OPTIMISATION - CONTROLE 2010

Durée 2 heures.
Tous les documents de cours et de TP sont autorisés.

Exercice 1. (4,25 pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 + x^2y + xy^2 - 9x - 9y$$

1,75 **1)** Calculer en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ le vecteur gradient $\nabla f(x,y)$ et déterminer tous les points critiques de f.

2 **2)** Calculer en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice hessienne $\nabla^2 f(x,y)$ et déterminer les extrema locaux de f.

0.5 **3)** La fonction f admet-elle des extrema globaux ?

Exercice 2. (4 pts)

Soit l'application définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = 2x - y\ .$$

2 **1)** Justifier de l'existence d'extrema sur le domaine :

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\right\}\ .$$

Les déterminer.

2 **2)** Justifier de l'existence d'extrema sur le domaine :

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}\ .$$

Les déterminer.

Exercice 3. (4 pts)

On considère les 4 applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= 2x^2 + y^2 + xy - 3x + y + 2 \\
f_2(x,y) &= -x^2 - y^2 + xy - x - y + 1 \\
f_3(x,y) &= x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y - 1 \\
f_4(x,y) &= x^2 + y^2 + 3xy + 2x + 3y + 1
\end{aligned}$$

2 **1)** Déterminer les extrema de chacune de ces applications.

1 **2)** Parmi ces applications lesquelles sont (respectivement fortement) convexes, (respectivement fortement) concaves ?

1 **3)** Parmi ces applications lesquelles sont coercives ?

Exercice 4. (3 pts)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan $\mathcal{P}$ d'équation :

$$(\mathcal{P}) \ : \quad 2x + 3y - z = 2 \ .$$

On cherche à déterminer —s'il existe— le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de l'origine $(0, 0, 0)$.

0.5 **1)** Retranscrire ce problème en programmation quadratique sous contrainte.

1.5 **2)** Justifier de l'existence d'une unique solution que l'on caractérisera à l'aide d'un système d'équations linéaires que l'on retranscrira (on ne demande pas de le résoudre).

1 **3)** Ecrire le code pour résoudre ce problème sous matlab à l'aide de la fonction `quadprog`.

Exercice 5. (4 pts)

Une société pharmaceutique veut fabriquer un médicament contenant 2 principes actifs : l'alphacine et la betacine. Pour être efficace ce médicament doit contenir au moins $120\mu g$ d'alphacine et $150\mu g$ de betacine. Pour cela elle mélange 2 composés naturels la gammana et le deltaseng naturellement riches en alphacine et en betacine. Le tableau suivant donne la quantité d'alphacine et de betacine contenus dans 1ml des 2 composants, ainsi que le coût (en u.m.) d'1ml de gammana et de deltaseng.

	gammana (1ml)	deltaseng (1ml)
alphacine (μg)	1	1
betacine (μg)	3	1
prix	15	10

Comment constituer ce mélange en minimisant son coût ?

0.5 **1)** Formuler ce problème comme un problème de minimisation en programmation linéaire.

0.5 **2)** Donner son problème de maximisation dual.

2 **3)** Le résoudre à l'aide de la méthode du simplexe.

1 **4)** Ecrire le code matlab permettant de le résoudre.

Exercice 6. (3 pts)

On cherche le rayon r et la hauteur h du cylindre de volume maximal inscrit dans la sphère de rayon 1.

1 **1)** Formaliser ce problème comme un problème d'optimisation sous contrainte.

0.5 **2)** Justifier de l'existence d'une solution.

1.5 **3)** Déterminer la solution en appliquant les conditions de Lagrange.

OPTIMISATION - CONTROLE 2009
Correction

Exercice 1

1) f est infiniment différentiable, car polynomiale. En $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + 2xy + y^2 - 9 \\ 6y^2 + 2xy + x^2 - 9 \end{pmatrix}$$

On recherche les points critiques,

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \implies 6x^2+2xy+y^2-9 = 6y^2+2xy+x^2-9 \implies x^2 = y^2 \implies x = \pm y \ .$$

Si $x = y$: alors $6x^2 + 2xy + y^2 - 9 = 0$ devient $9x^2 = 9$, soit $x = y = \pm 1$.
Si $x = -y$: alors $6x^2 + 2xy + y^2 - 9 = 0$ devient $5x^2 = 9$, soit $x = -y = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$.
On obtient 4 points critiques de f :

$$\mathbf{a} = (1,1), \quad \mathbf{b} = (-1,-1), \quad \mathbf{c} = (\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}), \quad (-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}) \ .$$

2) La matrice hessienne en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x + 2y & 2(x+y) \\ 2(x+y) & 12y + 2x \end{pmatrix}$$

En $\mathbf{a}$, $\nabla^2 f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$ est définie positive car à déterminant et trace > 0 (cf. théorème A.4.b). Ainsi $\mathbf{a}$ est un minimum local (cf. théorème II.4.2).
En $\mathbf{b}$, $\nabla^2 f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -4 & -14 \end{pmatrix}$ est définie négative car à déterminant > 0 et trace < 0. Ainsi $\mathbf{b}$ est un maximum local.
En $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$, $\nabla^2 f(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -6\sqrt{5} \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 f(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ne sont pas semi-définies, ainsi ni $\mathbf{c}$ ni $\mathbf{d}$ n'est un extremum local.

