

Espaces fibrés de Seifert

1 Définition et propriétés topologiques

On se donne le disque D^2 comme le disque complexe $D^2 = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$. Un **tore solide fibré**, d'indice (p, q) , où p, q sont des entiers premiers entre eux, est le quotient de $D^2 \times I$ par l'application de $D^2 \times \{-1\}$ dans $D^2 \times \{1\}$, qui à $(z, -1)$ associe $(\exp(2i\pi p/q).z, 1)$. L'image de $\{0\} \times I$ est une courbe fermée simple, appelée axe du tore. Si $z \neq 0$, l'image de $z \times I \cup \dots \cup \exp(2i\pi kp/q).z \times I \cup \dots \cup \exp(2i\pi(q-1)/q).z \times I$ est une courbe fermée simple. Ainsi, un tore solide fibré, est réunion disjointe de courbes fermées simples, que l'on appellera les fibres. L'axe du tore, est un fibre dite exceptionnelle, si p n'est pas un multiple de q .

A homéomorphisme préservant les fibres près, on peut supposer que $q > 0$ et que $0 < p \leq q/2$. De plus si T est un tore solide fibré de type (p, q) , et T' est un tore solide fibré de type (p', q') , avec $0 < p \leq q/2$, et $0 < p' \leq q'/2$, alors il existe un homéomorphisme préservant les fibres entre T et T' , si et seulement si $p = p'$ et $q = q'$. Ainsi, dans la suite, nous ne considérerons que (p, q) avec $0 < p \leq q/2$.

Un **fibré de Seifert** (orientable), est une 3-variété compacte (orientable) M , qui est réunion disjointe de courbes fermées simples, appelées les fibres, de façon à ce que toute fibre c admette dans M un voisinage fermé V_c constitué de fibres, qui est l'image d'un tore solide fibré, par un homéomorphisme ϕ préservant les fibres.

On peut vérifier que pour une fibre c donnée, le type (p, q) du tore solide fibré ne dépend pas du choix du voisinage V_c . Ainsi on pourra parler du type (p, q) d'une fibre, mais on parlera surtout de l'indice q de la fibre c . On dira que c est une fibre régulière (respectivement exceptionnelle), si $q = 1$ (respectivement $q > 1$). Dans un voisinage fibré d'une fibre exceptionnelle, toutes les autres fibres sont régulières. L'ensemble des voisinages fibrés des fibres de M , donnant un recouvrement de M , par compacité il y a un nombre fini de fibres exceptionnelles.

Si on identifie dans M , chaque fibre en un point, on obtient un espace quotient, qui est une surface B (éventuellement non-orientable), appelée la base. On dénote l'application d'identification par $p : M \longrightarrow B$, et on l'appelle projection canonique. La base B est à bord non vide, si et seulement si M est à bord non vide. Par définition, le bord d'un fibré de Seifert M est réunion disjointe de fibres régulières de la fibration. Ainsi, on peut munir toute composante connexe de ∂M d'une structure de S^1 -fibré sur le cercle, dont la projection canonique, est la restriction de la projection canonique $p : M \longrightarrow B$. Les composantes de ∂M sont donc des tores, fibrés en fibres régulières.

On munit implicitement un fibré de Seifert M , d'une fibration de Seifert, c'est à dire d'une partition de M en fibres, pour laquelle M est un fibré de Seifert. Deux fibrés de Seifert M et M' sont dit équivalents, s'il existe un homéomorphisme préservant les fibres entre M et M' . Si $M = M'$ on dira que les fibrations sont équivalentes. Un fibré de Seifert peut être muni de plusieurs fibrations non équivalentes.

La première question que l'on peut se poser, est la suivante : peut-on déterminer un système d'invariants complet, d'homéomorphisme préservant les fibres, d'une fibration de Seifert d'une variété M ? Clairement le type (p, q) d'une fibre, est invariant par homéomorphisme préservant les fibres, et donc le nombre de fibres exceptionnelles aussi ; la classe d'homéomorphisme de la base, est aussi invariant à homéomorphisme préservant les fibres près. La réponse est affirmative, démontrée par Seifert (cf. [Sei]). Un espace fibré de Seifert muni d'une fibration est uniquement déterminé par le système d'invariants (théorème 5, [Sei]) :

$$\begin{aligned} (o, g, p, b \mid \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_q, \beta_q) \\ (n, g, p, b \mid \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_q, \beta_q) \end{aligned}$$

Le premier cas a lieu lorsque la base B est orientable (o pour orientable), et le second lorsque B est non-orientable (n pour non-orientable). L'entier g est le genre de la base, p est le nombre de composantes au bord, q est le nombre de fibres exceptionnelles, α_i est l'indice de la $i^{\text{ème}}$ fibre exceptionnelle, $0 < \beta_i < \alpha_i$, et (α_i, β_i) déterminent uniquement son type. Si dans M on retire un voisinage V_c homéomorphe à un tore solide, de chaque fibre exceptionnelle c , la variété $\overline{M}$ obtenue est un S^1 -fibré. Sa structure de S^1 -fibré est caractérisée par sa base, et son nombre d'Euler (ou indice de recollement). L'entier b caractérise cet indice de recollement.

