

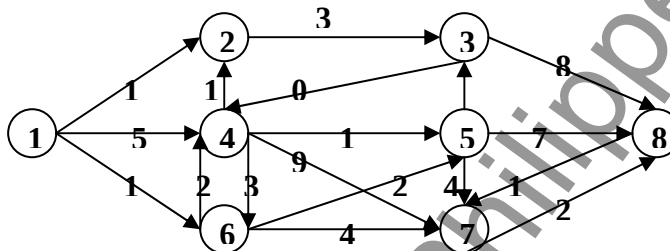
EXAMEN
23 septembre 2010

Durée : 2h. Tous les documents de cours sont autorisés.

Les réponses doivent être justifiées et obtenues à l'aide des méthodes vues en cours.

On ne donnera pas seulement le résultat mais aussi les étapes des algorithmes employés

Exercice 1. Le graphe suivant représente un réseau de routage de 8 serveurs informatiques, les arêtes représentant les possibilités de transmission d'information et leur vitesse de transfert (en ms).



Déterminer les trajets de routage les plus rapides du serveur 1 à chacun des 7 autres serveurs.

Exercice 2. Une société pharmaceutique s'est spécialisée dans la production de 6 types de médicaments qu'elle produit séquentiellement et cycliquement. A chaque changement de type de médicament produit elle doit adapter sa chaîne de production, et cette adaptation a un coût figurant dans le tableau ci-dessous (l'élément (i,j) est le coût d'adaptation d'une production du médicament i à la production du médicament j).

-	6	7	3	1	3
7	-	8	2	9	7
5	10	-	10	1	7
8	6	5	-	5	1
7	7	6	7	-	4
9	8	8	5	3	-

Déterminer un ordre de production des 6 médicaments qui minimise les coûts d'adaptation de la chaîne de production.

Exercice 3. Trois châteaux d'eau A_1 , A_2 , A_3 , pouvant fournir respectivement 30, 70 et 80 litres par seconde sont reliés à quatre agglomérations B_1 , B_2 , B_3 , B_4 par les canalisations suivantes :

Canalisation	A_1B_1	A_1B_2	A_1B_3	A_2B_1	A_2B_2	A_2B_4	A_3B_2	A_3B_3	A_3B_4
Débit max (l/s)	20	10	30	30	20	30	10	20	30

Les besoins en approvisionnement de B_1 , B_2 , B_3 , B_4 sont respectivement de 40, 20, 40 et 40 litres/seconde.

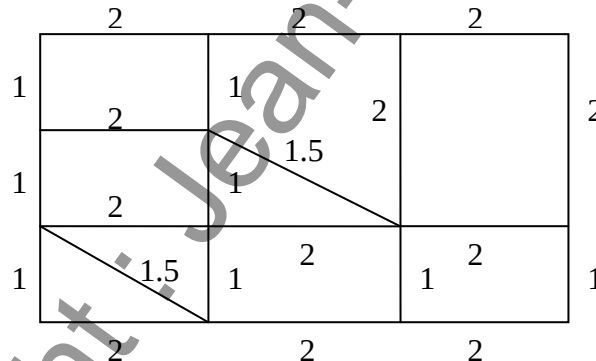
Peut-on couvrir les besoins des agglomérations ?

Exercice 4. Pour leur stage de fin d'étude, 6 élèves ont le choix parmi 6 stages, chacun ne pouvant accueillir qu'un seul élève. Afin de contenter au mieux les élèves on leur a demandé d'attribuer une note sur 20 à chacun des 6 stages ; elles sont retranscrites dans le tableau ci-dessous. On leur attribue alors leur stage de façon à maximiser la satisfaction globale, au sens où la moyenne des notes des 6 attributions soit maximale.

