TRAVAUX PRATIQUES : PROGRAMMATION LINEAIRE

Programmation linéaire

Les problèmes de cette partie sont à traiter à l'aide du logiciel MATLAB. La fonction à utiliser est la fonction `linprog`. La commande `help linprog` donne accès à l'aide sur cette fonction. Il est important de remarquer que `linprog` résout un problème de *minimisation*. Donc, le maximum d'une fonction z sera cherché comme le minimum de la fonction $-z$.
La commande `linprog` met en oeuvre deux types d'algorithmes : *Medium–Scale Algorithms* et *Large–Scale Algorithms*. Pour les exercices de ce TP, seul le premier type est utilisé (il implémente la méthode du simplexe. Le second type s'utilise dans des conditions précises, des matrices de grande taille, qui ne sont pas réunies ici ; il utilise une méthode de 'points intérieurs' ; son utilisation peut provoquer des résultats erronés). Pour cela, on désélectionne l'option implicite à l'aide de la commande :

```
options=optimset('LargeScale','off');
```

Problème 1

Problème de nougats. Un confiseur dispose de 4800 kg de miel, 10800 kg de sucre et 3300 kg d'amandes. Il se propose de fabriquer du nougat mou et du nougat dur avec 2 machines :

Avec 300 g de miel, 900 g de sucre et 300 g d'amandes, la machine n ˚ 1 produit 25 barres de nougat mou et 80 barres de nougat dur.

Avec 600 g de miel, 1200 g de sucre et 300 g d'amandes, la machine n ˚ 2 produit 160 barres de nougat mou et 32 barres de nougat dur.

La vente d'une barre de nougat mou rapporte 0,40 euro, celle de nougat dur 0,50 euro.
Comment répartir la production entre les deux machines pour maximiser le bénéfice ? Quel est alors le bénéfice maximum ?

Formuler ce problème comme un problème de programmation linéaire. Le résoudre sous matlab. Voici, à titre d'exemple, les commandes utilisées pour résoudre ce problème :

```
z=[-50 -80]           % le maximum cherché est le minimum de z1
A=[1 1;3 4;1 2]        % coefficients de la matrice des contraintes
b=[11000 36000 16000] % second membre des contraintes
[X1,zval1]=linprog(z,A,b,[],[],[0 0],[],[],options)
```

La réponse est obtenue sous la forme suivante :

```
X1 =
  1.0e+003 *
    4.0000
    6.0000

zval1 =
 -6.8000e+005
```

Problème 2

Soit la fonction économique : $z = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5$. Les variables sont *positives* et sont soumises aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_5 = 19 \end{cases}$$

1 ˚) - Les variables sont réelles, trouver le maximum de z.
2 ˚) - Les variables sont réelles, trouver le minimum de z.
Réponse à la première question
Commandes :

```
%%% 1˚) - maximum de z
zmax=[-1 -3 -5 -1 -4];
Aeq=[1 1 -1 1 0;2 0 4 2 1;1 6 1 0 2];
beq=[1 7 19];
[X2,z2max]=linprog(zmax,[],[],Aeq,beq,[0 0 0 0 0],[],[],options)
```

réponse obtenue :

```
X2 =
         0
    0.9000
    0.0000
    0.1000
    6.8000

z2max =
  -30.0000
```

Réponse à la deuxième question
Commandes :

```
%%% 2˚) - minimum de z
zmin=[1 3 5 1 4];
Aeq=[1 1 -1 1 0;2 0 4 2 1;1 6 1 0 2];
beq=[1 7 19];
[X2,z2min]=linprog(zmin,[],[],Aeq,beq,[0 0 0 0 0],[],[],options)
```

réponse obtenue :

```
X2 =
         0
    2.0000
    1.0000
         0
    3.0000

z2min =
   23.0000
```