La seconde question que l'on peut se poser, est la suivante : quand une variété M peut-elle admettre plusieurs fibrations non équivalentes ? Par exemple, un tore solide admet une infinité de fibrations non équivalentes, ayant pour base un disque et au plus une fibre exceptionnelle. De tels espaces sont connus et classifiés, et en fait, représentent une exception (théorème VI.17, [Ja]).

Théorème 1.1 (non-unicité d'une fibration de Seifert) *Soient M et N des fibrés de Seifert, et $f : M \longrightarrow N$ un homéomorphisme. Soit il existe un homéomorphisme qui préserve les fibres, de M dans N , soit M et N sont homéomorphes à l'une des variétés suivantes :*

- (i) *Un tore solide.*
- (ii) *Un espace lenticulaire.*
- (iii) *Un I -fibré non trivial, sur la bouteille de Klein.*
- (iv) *Le double d'un I -fibré non trivial, sur la bouteille de Klein.*
- (v) *Une variété prisme, i.e. un fibré de Seifert ayant pour base S^2 , et 3 fibres exceptionnelles d'indices 2, 2 et $\alpha > 1$.*

Dans la suite, nous considérerons un fibré de Seifert M muni d'une fibration. La proposition suivante constitue le lemme VI.7 de [Ja].

Proposition 1.1 *Un fibré de Seifert, est soit irréductible soit homéomorphe à $S^1 \times S^2$ ou à $\mathbb{P}^3 \# \mathbb{P}^3$.*

Puisque toute 3-variété irréductible, à bord torique est soit un tore solide, soit à bord incompressible, on obtient :

Proposition 1.2 *Pour un fibré de Seifert M , $\chi(M) = 0$; de plus, soit M est un tore solide, soit $\partial M = \emptyset$, soit ∂M est incompressible.*

Ainsi, tout fibré de Seifert M à bord non vide, est Haken, et soit M est un tore solide, soit M est ∂ -irréductible. Dans le cas général, on a le résultat qui suit.

Théorème 1.2 *A l'exception des espaces lenticulaires, et de $\mathbb{P}^3 \# \mathbb{P}^3$, un fibré de Seifert M , est soit Haken, soit a pour base S^2 et exactement 3 fibres exceptionnelles. Dans ce dernier cas, M est Haken ssi $H_1(M, \mathbb{Z})$ est infini.*

Ainsi, la plupart des espaces fibrés de Seifert sont Haken. C'est la raison pour laquelle le système d'invariants de Seifert est devenu quelque peu désuet, au profit du groupe fondamental et d'un système périphéral.

2 Le groupe d'un fibré de Seifert

Le groupe fondamental d'un espace fibré de Seifert M , muni d'une fibration, admet une présentation canonique, caractérisée par les invariants de Seifert de M . Le théorème qui suit est un résultat bien connu, qui constitue sous diverses formes les résultats VI.9 et VI.10 de [Ja], le théorème 12.1 de [He], le §10 de [Sei], ou le §5.3 de [Or].

Théorème 2.1 *Soit M un espace fibré de Seifert, orientable, ayant q fibres exceptionnelles, p composantes au bord, et dont la base a pour genre g . Alors $\pi_1(M)$ admet la présentation (1) ou (2), suivant si la base est orientable ou non.*

$$\begin{aligned} & \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_p, h \mid \\ & [a_i, h], [b_i, h], [c_j, h], [d_k, h]; c_j^{\alpha_j} = h^{\beta_j}; h^b = \left(\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right) c_1 \cdots c_q d_1 \cdots d_p \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \langle a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_p, h \mid \\ & a_i h a_i^{-1} = h^{-1}; [c_j, h]; [d_k, h]; c_j^{\alpha_j} = h^{\beta_j}; h^b = \left(\prod_{i=1}^g a_i^2 \right) c_1 \cdots c_q d_1 \cdots d_p \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

où $1 \leq i \leq g$, $1 \leq j \leq q$, $1 \leq k \leq p$, où α_j est l'indice de la $j^{\text{ième}}$ fibre exceptionnelle, $0 < \beta_j < \alpha_j$, $b \in \mathbb{Z}$, et b et $\beta_1, \dots, \beta_q$ sont caractérisés par les invariants de la fibration de M .