	Stage 1	Stage 2	Stage 3	Stage 4	Stage 5	Stage 6
Elève 1	14	3	10	20	12	0
Elève 2	10	20	18	0	4	11
Elève 3	0	8	12	13	20	8
Elève 4	14	0	18	4	20	8
Elève 5	10	15	0	9	20	3
Elève 6	20	16	17	0	5	6

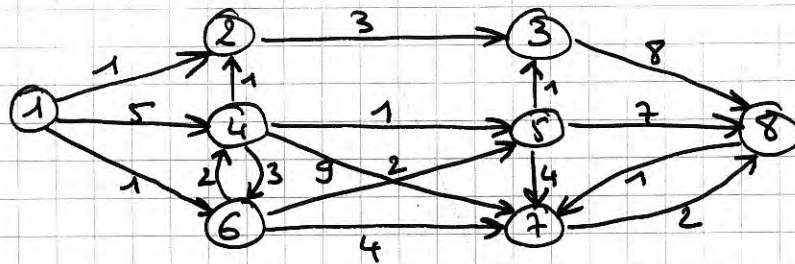
Déterminez une telle attribution.

Exercice 5. Un postier effectuant sa tournée marche normalement à 5km/h et à 1km/h lorsqu'il distribue le courrier. Quelle durée minimale dure sa tournée dans le réseau urbain schématisé ci-dessous dont les longueurs sont en hectomètre ?



- Examen d'optimisation Combinatoire 2016.
Correction

Ex 1 : On applique l'algorithme de Dijkstra.



Sommet:	1	2	3	4	5	6	7	8	trajets :
$d(1, \cdot)$:	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1-②
	0	1	∞	5	∞	1	∞	∞	1-2-③
	0	1	4	5	∞	1	∞	∞	1-6-④
	0	1	4	3	3	1	5	∞	1-6-⑤
	0	1	4	3	3	1	5	10	1-⑥
	0	1	4	3	3	1	5	10	1-6-⑦
	0	1	4	3	3	1	5	7	1-6-⑦-⑧
étape finale	0	1	4	3	3	1	5	7	

Exercice 2 : Il s'agit d'un PRC asymétrique que l'on résout avec l'algorithme de Little.

• Réduction :

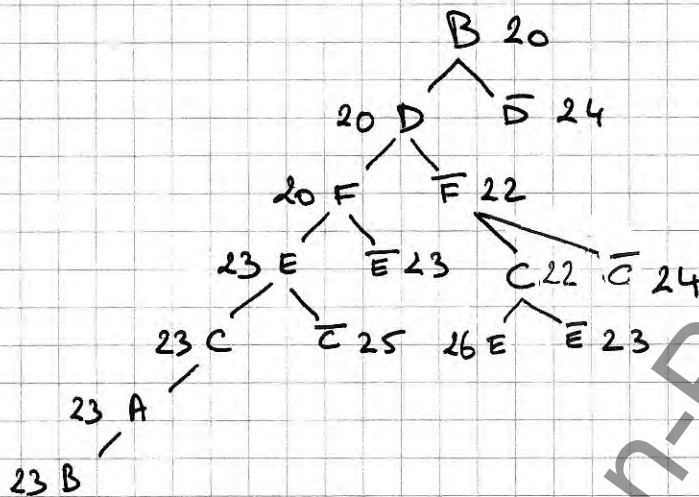
-1	-6	7	3	1	3
-2	7	-8	2	9	7
-1	5	10	-10	1	7
-1	8	6	5	-5	1
-4	7	7	6	7	-4
-3	9	8	8	5	3
-12					

-	5	6	2	0	3
5	-	6	0	7	5
4	9	-	9	0	6
7	5	4	-	4	0
3	3	2	3	-	0
6	5	5	2	0	-
-3	-3	-2			
8					

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	4	2	0(2)	3
B	2	-	4	0(4)	7	5
C	1	6	-	9	0(1)	6
D	4	2	2	-	4	0(2)
E	0(1)	0(2)	0(2)	3	-	0(4)
F	3	2	3	2	0	-

