Le plan hyperbolique

$\boxed{0}$ On considère $\mathbb{H}^2 = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid y>0\}$, muni d'une métrique Riemannienne, donnée par la formule :

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$$

$\Rightarrow$ ça fait de $\mathbb{H}^2$ un espace métrique géodésique.

<u>Quelles sont les géodésiques, les isométries</u> ?

- les droites verticales sont des géodésiques :

donnés 2 pts $A = a+iy_0$; $B = a+iy_1$

On peut considérer γ, le chemin vertical :

$$\gamma : [y_0 ; y_1] \longrightarrow \mathbb{H}^2$$
$$t \longrightarrow (a;t)$$

alors $$\lg r(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y} = \left|\ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right)\right|$$

Considérons un autre lacet C^1, de A à B $l : (x(t);y(t))$

$$\lg r(l) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \overset{(*)}{>} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y}\left|\frac{dy}{dt}\right|\cdot dt \overset{(**)}{\geqslant} \Big[\ln y(t)\Big]_{t_0}^{t_1} = \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right).$$

(*) lorsque $\exists t$ tq $\frac{dx}{dt}(t) > 0$, puisque tout est continu.

(**) On peut "couper" l, pour arriver à un sous-chemin de l de A à B, où $\frac{dy}{dt} > 0$

$\Rightarrow$ la droite verticale est <u>l'unique</u> géodésique passant par A et B.

- Il est clair que toutes les symétries par des droites verticales sont des isométries de $\mathbb{H}^2$. ~~xxxx~~

- rmque : une droite verticale est non bornée des 2 côtés avec la métrique hyperbolique.

• Montrons que les inversions dans les cercles de centre de $\mathbb{R}$, sont des isométries.

Soit l'inversion dans le cercle de centre $a \in \mathbb{R}$, et de rayon r

$$z \longrightarrow r^2 \times \frac{1}{\bar{z}-a} + a$$

$$(x;y) \longrightarrow (u(x;y);v(x;y))$$

avec :

$$u(x;y) = a + r^2 \frac{(x-a)}{(x-a)^2+y^2}$$

$$v(x;y) = r^2 \frac{y}{(x-a)^2+y^2}$$

On calcule $\frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x;y) = r^2 \cdot \frac{y^2-(x-a)^2}{((x-a)^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x;y) = -r^2 \cdot \frac{2y(x-a)}{((x-a)^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x;y) = -r^2 \frac{2y(x-a)}{((x-a)^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x;y) = r^2 \frac{(x-a)^2-y^2}{((x-a)^2+y^2)^2}$$

On pose $Q = ((x-a)^2+y^2)^2$

$$du^2 = \frac{\partial u}{\partial x}^2 \cdot dx^2 + \frac{\partial u}{\partial y}^2 \cdot dy^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx \cdot dy$$

$$\cancel{= \frac{r^4}{Q^2}\left[(y^2-(x-a)^2)^2 + 4y^3(x-a)^3\right.}$$

$$dv^2 = \frac{\partial v}{\partial x}^2 \cdot dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y}^2 \cdot dy^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dx\,dy$$

en remarquant que $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$.

$$du^2 + dv^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cdot (dx^2 + dy^2) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot (dx^2 + dy^2)$$

$$+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx\, dy - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx \cdot dy$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (dx^2 + dy^2) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot (dx^2 + dy^2)$$

$$= \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) (dx^2 + dy^2)$$

$$= \frac{r^4}{Q^2} \cdot \left(\left(y^2 - (x-a)^2\right)^2 + 4y^2(x-a)^2\right) \cdot (dx^2 + dy^2)$$

$$= \frac{r^4}{Q^2} \left(\left(y^2 + (x-a)^2\right)^2\right) \cdot (dx^2 + dy^2)$$

$$= \frac{r^4}{Q} \cdot (dx^2 + dy^2)$$

$$\Rightarrow \frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{((x-a)^2 + y^2)^2}{r^4 \cdot y^2} \cdot \frac{r^4}{((x-a)^2 + y^2)^2} \cdot (dx^2 + dy^2)$$

$$= \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

et donc $lgr(\gamma(\ell)) = \int_{\gamma(\ell)} d\sigma = \int_{\ell} ds = lgr(\ell)$

$\Rightarrow$ • L'inversion dans un cercle de centre $a \in \mathbb{R}$ est une isométrie de $\mathbb{H}^2$.