De plus, on peut choisir des représentants, de façon à ce que h soit la classe de n'importe quelle fibre régulière, et si T_k est la $k^{\text{ième}}$ composante de ∂M , $i_*(\pi_1(T_k))$ soit engendré par d_k et h .

Remarque 1 : Au vu de ces présentations, il apparaît que h engendre un sous-groupe normal N de $\pi_1(M)$. On appelle N la **fibre** de $\pi_1(M)$. Si de surcroît B est orientable, alors N est dans le centre de $\pi_1(M)$.

Si $\pi_1(M)$ est infini, alors h est d'ordre infini (lemme II.4.2 (i), [JS]). Dans ce cas, on a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N \longrightarrow 1$$

La propriété d'avoir un groupe fondamental contenant un sous-groupe normal cyclique caractérise les espaces fibrés de Seifert dans la classe des variétés Haken (théorème VI.24, [Ja]). Il a été longtemps conjecturé — sous le nom de conjecture de Seifert — qu'il s'agirait en fait d'une caractérisation des espaces fibrés de Seifert, dans la classe entière des 3-variétés. Ce résultat aurait été récemment montré (mais non encore publié) par G.Mess.

Le groupe quotient $\pi_1(M)/N$ fait partie d'une classe de groupes largement étudiée, la classe des groupes fuchsien, que nous examinerons plus en détail dans le paragraphe suivant.

Remarque 2 : Le groupe $\pi_1(M)$ est soit $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, soit fini ssi $\pi_1(M)/N$ est fini. Avec le théorème 3.1, $\pi_1(M)$ est fini, si M n'est pas homéomorphe à $S^1 \times S^2$ ou $\mathbb{P}_3 \# \mathbb{P}_3$, et si une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) $B = S^2$, et soit $q \leq 2$ soit $q = 3$ et $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + 1/\alpha_3 > 1$. Dans le premier cas, M est un espace lenticulaire, dans le second cas les seuls tri-uplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ satisfaisant la condition $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + 1/\alpha_3 > 1$, sont $(2,3,3), (2,3,4), (2,3,5)$, ou $(2,2,\alpha_3)$ (variétés prismes).

(ii) $B = \mathbb{P}_2$, et $q \leq 1$. Ce sont les espaces lenticulaires $L(4n, 2n - 1)$, ou les variétés prismes.

Il est intéressant de remarquer qu'il s'agit d'une liste exhaustive des 3-variétés modelées sur la géométrie $\mathbb{S}^3$ (cf. [Sc]).

Remarque 3 : Rappelons qu'il existe une application surjective de $\pi_1(M)$ sur le premier groupe d'homologie à coefficients entiers de M , $H_1(M, \mathbb{Z})$, appelée application de Hurewicz, dont le noyau est le sous-groupe commutateur de $\pi_1(M)$. Ainsi tout élément de $\pi_1(M)$, peut aussi se voir dans $H_1(M, \mathbb{Z})$. Si la base B est non orientable, h est d'ordre 2 en homologie. Si la base est orientable, h peut être d'ordre fini ou infini. Si B est à bord non vide, alors h est d'ordre infini dans $H_1(M, \mathbb{Z})$. Si B est fermée, alors h peut-être d'ordre fini ou infini dans $H_1(M, \mathbb{Z})$ (cf. [Or] §7.2, pour une formule caractérisant l'ordre de h dans $H_1(M, \mathbb{Z})$ dans ce dernier cas).

Le reste de cette section sera consacré à l'introduction du concept essentiel de **sous-groupe canonique** du groupe d'un Seifert. Pour cela, on commence par se placer dans le cas où la base B est non-orientable. On considère le groupe F , libre sur les générateurs $a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_p, h$, et la surjection canonique $\pi : F \longrightarrow \pi_1(M)$.