3) f n'admet aucun extremum global puisque :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x,0) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto -\infty} f(x,0) = -\infty \ .$$

Exercice 2

1) Le cercle $\mathcal{C}$ est un compact (fermé borné) de $\mathbb{R}^2$, donc f étant continue elle admet un minimum et un maximum global sur $\mathcal{C}$.
On cherche les extrema de f sous la contrainte égalitaire $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. On applique les conditions de Lagrange. En $(x,y) \in \mathcal{C}$,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \nabla \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \ .$$

Sur $\mathcal{C}$, $\nabla\varphi(x,y) \neq \mathbf{0}$, on vérifie donc en tout point de $\mathcal{C}$ l'hypothèse de qualification des contraintes. Ainsi (théorème III.1), en un extremum $\mathbf{x} = (x,y)$, $\exists\,\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \lambda\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$
$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 1 \\ -1 + 2\lambda y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ x = -\frac{1}{\lambda},\ y = \frac{1}{2\lambda},\ \text{et } \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\ .$$

On obtient 2 solutions :

$$\mathbf{a} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}),\ f(\mathbf{a}) = -\sqrt{5} \quad ; \quad \mathbf{b} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}),\ f(\mathbf{b}) = \sqrt{5}$$

Ainsi $\mathbf{a}$ est le minimum global de f sur $\mathcal{C}$ et $\mathbf{b}$ le maximum global.

2) Le disque $\mathcal{D}$ est un compact (fermé borné) de $\mathbb{R}^2$, donc f étant continue elle admet un minimum et un maximum global sur $\mathcal{D}$.
On cherche les extrema de f sous la contrainte inégalitaire $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0$. On applique les conditions de Karush-Kuhn-Tucker. Sur $\mathcal{D} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\nabla\varphi(x,y) \neq \mathbf{0}$; en $\mathbf{0}$ la contrainte est insturée ; on vérifie donc en tout point de $\mathcal{D}$ l'hypothèse de qualification des contraintes. Ainsi (théorème III.5), en un extremum $\mathbf{x} = (x,y)$, $\exists\,\mu \in \mathbb{R}$,

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \mu\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$
$$\begin{cases} 2 + 2\mu x = 1 \\ -1 + 2\mu y = 1 \\ \mu\varphi(\mathbf{x}) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$\mu = 0$ amène à une contradiction. Ainsi $\mu \neq 0$, la contrainte est donc saturée : $\varphi(\mathbf{x}) = 0$. Les extrema sont donc ceux trouvés en 1) : un minimum global pour $\mu = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0$ et un maximum global pour $\mu = -\frac{2}{\sqrt{5}} < 0$.

Exercice 3

On est dans le cadre de la programmation quadratique sans contrainte. Les applications $f_1, \ldots, f_4$ s'écrivent sous forme matricielle, en posant $\mathbf{x} = (x,y)$:

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 2$$
$$f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 1$$
$$f_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} - 1$$
$$f_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 1$$

En appliquant le théorème II.10 :

• $\nabla^2 f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive, car de déterminant $7 > 0$ et trace $6 > 0$ (cf. théorème A.4.b) et admet donc un unique minimum, qui est global (et aucun maximum) caractérisé par le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 4x + y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \iff \boxed{\mathbf{x}_{\min} = (1, -1)}\,.$$

• $\nabla^2 f_2(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est définie négative, car de déterminant $3 > 0$ et trace $-4 < 0$ et admet donc un unique maximum, qui est global (et aucun minimum) caractérisé par le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \iff \boxed{\mathbf{x}_{\max} = (-1, -1)}\,.$$

• $\nabla^2 f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ est semi-définie positive, car de déterminant 0 et trace $4 > 0$ et n'admet donc aucun maximum ; ses minima, s'ils existent, sont globaux et caractérisés par le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \iff \boxed{\mathbf{x}_{\min} \in \{(x,y) \,|\, x + y = 1\} = (1,0) + <(1,-1)>}\,.$$

• $\nabla^2 f_4(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas semi-définie, car de déterminant $-5 < 0$, et n'admet donc ni minimum ni maximum (cf. théorème II.4.1), local ou global.

2) On applique le théorème II.9.

– Puisque $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\nabla^2 f_1(x,y)$ est définie positive, f_1 est fortement convexe.

– Puisque $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\nabla^2 f_2(x,y)$ est définie négative, f_2 est fortement concave (i.e. $-f_2$ est fortement convexe).

– Puisque $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\nabla^2 f_3(x,y)$ est semi-définie positive, f_3 est convexe.

– Puisque $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\nabla^2 f_4(x,y)$ n'est pas semi-définie, f_4 n'est ni convexe ni concave.

3) – Puisque f_1 est fortement convexe, f_1 est coercive (théorème II.7).

– f_2 et f_4 ne sont pas coercives puisqu'elles n'admettent aucun minimum sur le fermé $\mathbb{R}^2$ (théorème II.2).

