf{u})_i - \mathbf{y}_i\right)^2 \quad . \tag{$*$}$$

Approximation linéaire au sens des moindres carrés.

Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ donnés. On s'intéresse à :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2 = \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \left(\|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2\right)^2 = \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{p} \left((M\mathbf{u})_i - \mathbf{y}_i\right)^2 \ . \tag{$*$}$$

- **Existence d'une solution.**

$Im(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$; c'est donc un fermé convexe non vide. Avec le théorème de projection convexe :

$$\exists\,!\,\tilde{\mathbf{u}} = M\mathbf{u} \text{ tel que } \|\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{y}\| = \min_{\mathbf{v}\in Im(M)} \|\mathbf{v}-\mathbf{y}\| \ .$$

et un élément $\mathbf{u}^*$ tel que $\tilde{\mathbf{u}} = M\mathbf{u}^*$ est une solution du problème d'approximation.

- **Comment déterminer la solution ?**

- **Comment déterminer la solution ?**

Posons :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\|M\mathbf{u} - \mathbf{y}\|_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{y}\|\right)^2 = \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u} - \mathbf{y}, M\mathbf{u} - \mathbf{y}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}, M\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{y}, M\mathbf{u}\rangle = \frac{1}{2}\langle M^\top M\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle M^\top \mathbf{y}, \mathbf{u}\rangle$$

- **Comment déterminer la solution ?**

Posons :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{y}\|\right)^2 = \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}-\mathbf{y}, M\mathbf{u}-\mathbf{y}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}, M\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{y}, M\mathbf{u}\rangle = \frac{1}{2}\langle M^\top M\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle M^\top \mathbf{y}, \mathbf{u}\rangle$$

$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quadratique de matrice Hessienne $M^\top M$, et :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} J(\mathbf{u}) \;=\; \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2$$

- **Comment déterminer la solution ?**

Posons :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{y}\|\right)^2 = \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}-\mathbf{y}, M\mathbf{u}-\mathbf{y}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}, M\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{y}, M\mathbf{u}\rangle = \frac{1}{2}\langle M^\top M\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - \langle M^\top \mathbf{y},\mathbf{u}\rangle$$

$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quadratique de matrice Hessienne $M^\top M$, et :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} J(\mathbf{u}) \;=\; \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2$$

Or $\forall\, M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, la matrice carrée $M^\top M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est semi-définie positive et même définie positive lorsque M est de rang maximal.

- **Comment déterminer la solution ?**

Posons :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{y}\|\right)^2 = \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}-\mathbf{y}, M\mathbf{u}-\mathbf{y}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}, M\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{y}, M\mathbf{u}\rangle = \frac{1}{2}\langle M^\top M\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - \langle M^\top \mathbf{y},\mathbf{u}\rangle$$

$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quadratique de matrice Hessienne $M^\top M$, et :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} J(\mathbf{u}) \;=\; \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2$$

Or $\forall\, M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, la matrice carrée $M^\top M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est semi-définie positive et même définie positive lorsque M est de rang maximal. Ainsi un minimum $\mathbf{u}^*$ de $(*)$ est caractérisé comme solution du système linéaire :

$$M^\top M\mathbf{u} = M^\top \mathbf{y}$$

d'inconnue $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$.

- **Comment déterminer la solution ?**

Posons :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{y}\|\right)^2 = \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}-\mathbf{y}, M\mathbf{u}-\mathbf{y}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}, M\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{y}, M\mathbf{u}\rangle = \frac{1}{2}\langle M^\top M\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - \langle M^\top \mathbf{y},\mathbf{u}\rangle$$

$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quadratique de matrice Hessienne $M^\top M$, et :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} J(\mathbf{u}) \;=\; \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2$$