Donné un mot ω sur $a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_q, d_1, \dots, d_p, h$, et leur inverse, on dit que ω est A-pair, si le nombre d'occurrence dans ω , d'éléments de la forme $a_i^{\pm 1}$, est pair, et A-impair sinon. Ainsi on parlera de A-parité de ω . Clairement, si le mot ω représente un élément u de F , tous les mots représentant u ont même A-parité. Ainsi on parlera aussi de A-parité d'un élément de F . De même, avec la présentation donnée par le théorème 2.1, puisque les relations de $\pi_1(M)$ sont des mots A-pairs, si $\pi(u) = \pi(v)$, alors u et v ont même A-parité. Ainsi on peut définir la notion de **A-parité** pour un élément α de $\pi_1(M)$; si $\alpha = \pi(\omega)$, α est **A-pair** si ω est A-pair, et **A-impair** si

ω est A-impair. L'ensemble des éléments A-pairs de $\pi_1(M)$, forme un sous-groupe de $\pi_1(M)$, que l'on note Π .

Proposition 2.1 *Ainsi défini, Π est un sous-groupe d'indice 2 de $\pi_1(M)$.*

Démonstration Si $u \notin \Pi$, alors $a_1 u \in \Pi$. Ainsi l'ensemble des cosets à droite $\pi_1(M) \bmod \Pi$ est constitué de deux éléments, $[1]$, et $[a_1^{-1}]$, et donc Π est d'indice 2 dans $\pi_1(M)$. ■

Si M est un espace fibré de Seifert, muni d'une fibration ayant pour base B , on appelle **sous-groupe canonique** de $\pi_1(M)$, le sous-groupe défini comme étant $\pi_1(M)$ si B est orientable, et Π sinon.

Notre définition est en fait une version combinatoire de la définition plus topologique de [JS]. Leur définition est la suivante. La surjection canonique p de M sur sa base, induit l'épimorphisme $p_* : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(B)$. Le sous-groupe d'orientation de $\pi_1(B)$ (*i.e.* celui associé au revêtement d'orientation de B), est un sous-groupe d'indice 1 ou 2 de $\pi_1(B)$, que l'on note Ω . Alors $p_*^{-1}(\Omega) = \Pi$. Cela est facile à établir, dès que l'on a remarqué que lorsque B est non orientable, parmi les générateurs canoniques de $\pi_1(B)$, images par p_* des générateurs canoniques de $\pi_1(M)$, seuls ceux de la forme $p_*(a_i)$ ont pour représentant un lacet de B qui renverse l'orientation de B .

Remarque : Les notions de fibres et de sous-groupe canonique de $\pi_1(M)$ dépendent d'une fibration de M , puisqu'elle dépendent d'une présentation donnée par le théorème 2.1. Ainsi, lorsque nous les emploierons, nous supposerons fixée une fibration de Seifert de M .

Le sous-groupe canonique peut aussi être caractérisé algébriquement, comme centralisateur d'un élément non trivial de la fibre N . C'est le résultat qu'énonce la proposition suivante.

Proposition 2.2 (Centralisateur d'un élément de la fibre) *Soient M un fibré de Seifert, N la fibre et Π le sous-groupe canonique de $\pi_1(M)$. Si $\pi_1(M)$ est infini, soit $\alpha \in N$ un élément non trivial de la fibre, alors Π est le centralisateur de α dans $\pi_1(M)$, et si $\omega \notin \Pi$, alors $\omega \alpha \omega^{-1} = \alpha^{-1}$.*

Démonstration Si la base B de M est orientable, $\Pi = \pi_1(M)$, et puisque la fibre est dans le centre de $\pi_1(M)$, et que $\Pi = \pi_1(M)$, le résultat est clair. On suppose donc que B est non orientable.

Soit un élément $\alpha = h^p$ dans la fibre N . On veut démontrer que si $u \in \pi_1(M)$, $u \alpha u^{-1} = \alpha^\varepsilon$, où $\varepsilon = 1$ si $u \in \Pi$, et $\varepsilon = -1$ sinon. On procède par induction sur la longueur d'un mot sur les générateurs, représentant u . Si u peut être représenté par un mot de longueur nulle, alors $u = 1$, $u \in \Pi$, et $u \alpha u^{-1} = \alpha$. Si u peut être représenté par un mot de longueur $n + 1$, $u = \pi(u_1 \cdots u_{n+1}) = \pi(u_1) \pi(u_2 \cdots u_{n+1})$. On note $v_1 = \pi(u_1)$, et $v = \pi(u_2 \cdots u_{n+1})$. Alors v_1 est un générateur de $\pi_1(M)$, et v est représenté par le mot $u_2 \cdots u_{n+1}$ de longueur n . En appliquant l'hypothèse

d'induction,

$$\begin{aligned} u\alpha u^{-1} &= v_1 v \alpha v^{-1} v_1^{-1} \\ &= v_1 \alpha^\varepsilon v_1^{-1} \end{aligned}$$

où $\varepsilon = 1$ si $v \in \Pi$, et $\varepsilon = -1$ sinon. Si v_1 n'est pas de la forme $a_i^{\pm 1}$, alors u et v ont même A-parité, et avec la présentation (2) donnée par le théorème 2.1,

$$u\alpha u^{-1} = v_1 \alpha^\varepsilon v_1^{-1} = v_1 h^{\varepsilon p} v_1^{-1} = h^{\varepsilon p} = \alpha^\varepsilon$$

