Examen

Tous les documents de cours sont autorisés. Durée 2 heures.
On donnera toutes les étapes des algorithmes employés.
La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. On considère le problème de voyageur de commerce de matrice des coûts :

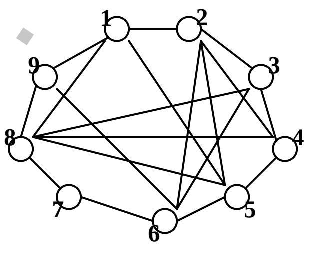
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A	-	1	4	4	4	5
B	1	-	1	2	4	5
C	4	1	-	3	4	4
D	4	2	3	-	2	4
E	4	4	4	2	-	2
F	5	5	4	4	2	-

a) Calculer sa borne de Little.

Dans les questions qui suivent on donnera chaque fois une majoration de l'erreur obtenue à l'aide de la borne de Little calculée ci-dessus.

b) Donner une solution approchée par l'heuristique du plus proche voisin.
c) Donner une solution approchée par la méthode à pénalité.
d) Donner une solution approchée par l'heuristique de Christofide.

Exercice 2. Appliquer les heuristiques séquentielles FFS, LFS et DS pour colorier le graphe suivant :



On prendra soin de donner l'ordre construit sur les sommets. Lorsque plusieurs choix de sommets seront possibles on retiendra le plus petit sommet.
Quel est le nombre chromatique de ce graphe ?

Exercice 2. On considère un sac de capacité 24 ainsi que les 5 objets suivants :

Objet	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
Poids	10	9	6	5	4
Valeur	15	12	4	8	5

a) Résoudre par séparation et évaluation le problème du sac à dos en 0-1.
b) Résoudre de façon approchée le problème du sac à dos en nombres entiers en appliquant une heuristique du cours.

Exercice 4. On souhaite acheminer par bus N groupes de personnes. Chaque groupe est constitué de 12 à 25 personnes et chaque bus peut transporter jusqu'à 30 passagers. On souhaite déterminer le nombre minimal de bus nécessaires pour effectuer le transport sans séparer aucun groupe.

a) Ramener ce problème à un problème classique du cours.
b) Proposer un algorithme efficient permettant de résoudre de façon optimale le problème (connaissant N et le nombre de personnes dans chaque groupe).

Exercice 5. (**Question de réflexion).** Résoudre au choix l'une des questions suivantes. L'élève peut aussi s'il le souhaite proposer sa propre question-réponse, consistant en une approche originale à un des thèmes abordés dans le cours.
La pertinence de la solution apportée sera prise en compte dans l'évaluation.

A. Inspirez-vous de la méthode par séparation et évaluation vue pour le problème du sac à dos en 0-1 pour créer une méthode par séparation et évaluation pour le problème en nombre entier. On effectuera les toutes premières étapes de l'exercice 3.b) en guise d'exemple.

B. On considère le graphe biparti de sommets $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_n$, et d'arêtes $[x_i,x_j]$ pour $i\neq j$ et $n>2$. Comment se comportent les heuristiques de coloration LFS et DS pour ce graphe ? (On admettra qu'une heuristique séquentielle trouve une coloration optimale si et seulement si l'ordre sur les sommets vérifie que, en appelant (sans perte de généralité) x_1 le premier sommet, il existe k tel que $x_1 < x_k < y_1$.)

C. Proposer une approche par algorithme génétique pour résoudre le problème du sac à dos en 0-1. On demande uniquement le codage d'une solution (génotype) ainsi que les règles de croisement et de mutation.

Stratégies de Recherche Intelligente – Correction de l'Examen 2010

Exercice 1

a) Calcul de la borne de Little :

Borne de Little = 9

C'est un minorant du coût d'un cycle hamiltonien.