Or $\forall\, M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, la matrice carrée $M^\top M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est semi-définie positive et même définie positive lorsque M est de rang maximal. Ainsi un minimum $\mathbf{u}^*$ de $(*)$ est caractérisé comme solution du système linéaire :

$$M^\top M\mathbf{u} = M^\top \mathbf{y}$$

d'inconnue $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$. Si en outre $p = n$ et M est inversible, alors $M^\top M$ est définie positive. Dans ce cas il existe une unique solution $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^p$ de $(*)$ caractérisée par le système de Cramer :

$$M\mathbf{u} = \mathbf{y}\ .$$

- **Comment déterminer la solution ?**

Posons :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{y}\|\right)^2 = \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}-\mathbf{y}, M\mathbf{u}-\mathbf{y}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle M\mathbf{u}, M\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{y}, M\mathbf{u}\rangle = \frac{1}{2}\langle M^\top M\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - \langle M^\top \mathbf{y},\mathbf{u}\rangle$$

$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quadratique de matrice Hessienne $M^\top M$, et :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} J(\mathbf{u}) \;=\; \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \|M\mathbf{u}-\mathbf{y}\|_2$$

Or $\forall\, M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, la matrice carrée $M^\top M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est semi-définie positive et même définie positive lorsque M est de rang maximal. Ainsi un minimum $\mathbf{u}^*$ de $(*)$ est caractérisé comme solution du système linéaire :

$$M^\top M\mathbf{u} = M^\top \mathbf{y}$$

d'inconnue $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$. Si en outre $p = n$ et M est inversible, alors $M^\top M$ est définie positive. Dans ce cas il existe une unique solution $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^p$ de $(*)$ caractérisée par le système de Cramer :

$$M\mathbf{u} = \mathbf{y}\ .$$

Il s'agit alors d'un problème d'interpolation linéaire.

On peut résumer tous ces faits dans le théorème suivant :

On peut résumer tous ces faits dans le théorème suivant :

Théorème (Approximation linéaire au sens des moindres carrés.)

Un problème d'approximation linéaire d'un nuage de points au sens des moindres carrés admet toujours une solution.

On peut résumer tous ces faits dans le théorème suivant :

Théorème (Approximation linéaire au sens des moindres carrés.)

Un problème d'approximation linéaire d'un nuage de points au sens des moindres carrés admet toujours une solution. En notant $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ la matrice associée, une solution est caractérisée par le système linéaire d'inconnue $\mathbf{u}$ *:*

$$M^\top M\mathbf{u} = M^\top \mathbf{y}$$

On peut résumer tous ces faits dans le théorème suivant :

Théorème (Approximation linéaire au sens des moindres carrés.)

Un problème d'approximation linéaire d'un nuage de points au sens des moindres carrés admet toujours une solution. En notant $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *la matrice associée, une solution est caractérisée par le système linéaire d'inconnue* $\mathbf{u}$ *:*

$$M^\top M\mathbf{u} = M^\top \mathbf{y}$$

De plus la solution est unique si et seulement si M *est de rang maximal. Lorsque* M *est inversible la solution est aussi caractérisée par le système de Cramer* $M\mathbf{u} = \mathbf{y}$*, et il s'agit alors d'une interpolation (la valeur minimale est 0).*

Exemple : droite de régression linéaire.

On cherche la droite $y = ax + b$ qui approche le mieux le nuage de points $(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)$ de $\mathbb{R}^2$ au sens des moindres carrés.
Soit $f_{a,b}(x) = ax + b$; on cherche :

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} \quad \sum_{i=1}^{p} (y_i - ax_i - b)^2$$

posons $u = (a, b)$ et

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_p & 1 \end{pmatrix}, \; M^\top M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} x_i^2 & \sum_{i=1}^{p} x_i \\ \sum_{i=1}^{p} x_i & p \end{pmatrix}, \; M^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{p} y_i \end{pmatrix}$$

posons $u = (a, b)$ et

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_p & 1 \end{pmatrix}, \; M^\top M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} x_i^2 & \sum_{i=1}^{p} x_i \\ \sum_{i=1}^{p} x_i & p \end{pmatrix}, \; M^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{p} y_i \end{pmatrix}$$