Si $v_1 = a_i^{\pm 1}$, alors

$$u\alpha u^{-1} = v_1 h^{\varepsilon p} v_1^{-1} = h^{-\varepsilon p} = \alpha^{-\varepsilon}$$

de plus, v et u sont de A-parité différente, et donc $u \in \Pi$ si et seulement si $u \notin \Pi$. Ceci conclut l'induction.

Ainsi, $\Pi \subset Z(\alpha)$. Si $u \notin \Pi$, avec ce qui précède, $u\alpha u^{-1} = \alpha^{-1}$, et donc $u \in Z(\alpha)$ si et seulement si $\alpha^2 = 1$. Or, si $\pi_1(M)$ est infini, h est d'ordre infini (remarque 1, théorème 2.1), et dans ce cas, si $\alpha \neq 1$, $u \notin Z(\alpha)$, et donc $Z(\alpha) \subset \Pi$. ■

3 Groupes Fuchsien

Etant donnée une fibration de M , et N la fibre, N est un sous-groupe distingué de $\pi_1(M)$, et on peut considérer le quotient $\pi_1(M)/N$. C'est un groupe qui fait partie d'une classe de groupes appelés groupes Fuchsien, bien connus des analystes complexes, des géomètres et des topologues, et largement étudiés. Aussi, pour une introduction aux groupes Fuchsien, adéquate à l'étude des espaces fibrés de Seifert, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de référence [JS] et [He]. Nous rappellerons les résultats qui nous seront utiles dans la suite.

Sous les hypothèses du théorème 2.1, on peut donner à $\pi_1(M)/N$ la présentation (1) ou (2), selon si B est ou non orientable,

$$\langle \underline{a}_1, \underline{b}_1, \dots, \underline{a}_g, \underline{b}_g, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_q, \underline{d}_1, \dots, \underline{d}_p \mid \underline{c}_j^{\alpha_j} = 1, \left(\prod_{i=1}^g [\underline{a}_i, \underline{b}_i] \right) \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_p = 1 \rangle$$

ou

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_g, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_q, \underline{d}_1, \dots, \underline{d}_p \mid \underline{c}_j^{\alpha_j} = 1, \underline{a}_1^2 \cdots \underline{a}_g^2 \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_p = 1 \rangle$$

et l'on note $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N$ la surjection canonique. Si $u \in \pi_1(M)$, on notera $\underline{u}$ au lieu de $\rho(u)$.

Dans le cas où M a un bord non vide, la dernière relation peut être transformée en

$$\underline{d}_j^{-1} = \underline{d}_{j+1} \cdots \underline{d}_p \cdot \left(\prod_{i=1}^g [\underline{a}_i, \underline{b}_i] \right) \cdot \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_{j-1}$$

ou

$$\underline{d}_j^{-1} = \underline{d}_{j+1} \cdots \underline{d}_p \cdot \left(\prod_{i=1}^g \underline{a}_i^2 \right) \cdot \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_{j-1}$$

pour tout $j = 1 \cdots n$. Un changement de Tietze permet donc de supprimer cette relation et le générateur $\underline{d}_j$. Ceci montre que $\pi_1(M)/N$ est le produit libre des groupes cycliques engendrés par les générateurs $\underline{a}_i$, $\underline{b}_j$ (éventuellement), $\underline{c}_k$, et $\underline{d}_l$, à l'exception de l'un des $\underline{d}_l$.

Il est bien connu, qu'un produit libre de groupes cycliques contient un sous-groupe libre d'indice fini. En particulier, si $\partial M \neq \emptyset$, alors $\pi_1(M)/N$ contient le groupe d'une surface à bord non vide, comme sous-groupe d'indice fini. C'est un fait remarquable, que ce résultat reste vrai dans le cas où M est à bord vide. C'est le théorème suivant, qui constitue le théorème 12.2 de [He].