	A	B	C	D	E	F	
A	–	1	4	4	4	5	−1
B	1	–	1	2	4	5	−1
C	4	1	–	3	4	4	−1
D	4	2	3	–	2	4	−2
E	4	4	4	2	–	2	−2
F	5	5	4	4	2	–	−2
							9

b) Heuristique du plus proche voisin :

Au départ de A : $A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{3} D \xrightarrow{2} E \xrightarrow{2} F \xrightarrow{5} A$

C'est un cycle hamiltonien de coût = 14.

Soit une erreur d'au plus $\frac{14-9}{9} \simeq 55,5\ \%$.

c) Méthode de pénalité :

	A	B	C	D	E	F
A	–	1	4	4	4	5
B	1(5)	–	1(5)	2	4	5
C	4	1	–	3	4	4
D	4(3)	$\boxed{2(4)}$	3(3)	–	2	4
E	4	4	4	2	–	$\boxed{2(6)}$
F	5(5)	5(5)	4(5)	$\boxed{4(6)}$	2	–

- Deux possibilités (à inversion et permutation cyclique près) au départ de E :

$E \xrightarrow{2} F \xrightarrow{4} D \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} A \xrightarrow{4} C \xrightarrow{4} E$ de coût = 17

$B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{4} A \xrightarrow{4} E$

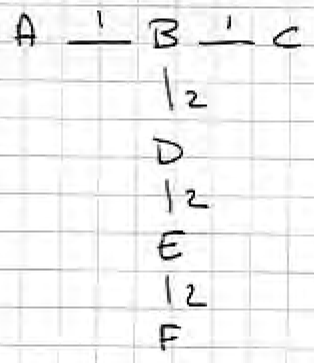
Soit une erreur d'au plus $\frac{17-9}{9} \simeq 89\ \%$

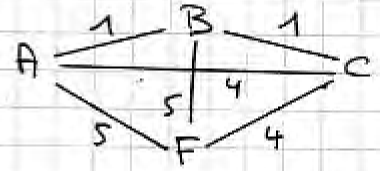
- Au départ de F, deux possibilités :

$F \xrightarrow{2} E \xrightarrow{2} D \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} A \xrightarrow{4} C \xrightarrow{4} F$: (coût 15, erreur ≤ 67 %)

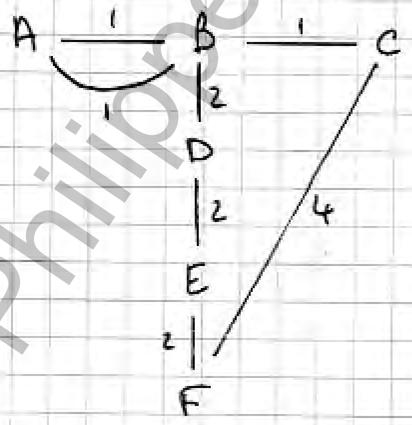
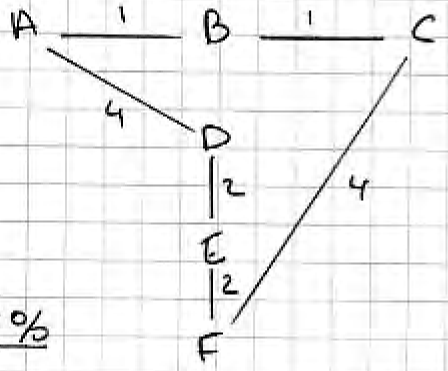
$B \xrightarrow{1} C \xrightarrow{4} A \xrightarrow{5} F$: (coût 16, erreur ≤ 78 %)

d) Heuristique de Christofide.