Or $\det(M^\top M) = p \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{p} x_i)^2 \neq 0$. Ainsi existe-t-il une unique solution (a, b), caractérisée par le système :

posons $u = (a, b)$ et

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_p & 1 \end{pmatrix}, \; M^\top M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} x_i^2 & \sum_{i=1}^{p} x_i \\ \sum_{i=1}^{p} x_i & p \end{pmatrix}, \; M^\top \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{p} y_i \end{pmatrix}$$

Or $\det(M^\top M) = p \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{p} x_i)^2 \neq 0$. Ainsi existe-t-il une unique solution (a, b), caractérisée par le système :

$$M^\top M \mathbf{u} = M^\top \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a \sum_{i=1}^{p} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^{p} x_i + bp = \sum_{i=1}^{p} y_i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= \frac{p\sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{i=1}^{p} y_i}{p\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{p} x_i)^2} \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \sum_{i=1}^{p} y_i - \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{i=1}^{p} x_i y_i}{p\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{p} x_i)^2} \end{aligned}}$$

Exemple : le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Soit $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)\}$ un nuage de points, soit $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, et soit l'application $f_{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ polynômiale à coefficients réels de degré au plus $n-1$, $f_{\mathbf{u}}(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_{n-1} x^{n-1}$.

Exemple : le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Soit $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)\}$ un nuage de points, soit $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, et soit l'application $f_{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ polynômiale à coefficients réels de degré au plus $n-1$, $f_{\mathbf{u}}(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_{n-1} x^{n-1}$.

Le problème d'approximation du nuage de points par une application polynomiale de degré au plus $n-1$ au sens des moindres carrés est un problème d'approximation linéaire, et sa matrice associée est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_p & x_p^2 & \cdots & x_p^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Elle est de rang maximal lorsque $n \leqslant p$ (voir plus loin le déterminant d'une matrice carrée de Vandermonde), et donc

$$M^\top M = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^p x_i & \sum_{i=1}^p x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^p x_i^{n-1} \\ \sum_{i=1}^p x_i & \sum_{i=1}^p x_i^2 & \sum_{i=1}^p x_i^3 & & \vdots \\ \sum_{i=1}^p x_i^2 & \sum_{i=1}^p x_i^3 & \sum_{i=1}^p x_i^4 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p x_i^{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^p x_i^{2n-2} \end{pmatrix}$$

est lorsque $n \leqslant p$ inversible, et même symétrique définie positive.

Elle est de rang maximal lorsque $n \leqslant p$ (voir plus loin le déterminant d'une matrice carrée de Vandermonde), et donc

$$M^\top M = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^p x_i & \sum_{i=1}^p x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^p x_i^{n-1} \\ \sum_{i=1}^p x_i & \sum_{i=1}^p x_i^2 & \sum_{i=1}^p x_i^3 & & \vdots \\ \sum_{i=1}^p x_i^2 & \sum_{i=1}^p x_i^3 & \sum_{i=1}^p x_i^4 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p x_i^{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^p x_i^{2n-2} \end{pmatrix}$$

est lorsque $n \leqslant p$ inversible, et même symétrique définie positive. Il existe donc lorsque $n \leqslant p$ une unique solution $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^n$, pour lequel $f_{\mathbf{u}^*}$ est la meilleure approximation du nuage de points au sens des moindres carrés.

Une solution est caractérisée par le système d'inconnue $\mathbf{u}$, $M^\top M\mathbf{u} = M^\top \mathbf{y}$, qui s'écrit ici :

$$\begin{cases} u_0 & +u_1 \sum_{i=1}^{p} x_i & +\cdots & +u_{n-1} \sum_{i=1}^{p} x_i^{n-1} & = \sum_{i=1}^{p} y_i \\ u_0 \sum_{i=1}^{p} x_i & +u_1 \sum_{i=1}^{p} x_i^2 & +\cdots & +u_{n-1} \sum_{i=1}^{p} x_i^{n} & = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_0 \sum_{i=1}^{p} x_i^{n-1} & +u_1 \sum_{i=1}^{p} x_i^{n} & +\cdots & +u_{n-1} \sum_{i=1}^{p} x_i^{2n-2} & = \sum_{i=1}^{p} x_i^{n-1} y_i \end{cases}$$

• Lorsque $n < p$. La solution optimale $f_{\mathbf{u}^*}$ est unique. On peut en déterminer une valeur approchée en implémentant les méthodes de résolution approchées vues au dernier chapitre.