= 20

On choisit de développer initialement un trajet "nul" de regret maximal : BD



BD	A	B	C	E	F
A	-	2	4	0	3
C	1	6	-	0	6
D	4	-	2	4	0(2)
E	0	0	0	-	0
F	3	2	3	0	-

BDF	A	B	C	E
A	-	2	4	0
C	1	6	-	0
E	0	0	0	-
F	3	-	3	0(3)

On rebranche en BDF d'évaluation 22

BDF	A	B	C	E	F
A	-	2	4	0	3
C	1	6	-	0	6
D	2	-	0(2)	2	-
E	0	0	0	-	0
F	3	2	3	0	-

BDFCE	A	B	F
A	-	0	1
E	0	-	0
F	1	0	-

BDFE	A	B	C
A	-	0	2
C	0	5	-
E	0(6)	-	0(3)

BDFEC	A	B
A	-	0
C	0	-

BDFC	A	B	E	F
A	-	2	0	3
C	1	-	0(1)	6
E	0	0	-	0
F	3	2	0	-

le développement de l'arborescence à ce stade nous permet de déterminer un cycle hamiltonien de coût minimal : 23

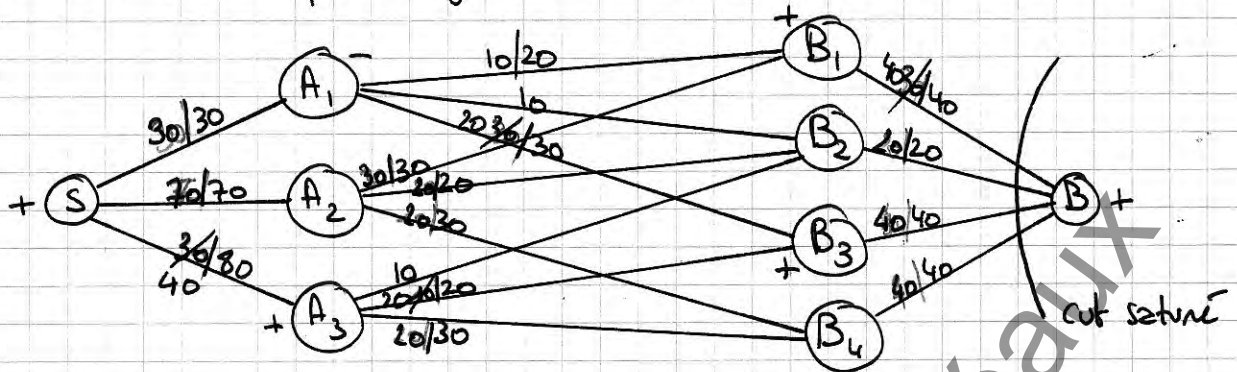
Cycle : B-D-F-E-C-A-B

et donc : A-B-D-F-E-C-A en partant de A

L'ordre de fabrication de coût optimal est (par exemple :)

Médicaments : 1-2-4-6-5-3

Exercice 3 : Il s'agit d'un problème de flot dans un réseau de transport, que l'on résout par l'algorithme de Ford-Fulkerson.



Charges augmentantes:

- $S - A_1 - B_3 - B$: $\text{flot} = 30$
- $S - A_2 - B_1 - B$: $\text{flot} = 30$
- $S - A_2 - B_2 - B$: $\text{flot} = 20$
- $S - A_2 - B_4 - B$: $\text{flot} = 20$
- $S - A_3 - B_3 - B$: $\text{flot} = 10$
- $S - A_3 - B_4 - B$: $\text{flot} = 20$
- $S - A_3 - B_3 - A_1 - B$: $\text{flot} = 10$ (mauvais choix)

À ce stade on a un cut saturé: le flot est maximal

On couvre les besoins de 4 agglomérations

Exercice 4

Maximiser la moyenne des notes équivaut à maximiser la somme des notes. On se ramène à un problème d'affectation, de coût à minimiser en changeant chaque note n par $20-n$.