Problème 3

Dans ce problème, les variables sont réelles et *positives.*
1 °) - Trouver le minimum de la fonction :

$$z = 50x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 6x_4$$

Les contraintes sont :
- $5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 50$
- $16x_1 + 12x_2 \geqslant 152$
- $3x_3 + 2x_4 \geqslant 6$
- $0 \leqslant x_1 \leqslant 5 \qquad 0 \leqslant x_2 \leqslant 8 \qquad 0 \leqslant x_3 \leqslant 2 \qquad 0 \leqslant x_4 \leqslant 2$

2 °) - Trouver le maximum de la fonction :

$$z = 16x_1 + 12x_2$$

Les contraintes sont :
- $5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 50$
- $50x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 6x_4 \leqslant 600$
- $16x_1 + 12x_2 - 30x_3 - 20x_4 \leqslant 0$
- $0 \leqslant x_1 \leqslant 5 \qquad 0 \leqslant x_2 \leqslant 8 \qquad 0 \leqslant x_3 \leqslant 2 \qquad 0 \leqslant x_4 \leqslant 2$

Essayer plusieurs points initiaux : $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 2)$ par exemple. Pouvez–vous expliquer les résultats ?

Problème 4

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail obtenu en mélangeant au plus 3 produits bruts : orge, arachide, sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22 % de protéines et 3,6 % de graisses. Le tableau ci-dessous indique les pourcentages de protéines et de graisses contenus dans les 3 produits bruts :

produit brut	orge	arachide	sésame
% de protéines	12 %	52 %	42 %
% de graisses	2 %	2 %	10 %
coût par tonne	25 F	41 F	39 F

On notera x_j la fraction de tonne de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment. Formuler le problème. Montrer qu'il est possible d'en réduire la dimension. Le résoudre.

Problème 5

Une usine fabrique quatre produits A, B, C, D au moyen de deux machines M_1 et M_2. Les temps machine requis par unité de volume de chacun de ces produits sont donnés ci-dessous ainsi que les bénéfices unitaires correspondants :

	A	B	C	D
M_1	7 mn	10 mn	4 mn	9 mn
M_2	3 mn	40 mn	1 mn	1 mn
Bénéfice	45	100	30	50

La disponibilité journalière de M_1 est de 1200 mn et celle de M_2 est de 800 mn. On suppose qu'aucun problème d'ordonnancement ne vient compliquer les choses (utilisation simultanée des machines, etc ...)
1 °) - Quelle quantité de chaque produit faut-il fabriquer chaque jour de façon à rendre le bénéfice maximum ?

2 ˚) - Que devient la solution si les bénéfices unitaires associés à A et D passent de 45 à 40 et de 50 à 60 respectivement ?
3 ˚) - Même question, le bénéfice unitaire associé à C baissant de 30 à 25, les autres restant les mêmes qu'au 1 ˚) ?
4 ˚) - Que devient la solution si les disponibilités journalières des machines M_1 et M_2 sont portées de 1200 mn à 1500 mn et de 800 mn à 100 mn respectivement ?

Problème 6

Une raffinerie peut traiter trois types de pétrole brut. Les proportions de produits finis qu'elle obtient, pour chacun de ces pétroles, sont précisées dans le tableau ci–dessous. La dernière colonne indique ses capacités maximales annuelles (en tonnes) de production et la dernière ligne, ses bénéfices par tonne de brut traité (unité monétaire sans importance)

	Brut 1	Brut 2	Brut 3	Capacités
Gaz	0.02	0	0.06	300000
Essence	0.2	0.25	0.3	1050000
Gazole	0.4	0.25	0.3	1350000
Fioul lourd	0.3	0.5	0.3	1800000
Divers	0.08	0	0.04	180000
Bénéfices	4	5	5	

Déterminer l'approvisionnement pour chaque type de brut qui donnera le bénéfice maximum.

Problème 7

On veut approvisionner en carburant 5 bases militaires à partir de 3 dépôts. Le tableau ci–dessous indique les coûts de transport unitaires du dépot D_i vers la base B_j. La dernière ligne précise les quantités d'unités (en milliers de litres) à livrer obligatoirement et la dernière colonne les quantités d'unités disponibles dans chaque dépôt

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Disponibilités
D_1	3	5	4	7	8	600
D_2	8	7	9	1	2	50
D_3	3	1	2	6	5	100
Demande	30	50	40	30	40	

Comment organiser les livraisons de façon à minimiser les coûts de transport ?