• Lorsque $n < p$. La solution optimale $f_{\mathbf{u}^*}$ est unique. On peut en déterminer une valeur approchée en implémentant les méthodes de résolution approchées vues au dernier chapitre.

• Lorsque $n = p$. La matrice M est une *matrice de Vandermonde*, et son déterminant est $\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n}(x_i - x_j) \neq 0$. M est inversible, et il existe donc une unique solution $\mathbf{u}^*$; $f_{\mathbf{u}*}$ est le polynôme de degré minimal interpolant le nuage de points. C'est le **polynôme d'interpolation de Lagrange**.Il s'écrit explicitement :

$$f_{\mathbf{u}^*}(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i \prod_{j=1, i \neq j}^{p} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

• Lorsque $n < p$. La solution optimale $f_{\mathbf{u}^*}$ est unique. On peut en déterminer une valeur approchée en implémentant les méthodes de résolution approchées vues au dernier chapitre.

• Lorsque $n = p$. La matrice M est une *matrice de Vandermonde*, et son déterminant est $\prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n}(x_i - x_j) \neq 0$. M est inversible, et il existe donc une unique solution $\mathbf{u}^*$; $f_{\mathbf{u}^*}$ est le polynôme de degré minimal interpolant le nuage de points. C'est le **polynôme d'interpolation de Lagrange**.Il s'écrit explicitement :

$$f_{\mathbf{u}^*}(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i \prod_{j=1, i \neq j}^{p} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

• Lorsque $n > p$. L'ensemble des solutions est un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ des polynômes de degré au plus $n-1$. Une solution particulière est donnée par le polynôme d'interpolation de Lagrange, et une base du sous-espace vectoriel sous-jacent est donnée par :

$$\left\{ \prod_{i=1}^{p}(x - x_i) \, ; \, x \prod_{i=1}^{p}(x - x_i) \, ; \, \ldots \, ; \, x^{n-1-p} \prod_{i=1}^{p}(x - x_i) \right\}$$

C'est l'ensemble des polynômes de degré au plus $n - 1 - p$ ayant $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pour racines, c'est-à-dire les solutions du problème homogène associé.

Approximation minimax

Donnés un nuage de points $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)\}$ et une classe d'applications $f_{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendant d'un paramètre $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, on cherche, une fois posé $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)$ à résoudre le problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\|_\infty = \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \left(\max_{k=1..p} |y_k - f_{\mathbf{u}}(x_k)| \right)$$

Approximation minimax

Donnés un nuage de points $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)\}$ et une classe d'applications $f_{\mathbf{u}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendant d'un paramètre $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, on cherche, une fois posé $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)$ à résoudre le problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\|_\infty = \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \left(\max_{k=1..p} |y_k - f_{\mathbf{u}}(x_k)| \right)$$

Il s'écrit aussi comme le problème d'optimisation avec $2p$ contraintes inégalitaires suivant :

$$\min_{r\in\mathbb{R},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \quad r$$

$$\begin{cases} y_k - f_{\mathbf{u}}(x_k) - r \leqslant 0 \\ -y_k + f_{\mathbf{u}}(x_k) - r \leqslant 0 \\ k = 1, 2, \ldots, p \end{cases}$$

(implicitement $r \geqslant 0$ puisque $|y_k - f_{\mathbf{u}}(x_k)| \leqslant r$.)

Approximation minimax linéaire.