- On commence par construire un arbre recouvrant de poids minimal.
  Il n'y en a qu'un :  de coût 8.
- Il y a 4 sommets de degré impair : A, B, C, F



et un unique couplage de coût minimal : [A,B] ∪ [C,F]

- Cela donne le graphe :  de coût 13.
  qui contient un sommet : B
  de degré 4.
- Court-circuitage en B :
  remplacer [A,B] ∪ [B,D] par [A,D]
  de surcoût 1 minimal.
  On obtient :  de coût 14.
- Cycle hamiltonien :
  A – B – C – F – E – D – A
  de coût = 14
  soit une erreur d'au plus 55,5 %

Exercice 2. • On considère 4 couleurs, ordonnées :

Rouge, Vert, Jaune, Bleu

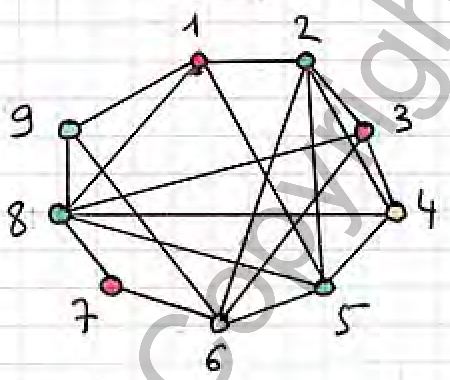
- Le tableau suivant donne l'ordre donné par les 3 heuristiques ainsi que la coloration réalisable produite.
- En ayant retenu le plus petit sommet possible à chaque étape, il y pour chaque heuristique une seule possibilité.

Sommets	1	2	3	4	5	6	7	8	9	# Couleurs
FFS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	4
Col.	R	V	R	J	B	J	R	V	B	
LFS	8	2	5	6	1	3	4	9	7	3
Col.	R	R	V	J	J	V	J	V	V	
DS	8	5	1	2	6	3	4	9	7	3
Col.	R	V	J	R	J	V	J	V	V	

- Le graphe a pour nombre chromatique = 3.

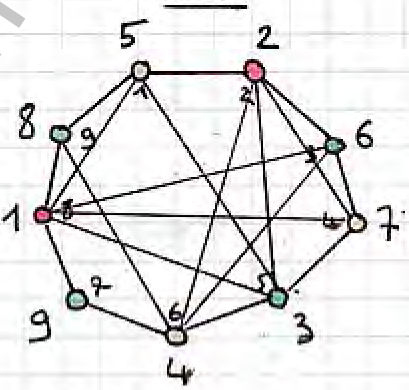
En effet on a construit une coloration ayant 3 couleurs. La présence d'un triangle (3-clique) montre que c'est une coloration optimale.

FFS:



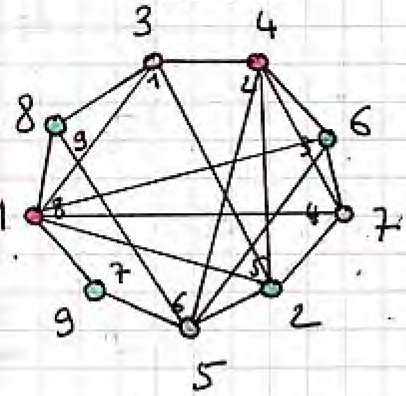
4-coloration (non optimale)

LFS:



3-coloration (optimale)

DS:



3-coloration (optimale)