Donc les éléments du groupe hyperbolique, agissent par isométrie sur $\mathbb{H}^2$. De plus les isométries transforment des géodésiques en des géodésiques. Donc, toutes les droites hyperboliques sont des géodésiques de $\mathbb{H}^2$.

Montrons que toutes les géodésiques sont des droites hyperboliques.

Soient P et Q. Ils sont reliés par une! droite hyperbolique. Supposons qu'il y ait une autre géodésique de P à Q. On peut envoyer la droite (PQ) sur une droite verticale (inversion dans 1 cercle tangent, de rayon double), et on a alors une géodésique entre P' et Q' qui n'est pas la droite verticale ; ce qui n'est pas possible.

$\boxed{\text{Thm : Les géodésiques de } \mathbb{H}^2 \text{ sont les droites hyperboliques}}$

$\boxed{\text{Thm : Le groupe hyperbolique est le groupe d'isométrie de } \mathbb{H}^2}$

<u>démo</u> : Donnée une isométrie de $\mathbb{H}^2$, h

Si h ne fixe pas P, on compose h par $\alpha \in \mathcal{H}$, qui envoie $h(P)$ sur P. $h' = \alpha . h$.

Donnée une géodésique l passant par P, on peut composer h par $\beta \in \mathcal{H}$, de façon à ce que h fixe les extrémités (de $\partial \mathbb{H}^2 = \overline{\mathbb{R}}$). Alors h doit fixer l point par point. Ceci car l est une géodésique, tout point est uniquement repéré par sa distance à 2 points, et puisque h est une isométrie, tout point est fixé !..

h est continue $\mathbb{H}^2 \setminus l$ a 2 composantes connexes, et donc h échange ou conserve les intérieurs et extérieurs de l.

On compose éventuellement par la symétrie par l, afin que h conserve intérieur et extérieur.

Pour conclure il nous suffit de montrer qu'une isométrie de $\mathbb{H}^2$ qui fixe une droite (point par point) et conserve intérieur et extérieur est l'identité ▭

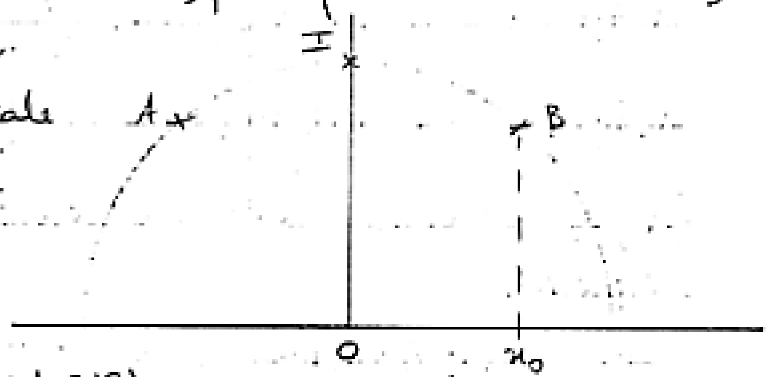
Notations : On note d la distance "hyperbolique", et d_e la distance euclidienne.

lemme : Soient A, B, C de $\mathbb{H}^2$, sur la droite euclidienne $y = y_0$. Alors $d(A;B) = d(B;C)$ ssi $d_e(A;B) = d_e(B;C)$

<u>démo</u> : $A(a+iy_0)$ $B(b+iy_0)$

Alors l'unique droite hyperbolique passant par A et B a pour centre $O(\frac{a+b}{2};0)$. Puisque $\mathcal{H} \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ on peut supposer que c'est le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0;0)$ et de rayon 1 (composer par une translation, puis par une homothétie).

Puisque une symétrie par la droite Δ verticale passant par O est une isométrie de $\mathbb{H}^2$, et qu'elle envoie A sur B et I sur I (où $I = \Delta \cap \mathcal{C}$)



on a : $d(A;B) = 2\,d(I;B)$

$\mathcal{C}$ a pour expression $y = \sqrt{1-x^2} = f(x)$

$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$d(A;B) = 2\int_0^{x_0} \frac{1}{f(x)}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = 2\int_0^{x_0} \frac{dx}{1-x^2}$$

on pose $x = \cos\theta$ $\qquad x_0 = \frac{b-a}{2}$

donc $dx = -\sin\theta \cdot d\theta$.

$$\Rightarrow d(A;B) = 2\int_{\arccos(0)}^{\arccos(x_0)} \frac{-\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta = -2\int_{\arccos(0)}^{\arccos(x_0)} \frac{d\theta}{\sin\theta}.$$