Lorsque $f_{\mathbf{u}}$ dépend linéairement de $\mathbf{u}$, c'est à dire lorsque $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \longrightarrow f_{\mathbf{u}}(x)$ est linéaire : $f_{\mathbf{u}}(x_i) = \sum_{j=1}^{p} z_{ij}\, u_j$, notons $M = (z_{ij})_{\substack{i=1..p \\ j=1..n}} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$, le problème s'écrit matriciellement :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \|M\mathbf{u} - \mathbf{y}\|_\infty$$

qui est équivalent à :

$$\min_{r\in\mathbb{R},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n} \quad r$$

$$\begin{cases} y_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} z_{ik}\, u_k - r \leqslant 0 \\ -y_k + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} z_{ik}\, u_k - r \leqslant 0 \\ k = 1, 2, \ldots, p \end{cases}$$

C'est un problème de programmation linéaire. Puisque r est minoré, $r \geq 0$, il existe une solution au problème que l'on détermine avec la méthode du simplexe.

C'est un problème de programmation linéaire. Puisque r est minoré, $r \geq 0$, il existe une solution au problème que l'on détermine avec la méthode du simplexe.

Théorème

Un problème d'approximation minimax linéaire s'exprime comme un problème de programmation linéaire et admet toujours au moins une solution.

Interprétation algébrique.

Notons pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{z}_i = (z_{1i}, z_{2i}, \ldots, z_{pi}) \in \mathbb{R}^p$, c'est-à-dire les n vecteurs colonnes de la matrice M.

Interprétation algébrique.

Notons pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{z}_i = (z_{1i}, z_{2i}, \ldots, z_{pi}) \in \mathbb{R}^p$, c'est-à-dire les n vecteurs colonnes de la matrice M.

• Si la famille $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ n'est pas linéairement indépendante alors un des paramètres $u_1, \ldots, u_n$ peut être supprimé. On réduit le problème à un problème minimax linéaire équivalent et de dimension inférieure.
Aussi suppose-t-on dans la suite que les $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ forment une famille libre.

Interprétation algébrique.

Notons pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{z}_i = (z_{1i}, z_{2i}, \ldots, z_{pi}) \in \mathbb{R}^p$, c'est-à-dire les n vecteurs colonnes de la matrice M.

• Si la famille $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ n'est pas linéairement indépendante alors un des paramètres $u_1, \ldots, u_n$ peut être supprimé. On réduit le problème à un problème minimax linéaire équivalent et de dimension inférieure.
Aussi suppose-t-on dans la suite que les $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ forment une famille libre.

• Lorsque $p \leqslant n$ la valeur minimale de $\|M\mathbf{u} - \mathbf{y}\|$ est 0 ; le problème consiste en la résolution du système linéaire $M\mathbf{u} = \mathbf{y}$ d'inconnue $\mathbf{u}$; appliquer ici la méthode du simplexe au problème linéaire équivalent consiste en fait à le résoudre par une variante de la méthode du pivot de Gauss ; cela ne présente pas un grand intérêt.

Interprétation algébrique.

Notons pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{z}_i = (z_{1i}, z_{2i}, \ldots, z_{pi}) \in \mathbb{R}^p$, c'est-à-dire les n vecteurs colonnes de la matrice M.

• Si la famille $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ n'est pas linéairement indépendante alors un des paramètres $u_1, \ldots, u_n$ peut être supprimé. On réduit le problème à un problème minimax linéaire équivalent et de dimension inférieure.
Aussi suppose-t-on dans la suite que les $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ forment une famille libre.

• Lorsque $p \leqslant n$ la valeur minimale de $\|M\mathbf{u} - \mathbf{y}\|$ est 0 ; le problème consiste en la résolution du système linéaire $M\mathbf{u} = \mathbf{y}$ d'inconnue $\mathbf{u}$; appliquer ici la méthode du simplexe au problème linéaire équivalent consiste en fait à le résoudre par une variante de la méthode du pivot de Gauss ; cela ne présente pas un grand intérêt.