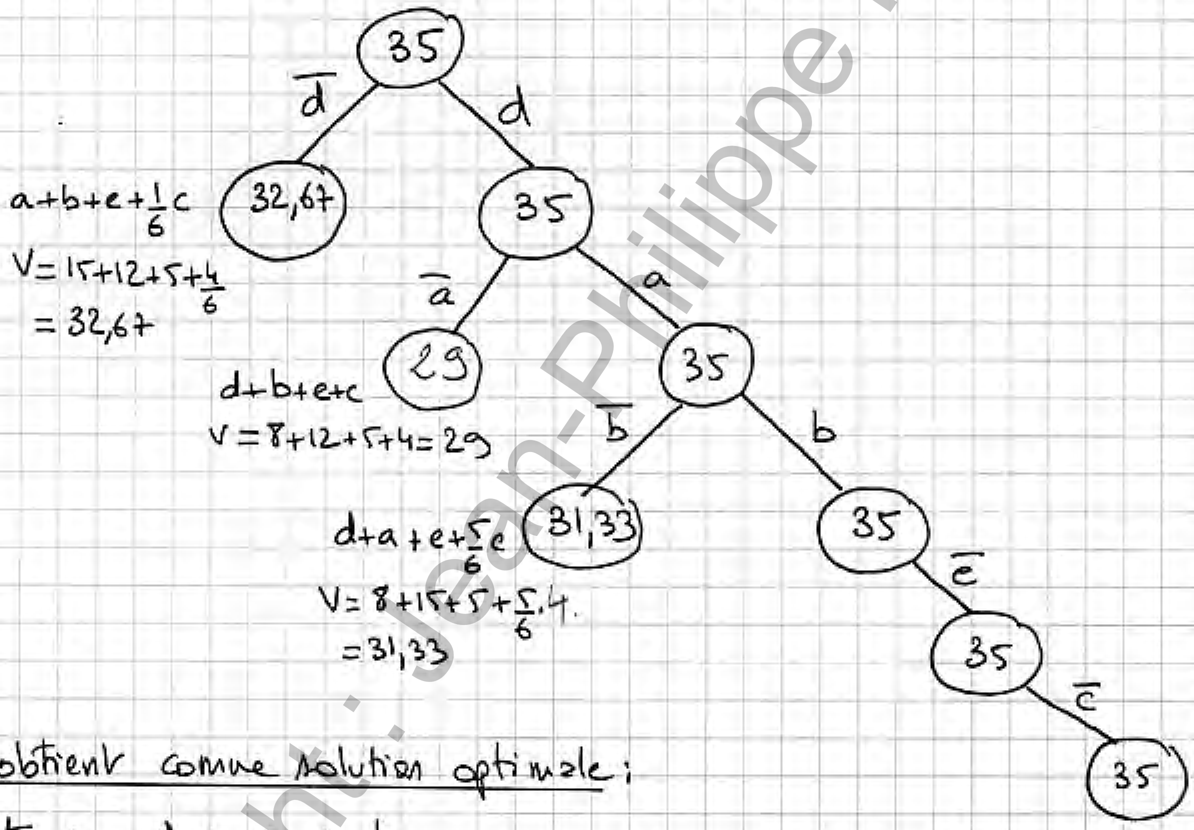
Exercice 3 a) Problème du sac à dos en 0-1. Sac de capacité 24.

On applique la méthode par séparation et évaluation vue en cours.

- On classe les 5 objets par utilité décroissante :

objets	d	a	b	e	c
v_i/p_i	1,6	1,5	1,33	1,25	0,67
poids	5	10	9	4	6
valeur	8	15	12	5	4

- Evaluation initiale : $d + a + b$ $\quad p = 24$; $v = 35$



On obtient comme solution optimale :

Objets : $d + a + b$

poids : 24

$\boxed{\text{Valeur : } 35}$

b) Pour le problème du sac à dos en nombre entier on applique l'heuristique par utilité décroissante. On obtient :

$d = 4$, $e = 1$, $a, b, c = 0$. 4 copies de l'objet d, et 1 copie de e.

pour un poids = 24 et une $\boxed{\text{valeur} = 37}$

Exercice 4. a) Il s'agit d'un problème de mise en boîte, dans des sacs de capacité 30, où les objets sont les groupes et leur poids le nombre de personnes les constituant.

b) Il suffit d'appliquer l'heuristique Best Fit Decreasing (BFD).
Puisque le poids de chaque objet est strictement supérieur au tiers de la capacité du sac, cette heuristique trouvera l'optimum. —

Exercice 5.