On pose $x = \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}$ $\Rightarrow$ $d\theta = 2 \cdot \cos^2\frac{\theta}{2} \cdot dx$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}} \cdot dx = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\, dx = tg^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) dx = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow d(A;B) = -2\int_{tg(\arccos(0)/2}^{tg(\arccos(x_0))/2} \frac{dx}{x} = -2 \ln\left(\frac{tg(\arccos(x_0))/2}{tg(\arccos 0)/2}\right).$$

$$= -2 \ln \frac{tg(\arccos(x_0)/2)}{tg(\pi/4)}$$

$$= -2 \ln tg(\arccos(x_0)/2)$$

$\cancel{A(a+iy_0),\ B(b+iy_0),\ C(c+iy_0).}$

$$\cancel{d(A;B) = -2 \ln\left(tg\left(\arccos\left(\frac{b-a}{4}\right)\right)\right)}$$

$$\cancel{d(B;C) = -2 \ln\left(tg\left(\arccos\left(\frac{c-b}{4}\right)\right)\right)}.$$

~~ln, tg et arcos sont des bijections sur leur ensemble de définition.~~

$$\cancel{\Rightarrow d(A;B) = d(B;C) \Longleftrightarrow b-a = c-b}$$

$$\Longleftrightarrow$$

x_0 ne dépend que de l'angle $\widehat{AOB}$.

ln, tg et arcos réalise des bijections sur les ensemble définis

$$\Rightarrow \quad d(A;B) = d(B;C) \quad \text{ssi} \quad d_e(A;B) = d_e(B;C) \qquad \blacksquare$$

lemme : Une transformation de $\mathbb{H}^2$, qui fixe tous les points d'une droite hyperbolique, et ne permute pas intérieur et extérieur est l'identité.

dem : (on le fait dans le cas d'un cercle ...)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle (que l'on peut prendre basé en O), laissé fixe par $h \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Soit Δ la droite verticale passant par O.

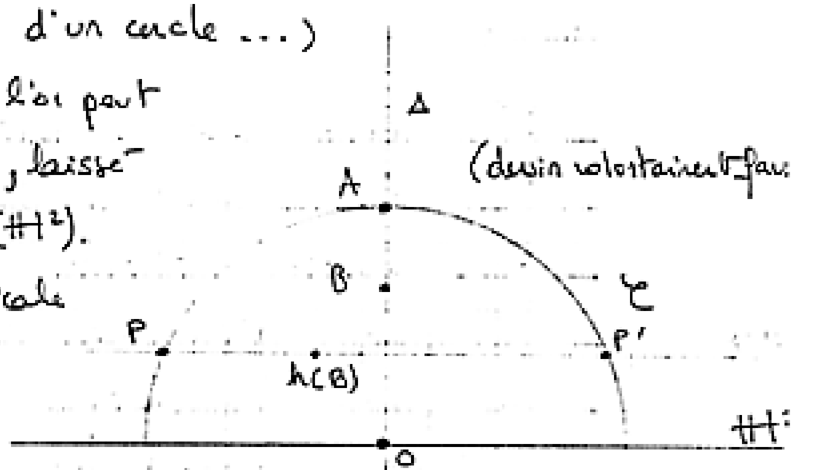
Soit $A = \Delta \cap \mathcal{C}$

et B sur Δ dans "l'intérieur" de $\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{C}$

si $P \in \mathcal{C}$, on note $P' = S_\Delta(P)$.

soit $h(B)$. $h(B)$ est sur la droite $y = y_0$

Soient P et $P' \in \mathcal{C} \cap$ "$y = y_0$"



alors $d(B;P) = d(B;P') \Rightarrow d(h(B);P) = d(h(B);P')$

(avec le lemme précédent) $\Rightarrow d_e(h(B);P) = d_e(h(B);P')$

$\Rightarrow h(B) \in \Delta$.

On $d(A;B) = d(A;h(B))$ et B et $h(B)$ sont tous deux intérieurs à $\mathcal{C}$ $\Rightarrow h(B) = B$. Donc h fixe 2 points distincts de Δ, et alors puisque c'est une isométrie, h fixe tous les points de Δ.

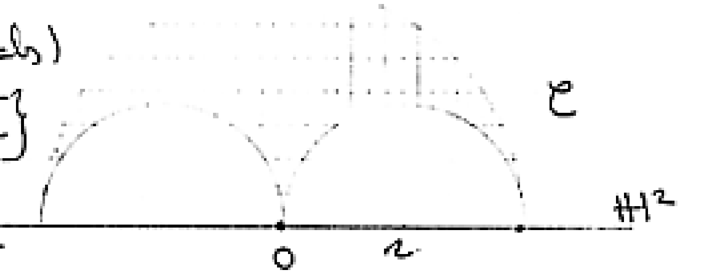
$\Rightarrow$ Donc h fixe toutes les droites hyperboliques intersectant Δ et $\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ h fixe toute la partie hachurée.