– Quant à f_3, elle admet un minimum global en tout point de la droite d'équation $x+y=1$, pour lesquels f prend la valeur -2. Ainsi la suite définie par $u_n = (n, 1-n)$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = -2$ tandis que $\lim_{n \mapsto +\infty} \|u_n\| = +\infty$. Ainsi f_3 n'est pas coercive.

Exercice 4

1) Le problème équivaut à la résolution de :

$$\min_{(x,y,z)\in\mathcal{P}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad = \quad \min_{(x,y,z)\in\mathcal{P}} x^2 + y^2 + z^2$$

c'est donc un problème de programmation quadratique pour la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sous la contrainte égalitaire

$$2x + 3y - z = 2.$$

2) La matrice hessienne de f est (cf. théorème II.8) :

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,\mathrm{Id}$$

qui est définie positive (car à valeurs propres > 0, cf. théorème A.4) ; ce problème admet donc une unique solution caractérisée par le système d'équation linéaire (cf. théorème III.4) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Le code matlab s'écrit :

```
A=[2 0 0;0 2 0;0 0 2];
Aeq=[2 3 -1];
beq=2;
umin=quadprog(A,[],[],[],Aeq,beq)
```

Exercice 5

1) On note x, y la quantité en ml de gammana et de deltaseng dans le produit fini. La fonction coût à minimiser s'écrit :

$$f(x, y) = 15x + 10y$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} x + y \geqslant 120 \\ 3x + y \geqslant 150 \\ x,\ y \geq 0 \end{cases}$$

2) Le problème de maximisation dual s'écrit :

$$\max\ 120x_1 + 150x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 15 \\ x + y \leqslant 10 \\ x,\ y \geq 0 \end{cases}$$

3) Méthode du simplexe :

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	$\boxed{3}$	1	0	15	l
1	1	0	1	10	$-\frac{1}{3}l$
120	150	0	0	$f-0$	$-50l$

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	3	1	0	15	$-\frac{3}{2}l$
2/3	0	-1/3	1	5	l
70	0	-50	0	$f-750$	$-105l$

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	3	3/2	$-3/2$	15/2	
2/3	0	-1/3	1	5	
0	0	$\boxed{-15}$	$\boxed{-105}$	$f-1275$	$\min = 1275$

Le coût minimum est de 1275u.m. en mélangeant 15mg de gammana avec 105mg de deltaseng.

3) Il faut saisir le code matlab :

```
z=[15 10];
Ain=[-1 -1;-3 -1];
bin=[-120;-150];
[xmin,fval]=linprog(z,Ain,bin,[],[],[0 0])
```

Exercice 6

1) En notant $h > 0$ et $r > 0$ respectivement la hauteur du cylindre et le rayon de sa base, le volume du cylindre est :

$$V(r,h) = \pi r^2 h \ .$$

La condition que le cylindre soit inscrit dans la sphère s'écrit par la contrainte égalitaire :

$$\varphi(r,h) = \frac{h^2}{4} + r^2 - 1 = 0 \ .$$

Le problème se formule comme le problème d'optimisation sous contrainte égalitaire :

$$\max_{r,h>0} \pi r^2 h$$
$$\frac{h^2}{4} + r^2 = 1 \ .$$

2) Le domaine est

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mid \frac{h^2}{4} + r^2 = 1\right\}$$
$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{h^2}{4} + r^2 = 1,\ r \geqslant 0,\ h \geqslant 0\right\}$$

Or $\mathcal{D}'$ est un compact et V est continue. Donc V admet un minimum et un maximum global sur $\mathcal{D}'$. Or pour $h = 0$ ou $r = 0$, $V(r,h) = 0$ tandis que $V(r,h) > 0$ sur $\mathcal{D}$. Ainsi le maximum global de V sur $\mathcal{D}'$ est dans $\mathcal{D}$. Ainsi V admet un maximum global sur $\mathcal{D}$.

3) Les application V et φ sont C^∞.

$$\nabla V(r,h) = \begin{pmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla \varphi(r,h) = \begin{pmatrix} 2r \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix} .$$

Ainsi $\nabla\varphi(r,h) \neq \mathbf{0}$ sur $\mathcal{D}$. On vérifie donc en tout point de $\mathcal{D}$ l'hypothèse de qualification des contraintes nécessaire à l'application des conditions de Lagrange. En un extremum de V sur $\mathcal{D}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\nabla V(r,h) + \lambda \nabla\varphi(r,h) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\pi r h + 2\lambda r = 0 \\ \pi r^2 + \lambda \frac{h}{2} = 0 \\ \frac{h^2}{4} + r^2 = 1 \end{cases}$$

La première égalité donne $h = -\frac{\lambda}{\pi}$, ce qui avec la deuxième donne $r^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi^2}$. En remplaçant dans la troisième :

$$\lambda^2 = \frac{4\pi^2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

le signe de lambda étant déterminé par le signe de $h > 0$. Ainsi le maximum est atteint pour :

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ h = \frac{2}{\sqrt{3}}} .$$