Théorème 3.1 (Sous-groupe de surface d'indice fini) *Soit M un espace fibré de Seifert fermé. Si $\pi_1(M)/N$ admet pour présentation :*

$$\langle \underline{a}_1, \underline{b}_1, \dots, \underline{a}_g, \underline{b}_g, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_q \mid \underline{c}_j^{\alpha_j} = 1, \left(\prod_{i=1}^g [\underline{a}_i, \underline{b}_i] \right) \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q = 1 \rangle \quad (1)$$

ou

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_g, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_q \mid \underline{c}_j^{\alpha_j} = 1, \underline{a}_1^2 \cdots \underline{a}_g^2 \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q = 1 \rangle \quad (2)$$

alors, $\pi_1(M)/N$ contient le groupe d'une surface fermée F , comme sous-groupe d'indice fini, λ . De plus la caractéristique d'Euler de F , est donnée par la formule suivante :

$$\chi(F) = \begin{cases} \lambda(2 - 2g - \sum_{i=1}^q (1 - \frac{1}{\alpha_i})) & \text{dans le cas (1)} \\ \lambda(2 - g - \sum_{i=1}^q (1 - \frac{1}{\alpha_i})) & \text{dans le cas (2)} \end{cases}$$

En particulier, $\chi(F) > 0$ ssi,

Cas (1) : $g = 0$, et soit $q \leq 2$ soit $q = 3$ et $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + 1/\alpha_3 > 1$.

Cas (2) : $g = 1$ et $q = 0$; ou $g = 1$ et $\alpha_1 = 2$.

et $\chi(F) = 0$ seulement dans les cas suivants :

Cas (1) : $g = 1$ et $q = 0$; ou $g = 0$, $q = 3$, d'indices (3,3,3), (2,4,4) ou (2,3,6) ; ou $g = 0$, $q = 4$, d'indices (2,2,2,2).

Cas (2) : $g = 2$ et $q = 0$; ou $g = 1$, $q = 2$, d'indices (2,2).

Remarque : Si $\chi(F) \leq 0$, alors $\pi_1(F)$ est infini. Ainsi, si M est fermée, $\pi_1(M)/N$ est fini ssi $\chi(F) > 0$. Si $\partial M \neq \emptyset$, alors soit M est homéomorphe à un tore solide, soit $\pi_1(M)/N$ est infini.

Topologiquement, le groupe Fuchsien $\pi_1(M)/N$, est le groupe fondamental de l'espace topologique K que l'on obtient en retirant q disques disjoints sur la surface B , et en recollant sur les q composantes au bord de la surface obtenue, des disques, par des applications de degrés respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$. Ainsi, dans un sens, un groupe Fuchsien est un " groupe de surface avec torsion ". Notons $\overline{B}$ la surface obtenue en

retirant q disques disjoints sur B . Clairement, si D est une composante de $\partial\overline{B}$ le long duquel on a recollé un disque, alors un élément de $\pi_1(D) \subset \pi_1(\overline{B})$ est de torsion dans $\pi_1(M)/N$. La proposition suivante, énonce que si $\pi_1(M)/N$ est infini, les seuls éléments de torsion, sont à conjugaison près, ceux ainsi obtenus. C'est la proposition 6.2 de [LS], ou sous une forme plus réduite, la proposition II.3.6 de [JS].

Proposition 3.1 (Torsion dans un groupe Fuchsien infini) *Soit $\pi_1(M)/N$, donné par une des présentations (1) ou (2) figurant plus haut. Si $\pi_1(M)/N$ est infini, alors tout élément u non trivial, de torsion, est dans un conjugué d'un des sous-groupes $\langle \underline{c}_j \rangle$, pour $j = 1, \dots, q$. De plus il s'écrit de façon unique sous la forme $u = v\underline{c}_j^n v^{-1}$, avec $0 < n < \alpha_j$, i.e., si il s'écrit aussi $u = w\underline{c}_k^m w^{-1}$, avec $0 < m < \alpha_k$, alors $j = k$, $n = m$, et $w = v\underline{c}_j^t$, pour $t \in \mathbb{Z}$.*

Si la surface B est non orientable, alors clairement la surface $\overline{B}$ sera aussi non orientable. Considérons le revêtement d'orientation de $\overline{B}$. Puisque tout lacet de $\partial\overline{B}$ préserve l'orientation, ce revêtement s'étend à un revêtement à deux feuillets $\tilde{K}$ de K . Le groupe $\pi_1(\tilde{K})$ s'injecte dans $\pi_1(K) = \pi_1(M)/N$, nous noterons Θ son image. C'est un sous-groupe d'indice 2 de $\pi_1(M)/N$.