Méthode Hongroise :

6	17	10	0	8	20
10	0	2	20	16	9
20	12	8	7	0	12
6	20	2	16	0	12
10	5	20	11	0	17
0	4	3	20	15	14
					-2
					-9

6	17	8	0	11	
10	0	0	20	16	0
20	12	6	7	0	3 X
6	20	0	16	0	3
10	5	18	11	0	8 X
0	4	1	20	15	5
					X

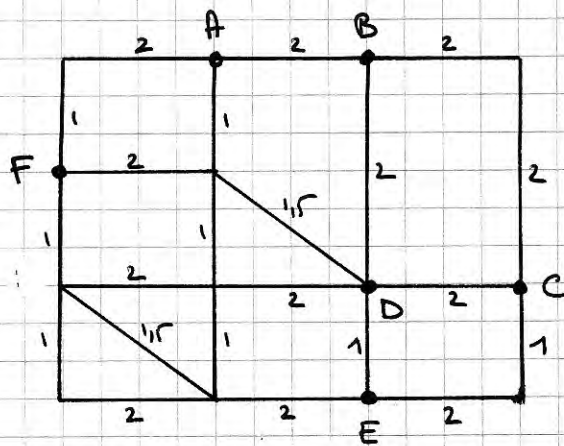
6	17	8	0	11	11
10	0	0	20	19	0
17	9	3	4	0	0
6	20	0	16	3	3
7	2	15	8	0	5
0	4	1	20	18	5

On obtient une affectation de coût

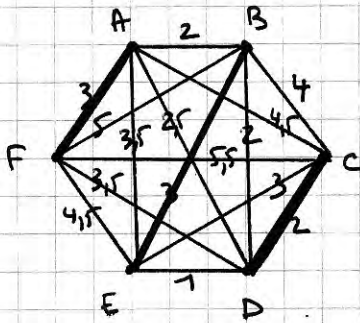
minimal :

Elève	→ Stage
1	4
2	2
3	6
4	3
5	5
6	1

Exercice 5



C'est un problème de Tournoi.



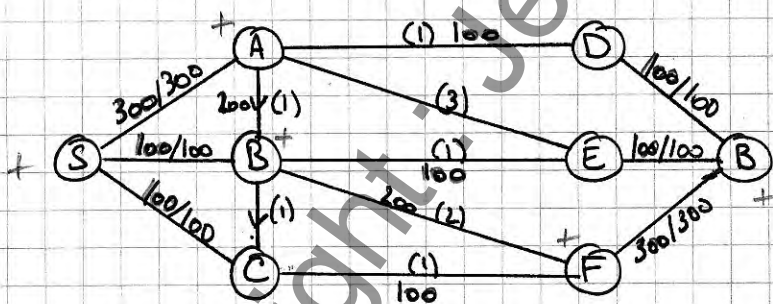
On considère les sommets de degré impair, et l'on constitue un graphe complet valant par leur distance.

On y cherche un couplage de coût minimal:

On trouve par exemple: $[A, F] \cup [B, E] \cup [C, D]$ de coût 8

Le postier effectue donc : 35 km à 1 km/h $\rightarrow$ 3,5 h
 + 8 km à 5 km/h $\rightarrow$ 0,16 h
 soit 3,66 h = 3h39m36s

Exercice 6 Il s'agit d'un problème de flot à coût



Chaine augmentante de coût min:

S-A-D-B : $f=100$ c.u.=1
 S-C-F-B : $f=100$ c.u.=1
 S-B-E-F : $f=100$ c.u.=1
 S-A-B-F-B : $f=200$ c.u.=3

Le réseau de transport décrit l'approvisionnement de coût minimal.

Approvisionnement: 200 unités de A à B ; 100 unités de A à D
 100 unités de B à E ; 200 unités de B à F
 100 unités de C à F.

On répond ainsi à la demande des 3 succursales pour un coût de transport de 900 u.m. - C'est le coût d'approvisionnement minimal.