• Par contre lorsque $n < p$ et que le système linéaire $M\mathbf{u} = \mathbf{y}$ n'admet pas de solution : la solution $\tilde{\mathbf{u}}$ au problème minimax est optimale dans le sens où c'est l'élément le plus proche (pour la norme $\|.\|_\infty$) d'être une solution.

Interprétation géométrique.

Notons pour $i = 1, 2, \ldots, p$, $\bar{\mathbf{z}}_i = (z_{i1}\ z_{i2}\ \cdots\ z_{in}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les p matrices lignes de la matrice M. On considère les p hyperplans, $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$, définis par $\mathcal{H}_i = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\mathbf{z}}_i \mathbf{u} = y_i\}$.

Interprétation géométrique.

Notons pour $i = 1, 2, \ldots, p$, $\bar{\mathbf{z}}_i = (z_{i1}\ z_{i2}\ \cdots\ z_{in}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les p matrices lignes de la matrice M. On considère les p hyperplans, $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$, définis par $\mathcal{H}_i = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \,|\, \bar{\mathbf{z}}_i \mathbf{u} = y_i\}$.

- Une solution $\tilde{\mathbf{u}}$ du problème minimax est un point de $\mathbb{R}^n$ dont la distance maximale à la famille d'hyperplans $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$ est minimale.

Interprétation géométrique.

Notons pour $i = 1, 2, \ldots, p$, $\bar{\mathbf{z}}_i = (z_{i1}\ z_{i2}\ \cdots\ z_{in}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les p matrices lignes de la matrice M. On considère les p hyperplans, $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$, définis par $\mathcal{H}_i = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\mathbf{z}}_i \mathbf{u} = y_i\}$.

- Une solution $\tilde{\mathbf{u}}$ du problème minimax est un point de $\mathbb{R}^n$ dont la distance maximale à la famille d'hyperplans $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$ est minimale.
- Exemple en dimension 2 : les p hyperplans sont des droites.

Interprétation géométrique.

Notons pour $i = 1, 2, \ldots, p$, $\bar{\mathbf{z}}_i = (z_{i1}\ z_{i2}\ \cdots\ z_{in}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les p matrices lignes de la matrice M. On considère les p hyperplans, $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$, définis par $\mathcal{H}_i = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\mathbf{z}}_i \mathbf{u} = y_i\}$.

- Une solution $\tilde{\mathbf{u}}$ du problème minimax est un point de $\mathbb{R}^n$ dont la distance maximale à la famille d'hyperplans $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$ est minimale.
- Exemple en dimension 2 : les p hyperplans sont des droites.

– Si $p = 1$ une solution $\tilde{\mathbf{u}}$ est n'importe quel point de la droite $\mathcal{H}_1$.

Interprétation géométrique.

Notons pour $i = 1, 2, \ldots, p$, $\bar{\mathbf{z}}_i = (z_{i1}\ z_{i2}\ \cdots\ z_{in}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les p matrices lignes de la matrice M. On considère les p hyperplans, $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$, définis par $\mathcal{H}_i = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\mathbf{z}}_i \mathbf{u} = y_i\}$.

• Une solution $\tilde{\mathbf{u}}$ du problème minimax est un point de $\mathbb{R}^n$ dont la distance maximale à la famille d'hyperplans $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_p$ est minimale.