$\Rightarrow$ (en considérant des géod. verticales)

h fixe $\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid \mathrm{Re}(z) \in]-1;1[\}$

: une bande verticale.



Or tout point de $\mathbb{H}^2$ appartient à une géodésique qui passe par cette bande, et qui est donc fixée par h

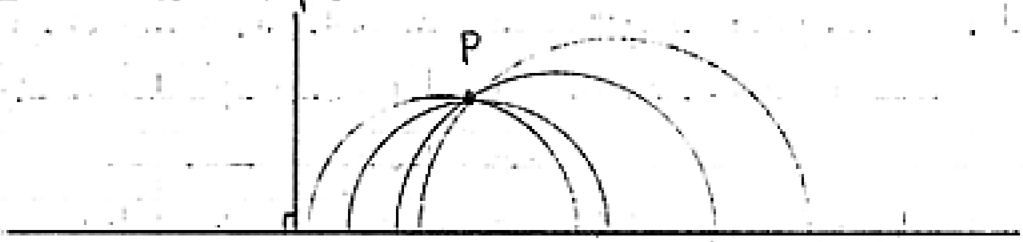
$\Rightarrow$ h fixe tout $\mathbb{H}^2$. Ça termine la démo du théorème. ∎

1 Le plan Hyperbolique

$\mathbb{H}^2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0 \}$ muni de la métrique riemanien

Alors :

- Les points sont les éléments de $\mathbb{H}^2$
- Les droites sont les droites hyperboliques.
- Par 2 points distincts il passe une et une seule droite
- Le groupe d'isométrie de $\mathbb{H}^2$ est le groupe hyperbolique
- Le groupe hyperbolique agit transitivement sur
  $\{ (p ; d) \mid p \in \mathbb{H}^2 ; d \text{ droite passant par } p \}$
  i.e : $\mathbb{H}^2$ est homogène et isotrope
- Par un point il passe une infinité de droites n'intersectant pas une droite donnée.
- $\mathbb{H}^2$ est complet



i.e , la géométrie de $\mathbb{H}^2$ est non-euclidienne

• <u>Homogénéité et isotropie</u>

– $(X;d)$ espace métrique, G groupe d'isométrie de X.
On dit que X est <u>homogène</u> lorsque :
$\forall x;y \in X$, $\exists g \in G$ tq $y = g.x$, i.e, G agit transitive sur X.
Si G agit transitivement sur X, tous les stabilisateurs de points sont conjugués de G, i.e : $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$ stabilisateur de x (ou groupe d'isotropie de x)
$\forall x;y \in G$, $\exists h \in G$ tq $G_y = h.G_x.h^{-1}$ (il suffit de prendre $h \in G$ avec $x = h.y$.).
X est dit <u>isotrope</u> si le stabilisateur de tout point est $O(2)$ (groupe des matrices 2×2, orthogonales.)
(– Exerc : Autre définition : X est dit (homogène) et isotrope lorsque G agit transitivement sur $\{(p;d) \mid p \in X$, et d une géodésique passant par $p\}$)

Intuitivement : – homogène : " la géométrie est la même en tout point "
– Isotrope : " la géométrie est la même dans toutes les directions "

$\boxed{\text{Proposition : Le stabilisateur d'un point est } O(2)}$

démo : Toute isométrie de $\mathbb{H}^2$ est de la forme :

o.p : $z \longrightarrow \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\quad ad - bc = 1$

o.r : $z \longrightarrow \dfrac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$ $\quad \alpha\delta - \beta\gamma = -1$

$\mathbb{H}^2$ est homogène $\Rightarrow$ on s'intéresse au stabilisateur de i

? $Z(i)$. $\dfrac{ai+b}{ci+d} = i \iff a = d$, $b = -c$ $\quad (a^2+b^2=1)$

ou $\dfrac{\alpha\bar{i}+\beta}{\gamma\bar{i}+\delta} = i \iff \begin{array}{l}\alpha=-\delta\\ \beta=\gamma\end{array}$ $\quad(\alpha^2+\beta^2=1)$