Correction des problèmes posés

Problème 3

1 °) - Pour $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0.6667$, $x_4 = 2$, on obtient $z_{min} = 508.6667$
2 °) - En utilisant différents points initiaux pour l'algorithme, on obtient différents points maximums en lesquels la fonction vaut 100. Il est intéressant de remarquer que pour toutes ces solutions $x_3 = x_4 = 2$. Dans cet hyperplan, le problème se réduit à un problème à deux variables dans lequel seule la troisième contrainte est active : $16x_1 + 12x_2 \leqslant 100$ (outre les bornes des variables). Pour plusieurs points initiaux essayés de la forme $(a, b, 2, 2)$, le maximum est la projection du point initial sur la contrainte active.

Problème 4

En posant x_1 pourcentage d'orge, x_2 pourcentage d'arachide et x_3 pourcentage de sésame (variables positives), la fonction à minimiser (coût minimal) est :

$$z = 25x_1 + 41x_2 + 39x_3$$

Les contraintes sont :
- somme des pourcentages : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
- protéines : $0.12x_1 + 0.52x_2 + 0.42x_3 \geqslant 0.22$
- graisses : $0.02x_1 + 0.02x_2 + 0.1x_3 \geqslant 0.036$

Le minimum de z vaut 29.4 pour $x_1 = 0.7 \quad x_2 = 0.1 \quad x_3 = 0.2$. La contrainte égalité permet de supprimer une variable mais cela n'a que peu d'intérêt compte tenu des logiciels utilisés.

Problème 5

Sans indication supplémentaire sur la nature des produits fabriqués, on considère que les variables sont réelles (et positives). On pose a (resp. b, c, d) la quantité de produit A (resp. B, C, D) fabriquée chaque jour.
1 °) - La fonction z à maximiser (bénéfice maximum) est :

$$z = 45a + 100b + 30c + 50d$$

Les contraintes sont :
- machine M_1 : $7a + 10b + 4c + 9d \leqslant 1200$
- machine M_2 : $3a + 40b + c + d \leqslant 800$

Le maximum de z vaut 9333.33 pour $a = 0 \quad b = 13.33 \quad c = 266.7 \quad d = 0$
Les questions suivantes se traitent de façon identique :
2 °) - Le maximum de z vaut 9333.33 pour $a = 0 \quad b = 13.33 \quad c = 266.7 \quad d = 0$
3 °) - Le maximum de z vaut 8000 pour $a = 160 \quad b = 8 \quad c = 0 \quad d = 0$
4 °) - Le maximum de z vaut 5000 pour $a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0 \quad d = 100$

Problème 6

Le maximum de z vaut 20 500 000 pour :
Brut 1=1 500 000 t, Brut 2 = 2 400 000 t et Brut 3 = 500 000 t.

Problème 7

Ce problème comporte 15 variables, des contraintes inégalité et des contraintes égalité. Avec les notations des exercices précédents, on note les contraintes inégalité à l'aide des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 600 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

et les contraintes égalité à l'aide des matrices :

$$Aeq = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad beq = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

La réponse $X7$ est donnée sous la forme d'un vecteur colonne à 15 lignes. Il est intéressant de la mettre sous la forme d'une matrice $(3, 5)$ pour la lisibilité du résultat :

```
zmin=[3 5 4 7 8 8 7 9 1 2 3 1 2 6 5];
A=[1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1];
b=[600 50 100];
Aeq=[1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 ;
    0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 ;
    0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 ;
    0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 ];
beq=[30 50 40 30 40];
lb=zeros(1,15);
[X7,z7min]=linprog(zmin,A,b,Aeq,beq,lb,[],[],options)
Y=transpose(reshape(X7',5,3))

Y =

   30.0000         0   10.0000         0         0
         0         0         0   30.0000   20.0000
         0   50.0000   30.0000         0   20.0000

z7min =
  410.0000
```