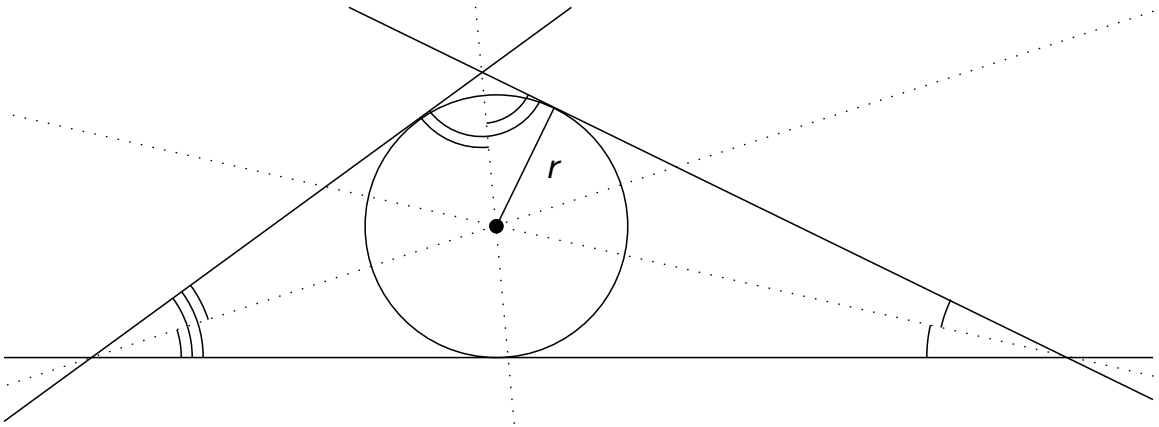
• Exemple en dimension 2 : les p hyperplans sont des droites.

– Si $p = 1$ une solution $\tilde{\mathbf{u}}$ est n'importe quel point de la droite $\mathcal{H}_1$.

– Si $p = 2$; si les 2 droites $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ sont non parallèles, l'unique solution $\tilde{\mathbf{u}}$ est leur point d'intersection ; c'est la solution d'un système de 2 équations linéaires. Si $\mathcal{H}_1 ; \mathcal{H}_2$ sont parallèles ; soit elles sont confondues, et dans ce cas tout point de $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ est solution ; soit elles sont disjointes, et l'ensemble des solutions est une droite parallèle et équidistante à $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$.

– Si $p = 3$; si les 3 droites sont deux à deux non parallèles elles découpent un triangle et la solution du problème minimax est le centre du cercle inscrit à ce triangle ; si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ sont parallèles et $\mathcal{H}_3$ ne leur est pas parallèle, la solution est le point de $\mathcal{H}_3$ équidistant de $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$; *etc...*

– Si $p = 3$; si les 3 droites sont deux à deux non parallèles elles découpent un triangle et la solution du problème minimax est le centre du cercle inscrit à ce triangle ; si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ sont parallèles et $\mathcal{H}_3$ ne leur est pas parallèle, la solution est le point de $\mathcal{H}_3$ équidistant de $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$; *etc...*



Le centre du cercle inscrit est la solution d'un problème minimax d'approximation linéaire à deux paramètres d'un nuage de 3 points.

Exercices

▸ Exercice 1.

▸ Exercice 2.

Exercice 1.

Justifier que la matrice symétrique A ci-dessous est définie positive.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer son inverse.

◂ Retour.

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 + (-1) = 4,$$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 + (-1) = 4,$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 + (-1) = 4,$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\det(A_1) = 2 \ .$$

Ainsi A est définie positive.

Prenons $\omega = (1, 0, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1}$$

Prenons $\omega = (1, 0, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prenons $\omega = (1, 0, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A$$

Prenons $\omega = (1, 0, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Prenons $\omega = (1, 0, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Posons $\mathbf{u} = (0, 2, 0) \notin \ker D_1$ et $\omega_2 = D_1 \mathbf{u} = (-1, 2, 0)$.