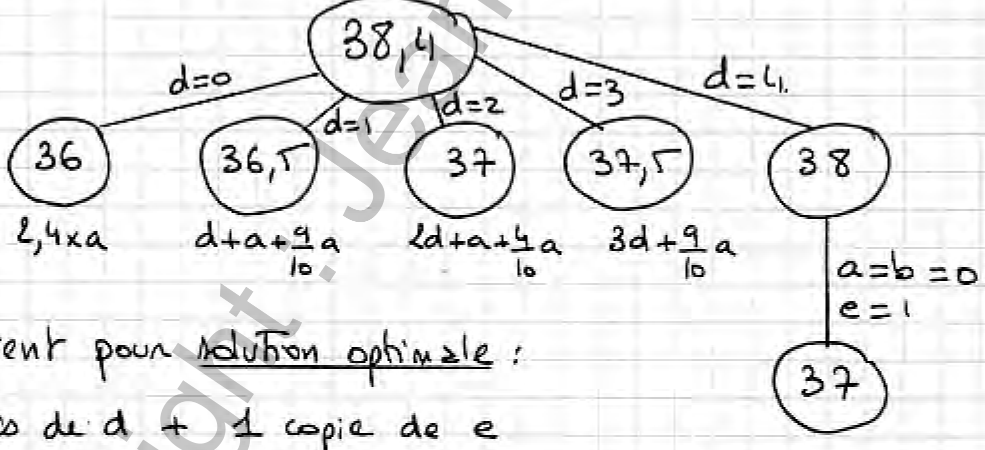
A – On reprend la méthode par séparation et évaluation pour le problème du sac à dos en 0-1, sauf que chaque objet peut être pris en plusieurs exemplaires. Le nombre de successeurs d'un noeud ne se limitera plus à 2.

Exemple : pour le problème du III b :

Objets	d	a	b	e	c
Poids	5	10	9	4	6
Valeur	8	15	12	5	4

Evaluation initiale : $4 \times d + \frac{4}{5} \times d$

$V = 32 + 6{,}4 = 38{,}4$



On obtient pour solution optimale :
4 copies de d + 1 copie de e
pour une valeur = 37
(C'est ce que l'on a trouvé au III b par heuristique) —

Exercice 5 (Suite)

B - • Pour le graphe considéré, tous les sommets ont même degré $= n-1$.

Ainsi LFS a le même comportement que FFS, soit une PRP de $\frac{n}{4}$.

• L'heuristique DS est ici optimale. En effet, supposons sans perte de généralité que le 1er sommet est x_1. Le deuxième sera alors y_i pour $i \neq 1$. L'ordre ne peut pas être $x_1 \underbrace{y_i \cdots y_j}_{\text{des } y_k} y_1$ car le degré de saturation de y_1 serait alors 0, tandis qu'il existe x_i ayant un degré de saturation >0.

Ainsi vu le fait caractérisant les heuristiques séquentielles donnant une coloration optimale, l'heuristique DS trouve ici une coloration optimale.

C - Pour un problème du sac à dos en 0-1.

Pour N objet on code une solution réalisable par N bits valant 1 lorsque l'objet est pris et 0 sinon.

ex: genotype : 0 1 1 0 1 0 0 prendre les objets 2,3 et 5.

Croisement : On effectue un ET LOGIQUE, bit à bit, entre les 2 parents. La solution générée étant en général loin d'être optimale, on peut ensuite changer les bits nuls en 1 en appliquant une heuristique par utilité décroissante.

Mutation : Tirer au sort un bit 1, le changer en 0, puis appliquer une heuristique par utilité décroissante pour changer certains bits 0 en 1

Exemple : Avec les données de l'exercice 3 :

Croist : $p=21; v=22$, | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | ; $p=24; v=29$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\xrightarrow{\text{ET}}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | $p=11$, $v=12$ $\xrightarrow{\text{heuristique}}$ enfant : | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | $p=24$, $v=29$.

Mut : | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | (3ème bit) $\xrightarrow{\text{mise à 0}}$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | $p=15$, $v=23$ $\xrightarrow{\text{heuristique}}$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | $p=24$, $v=35$