

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES

Emile PICARD

U.M.R. C.N.R.S. N° 5580

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, U. F. R. M. I. G.

118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4 (France)

Tél : (33) 5 61 55 62 25 Fax : (33) 5 61 55 82 00

levitt@picard.ups-tlse.fr

Toulouse, le 29 novembre 2001

Rapport sur la thèse de Jean-Philippe Préaux

Le but de cette thèse est de donner un algorithme pour résoudre le problème de conjugaison dans les groupes fondamentaux de variétés de dimension trois qui sont géométrisables au sens de Thurston. Elle est inspirée par la méthode employée par Sela, qui avait traité les groupes de noeuds en 1993. Bien que ce ne soit pas dit dans l'introduction, il s'agit bien de donner un algorithme, pas seulement d'en affirmer l'existence. La thèse n'aborde quasiment pas les questions de complexité, signalant cependant que de ce point de vue l'étape la plus délicate est dans la partie 4 (morceaux hyperboliques).

L'hypothèse de géométrisabilité est à l'heure actuelle nécessaire, puisque sans elle on ne sait même pas résoudre le problème du mot. Elle exprime que l'on peut découper la variété en morceaux que l'on peut munir d'une structure géométrique, et on sait grâce à Thurston qu'elle est vérifiée dans de très nombreux cas (en particulier pour les variétés Haken).

Le problème de conjugaison étudié ici a un énoncé algébrique (déterminer si deux éléments du groupe sont conjugués ; c'est l'un des trois célèbres problèmes introduits par Dehn au début du 20ème siècle), et une interprétation géométrique : décider si deux immersions du cercle dans une variété de dimension 3 sont homotopes.

La stratégie globale à adopter est claire d'un point de vue géométrique : une homotopie entre deux immersions du cercle donne une immersion d'un anneau, dont on étudie la trace sur les différents morceaux de la décomposition (ce sont des "rectangles" ou des anneaux). Les morceaux sont des variétés hyperboliques de volume fini ou des fibrés de Seifert, dans lesquels les anneaux essentiels sont particulièrement simples : ils sont parallèles au bord dans les morceaux hyperboliques, verticaux dans les morceaux Seifert.

Mais mettre en oeuvre cette stratégie est particulièrement délicat. On doit en particulier décrire pour chaque morceau un algorithme de conjugaison "relatif", puis comprendre comment rassembler et organiser toutes les informations obtenues. L'approche choisie par Préaux est de nature algébrique, l'outil essentiel étant la décomposition du groupe fondamental en graphe de groupes fournie par la décomposition géométrique de la variété.

Le problème de conjugaison étant résoluble dans un produit libre s'il l'est dans

chaque facteur, on se ramène d'abord aux variétés irréductibles. La théorie de la variété caractéristique (Jaco-Shalen, Johansson) décompose la variété en morceaux qui sont soit des fibrés de Seifert soit atoroidaux (et donc munis d'une métrique hyperbolique de volume fini d'après Thurston).

Dans chaque morceau on résout algorithmiquement 5 problèmes, que Préaux appelle élémentaires. En termes géométriques, il s'agit essentiellement de décider si deux courbes sont homotopes, si une courbe est homotope à une courbe contenue dans le bord, si deux courbes sont homotopes modulo le bord, etc.

Dans le cas des fibrés de Seifert, l'idée est de commencer par "projeter" chaque problème dans le groupe fondamental de la base (qui est un groupe fuchsien), puis de "remonter" la solution dans le groupe de la 3-variété. Le cas le plus pénible est celui où la base est un orbifold plat. L'auteur le traite par 28 pages de calculs, il serait intéressant d'interpréter les résultats en voyant le groupe cristallographique comme groupe de transformations du plan plutôt que comme groupe abstrait.

Les groupes fondamentaux des morceaux hyperboliques ne sont pas hyperboliques au sens de Gromov lorsqu'il y a un bord. Comme chez Sela, on considère des variétés sans bord obtenues par obturation de Dehn, qui sont presque toujours hyperboliques par un résultat de Thurston (on doit en fait considérer simultanément deux variétés sans bord, dont la détermination est délicate). On se ramène ainsi aux groupes hyperboliques, dans lesquels l'algorithmique est très développée. Il est vraisemblable qu'ici certains raisonnements pourraient être simplifiés par l'utilisation de la norme stable.

Pour regrouper les informations obtenues dans chacun des morceaux, on considère le groupe fondamental de la variété comme groupe fondamental d'un graphe de groupe (dont les sommets correspondent aux morceaux de la décomposition). On est ainsi conduit à résoudre le problème de conjugaison dans les graphes de groupes (c'est-à-dire le ramener à des problèmes sur les groupes de sommets).

On sait depuis longtemps résoudre ce problème pour les sommes amalgamées et les extensions HNN, mais le cas général n'a semble-t-il jamais été écrit. Ce texte est donc une référence utile, mais des références à l'arbre de Bass-Serre auraient été bienvenues pour éclairer les énoncés algébriques. Dans le cas des 3-variétés, l'analyse est considérablement facilitée par la structure particulièrement simple des anneaux essentiels.

Cette thèse, rédigée de façon très complète, comporte plus de 200 pages. Elle aurait été encore plus longue si l'auteur avait développé l'aspect topologique en plus de l'aspect algébrique. Il s'agit d'un travail important et difficile, et je suis tout à fait favorable à la soutenance.

G. LEVITT

Gilbert Levitt
Professeur de Mathématiques