Ce sous-groupe Θ peut aussi se définir combinatoirement. Supposons encore que la base B de M soit non orientable, et considérons la présentation (2) de $\pi_1(M)/N$ donnée ci-dessus. Un élément g de $\pi_1(M)/N$ sera dit A-pair, si un mot le représentant contient un nombre pair d'occurrences de lettres $\underline{a}_1, \underline{a}_1^{-1}, \dots, \underline{a}_g, \underline{a}_g^{-1}$. Puisque les relaturs de $\pi_1(M)/N$ contiennent un nombre pair d'occurrences de telles lettres, cette notion est bien définie. On peut aussi voir cela, en remarquant qu'un élément A-pair est l'image par ρ d'un élément A -pair de $\pi_1(M)$, et que le noyau de ρ , N , est constitué d'éléments A -pairs. Notons $\underline{\Pi}$ le sous-ensemble de $\pi_1(M)/N$ constitué des éléments A-pairs. Il est facile de vérifier que $\underline{\Pi}$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\pi_1(M)/N$. En fait, $\underline{\Pi} = \Theta$. Pour voir cela, il suffit de remarquer que parmi les générateurs de $\pi_1(M)/N$ (donnés par la présentation (2) figurant plus haut), seuls les $\underline{a}_i$ ont pour représentants des lacets qui renversent l'orientation de K . Si B est orientable, on pose $\underline{\Pi} = \pi_1(M)/N$. Dans tous les cas, $\Pi = \rho^{-1}(\underline{\Pi})$.

Nous disposons maintenant du vocabulaire nécessaire pour énoncer le résultat caractérisant le centralisateur d'un élément dans un groupe Fuchsien infini.

Proposition 3.2 (Centralisateurs dans un groupe Fuchsien infini)

Soient $\pi_1(M)/N$ un groupe Fuchsien infini, et $u \in \pi_1(M)/N$. Si u est d'ordre infini, alors son centralisateur $\mathcal{Z}(u)$ est soit isomorphe au groupe de la bouteille de Klein, soit libre abélien de rang 1 ou 2. Si de plus $u \notin \underline{\Pi}$, alors $\mathcal{Z}(u)$ est cyclique infini.

Si u est d'ordre fini, alors son centralisateur est cyclique fini. Plus précisément (cf. proposition 3.1), pour $i = 1, \dots, q$, et $0 < n < \alpha_i$, $\mathcal{Z}(\underline{c}_i^n) = \langle \underline{c}_i \rangle$.

Remarque : Si $\pi_1(M)/N$ est fini, le centralisateur d'un élément n'est pas nécessairement cyclique. Ainsi par exemple si $B = S^2$, $q = 3$ d'indices (2,2,2), $\pi_1(M)/N$ admet la présentation :

$$\langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$$

Alors $xyxy = 1$ implique $xyx = y^{-1}$, et donc $xyx^{-1} = y$, et $\pi_1(M)/N$ est abélien. Le centralisateur de x est le groupe $\pi_1(M)/N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Cet exemple peut aisément se généraliser aux cas des groupes diédraux $B = S^2$, $q = 3$, d'indices $(2, 2, 2n)$.

Démonstration Notons $\underline{\Pi}$ le sous-groupe canonique de $\pi_1(M)/N$. Considérons le centralisateur $\mathcal{Z}(u)$ d'un élément u de $\pi_1(M)/N$.

Si u est d'ordre infini, puisque $u \in \mathcal{Z}(u)$, $\mathcal{Z}(u)$ est un groupe infini. De plus son centre est non trivial, puisqu'il contient u .

Maintenant, d'une part tout sous-groupe d'un groupe Fuchsien est un groupe Fuchsien (cf. §3 de [JS]), et ainsi $\mathcal{Z}(u)$ est un groupe Fuchsien. d'autre part, un groupe Fuchsien infini G , ayant un centre non trivial C est soit le groupe de la bouteille de Klein, soit libre abélien de rang 1 ou 2. Si le centre C n'est pas dans le sous-groupe canonique de G , alors G est cyclique infini (cf. proposition II.3.11, [JS]). Le sous-groupe canonique de $\mathcal{Z}(u)$ est $\mathcal{Z}(u) \cap \underline{\Pi}$, et ainsi si $u \notin \underline{\Pi}$, alors $\mathcal{Z}(u)$ est cyclique infini. Ceci démontre la première partie de la proposition.