Prenons $\omega = (1, 0, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Posons $\mathbf{u} = (0, 2, 0) \notin \ker D_1$ et $\omega_2 = D_1 \mathbf{u} = (-1, 2, 0)$. Alors :

$$\frac{\omega_2 \omega_2^\top}{\omega_2^\top A \omega_2}$$

Prenons $\omega = (1, 0, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Posons $\mathbf{u} = (0, 2, 0) \notin \ker D_1$ et $\omega_2 = D_1 \mathbf{u} = (-1, 2, 0)$. Alors :

$$\frac{\omega_2 \omega_2^\top}{\omega_2^\top A \omega_2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prenons $\omega = (1, 0, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Posons $\mathbf{u} = (0, 2, 0) \notin \ker D_1$ et $\omega_2 = D_1 \mathbf{u} = (-1, 2, 0)$. Alors :

$$\frac{\omega_2 \omega_2^\top}{\omega_2^\top A \omega_2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = C_1 + \frac{\omega_2 \omega_2^\top}{\omega_2^\top A \omega_2}$$

Prenons $\omega = (1, 0, 0)$, alors :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_1^\top}{\omega_1^\top A \omega_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \mathrm{Id} - C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Posons $\mathbf{u} = (0, 2, 0) \notin \ker D_1$ et $\omega_2 = D_1 \mathbf{u} = (-1, 2, 0)$. Alors :

$$\frac{\omega_2 \omega_2^\top}{\omega_2^\top A \omega_2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = C_1 + \frac{\omega_2 \omega_2^\top}{\omega_2^\top A \omega_2} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Posons $v = (0, 0, 3) \notin \ker D_2$ et $\omega_3 = D_2\mathbf{v} = (-1, -1, 3)$.

Posons $v = (0, 0, 3) \notin \ker D_2$ et $\omega_3 = D_2\mathbf{v} = (-1, -1, 3)$. Alors,

$$\frac{\omega_3 \omega_3^\top}{\omega_3^\top A \omega_3}$$

Posons $v = (0, 0, 3) \notin \ker D_2$ et $\omega_3 = D_2\mathbf{v} = (-1, -1, 3)$. Alors,

$$\frac{\omega_3 \omega_3^\top}{\omega_3^\top A \omega_3} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Posons $v = (0, 0, 3) \notin \ker D_2$ et $\omega_3 = D_2\mathbf{v} = (-1, -1, 3)$. Alors,

$$\frac{\omega_3 \omega_3^\top}{\omega_3^\top A \omega_3} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = C_2 + \frac{\omega_3 \omega_3^\top}{\omega_3^\top A \omega_3}$$

Posons $v = (0, 0, 3) \notin \ker D_2$ et $\omega_3 = D_2\mathbf{v} = (-1, -1, 3)$. Alors,

$$\frac{\omega_3 \omega_3^\top}{\omega_3^\top A \omega_3} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = C_2 + \frac{\omega_3 \omega_3^\top}{\omega_3^\top A \omega_3} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = A^{-1} .$$

◂ Retour.

Exercice 2.

Déterminer l'espace des polynômes P de degré au plus 5 interpolant les points $(0,0)$, $(1,1)$ et $(2,2)$.

On commence par déterminer le polynôme $p(x)$ d'interpolation de Lagrange des points $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$.

On commence par déterminer le polynôme $p(x)$ d'interpolation de Lagrange des points $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$. On pourraît remarquer que $x \mapsto x$ interpole ces points et est de degré 1 et donc minimal ; ainsi $p(x) = x$. On applique cependant naïvement la formule :

On commence par déterminer le polynôme $p(x)$ d'interpolation de Lagrange des points $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$. On pourraît remarquer que $x \mapsto x$ interpole ces points et est de degré 1 et donc minimal ; ainsi $p(x) = x$. On applique cependant naïvement la formule :

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=1}^{3} y_i \prod_{j=1, i\neq j}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\ &= 1 \times \frac{x-0}{1-0} \times \frac{x-2}{1-2} + 2 \times \frac{x}{2-0} \times \frac{x-1}{2-1} \\ &= x(2-x) + x(x-1) \\ &= x \end{aligned}$$

L'ensemble des polynômes de degré au plus 5 interpolant ces 3 points est l'ensemble des polynômes :

$$P_{a,b,c}(x) = x + x(x-1)(x-2)(a+bx+cx^2)$$

où a, b, c décrivent $\mathbb{R}$.

◂ Retour.