On considère : $\varphi : Z(i) \longrightarrow O(2)$

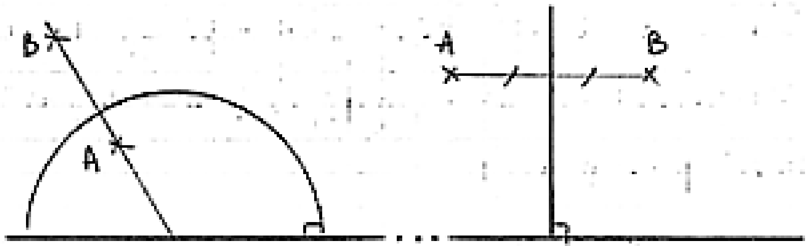
défini par : $\dfrac{ai+b}{-bi+a} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $\quad a^2+b^2=1$

$\dfrac{\alpha\bar{i}+\beta}{\beta\bar{i}-\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ $\quad \alpha^2+\beta^2=1$

Il suffit de montrer que φ est un morphisme de groupe pour montrer que $Z(i) \approx O(2)$ (exercice) ■

Proposition : G agit transitivement sur $\{x, d \mid x \in \mathbb{H}^2, d$ géod

1) G agit transitivement sur $\mathbb{H}^2$

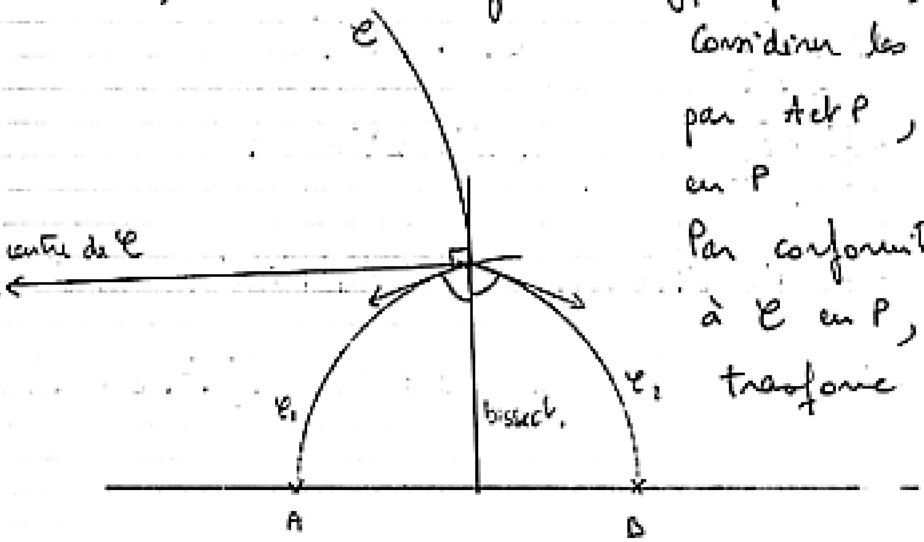


On peut toujours trouver une reflexion qui envoie A sur B.

2) G agit transitivement sur les directions

On doit montrer : donnés d et d' des droites hyperboliques passant par P, il existe une transformation fixant P, envoyant d sur d'.

Il suffit de montrer : donnés 2 points $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, et $P \in \mathbb{H}^2$, il existe une réflexion hyp. fixant P, envoyant A sur B.



Considérer les droites hyperboliques passant par A et P, et B et P et leurs tangentes en P.

Par conformité on peut tracer la tangente à $\mathcal{C}$ en P, où l'inversion dans $\mathcal{C}$ transforme A en B, et fixe P ■

• $\mathbb{H}^2$ est complet

lemme : dans un espace métrique E, si il existe $r>0$, tq $\forall x \in E$ $\overline{B(x;r)}$ est compact, alors E est complet.

dem : Soit (x_n) suite de Cauchy.
Pour $\varepsilon = \frac{r}{2}$, $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$, $d(x_n; x_{n_0}) < \frac{r}{2}$
donc $(x_n)_{n \geq n_0} \subset \overline{B(x_{n_0}; r)}$ qui st un compact, donc (x_n) a une valeur d'adhérence, et converge donc vers cette valeur (car de Cauchy) ■

Les boules hyperboliques, sont des "boules euclidiennes décentrées", dont l'adhérence dans $\mathbb{H}^2$ (muni de la topologie métrique) est une boule (euclidienne, "décentrée") fermée {en fait, $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{H}^2$, la boule hyperbolique centrée en x, de rayon r, est à distance non nulle de $\overline{\mathbb{R}}$, et alors compacte), compacte, et donc avec le lemme $\mathbb{H}^2$ est complet.