Si u est d'ordre fini, alors $\mathcal{Z}(u)$ ne peut pas contenir d'élément d'ordre infini. En effet, dans le cas contraire $\mathcal{Z}(u)$ contiendrait le sous-groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$, qui n'est pas un groupe Fuchsien (lemme II.3.10 [JS]), ce qui est contradictoire. Avec la proposition 3.1, si u est d'ordre fini, u est conjugué à $\underline{c}_i^n$, pour $1 \leq i \leq q$ et $n \in \mathbb{Z}_*$, et nous pouvons donc supposer que $u = \underline{u}_i^n$. Si nous considérons un élément non trivial $v \in \mathcal{Z}(u)$, il est de torsion, et donc avec la proposition 3.1,

$$v = a \underline{c}_j^m a^{-1}$$

et puisque u et v commutent,

$$u = \underline{c}_i^n = a \underline{c}_j^m a^{-1} \underline{c}_i^n a \underline{c}_j^{-m} a^{-1}$$

et donc, avec la proposition 3.1, il existe $k \neq 0$,

$$v = a \underline{c}_j^m a^{-1} = \underline{c}_i^k$$

et donc $v \in \langle \underline{c}_i \rangle$. Ainsi, pour $n \neq 0$, $\mathcal{Z}(\underline{c}_i^n) = \langle \underline{c}_i \rangle$. ■

4 Certaines propriétés algébriques

Nous commençons par achever la caractérisation du centralisateur d'un élément dans un groupe de Seifert infini $\pi_1(M)$ (avec la proposition 2.2, nous avons déjà caractérisé le centralisateur d'un élément de la fibre). Nous aurons besoin pour cela, du lemme algébrique qui suit.

Lemme 4.1 *Soit G un groupe, et N un sous-groupe cyclique infini du centre de G . Si G/N est libre abélien de rang 2, alors soit G est abélien, soit N est le centre de G .*

Démonstration Notons h un générateur de N , et considérons deux éléments $a, b \in G$, tels que $a.N$ et $b.N$ forment une base de G/N . En particulier, a, b , et h engendrent G . Puisque G/N est abélien, on a la relation $aba^{-1}b^{-1} = h^n$ dans G , pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Si $n = 0$, alors a et b commutent, et puisque h commute avec a et b , G est abélien. Aussi nous pouvons supposer que $n \neq 0$, et montrer qu'alors, N est le centre de G .

Avec la relation $aba^{-1}b^{-1} = h^n$, et le fait que h soit dans le centre de G , tout élément de G peut s'écrire sous la forme $a^p b^q h^r$, avec $p, q, r \in \mathbb{Z}$. Considérons donc un élément de G , $g = a^p b^q h^r$, et supposons que g soit dans le centre de G . Alors $a^p b^q$ est aussi dans le centre de G , ce qui implique que a^p commute avec b et b^q commute avec a . On a la relation $aba^{-1} = bh^n$, et donc $b = a^p b a^{-p} = b h^{np}$. Ainsi, puisque h est d'ordre infini, et $n \neq 0$, alors $p = 0$. De la même façon, $ba^{-1}b^{-1} = a^{-1}h^n$, et donc $a^{-1} = b^q a^{-1} b^{-q} = a^{-1} h^{nq}$, et nécessairement $q = 0$. Ainsi $g = h^r \in N$, et donc N est le centre de G . ■

Proposition 4.1 (Centralisateurs dans un groupe de Seifert infini)

Soient M un fibré de Seifert, dont le groupe $\pi_1(M)$ est infini, et N la fibre de $\pi_1(M)$, pour une certaine fibration de M . Soit u un élément de $\pi_1(M)$, qui n'est pas dans la fibre N . Alors le centralisateur de u , $\mathcal{Z}(u)$ contient un groupe abélien comme sous-groupe d'indice 1 ou 2. Plus précisément, $\mathcal{Z}(u) \cap \Pi$ est abélien. De plus, si $u \notin \Pi$, alors son centralisateur est cyclique infini.

Démonstration Considérons $u \in \pi_1(M) - N$, et notons $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(u)$ son centralisateur dans $\pi_1(M)$. Notons $\underline{u} = \rho(u)$, et $\underline{\mathcal{Z}} = \rho(\mathcal{Z})$, où $\rho : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)/N$. Puisque $u \notin N = \ker \rho$, $\underline{u}$ est non trivial dans $\pi_1(M)/N$.

Si $u \notin \Pi$, alors $\underline{u} \notin \underline{\Pi}$. Avec la proposition 3.1, nécessairement $\underline{u}$ est d'ordre infini. De plus, avec la proposition 2.2, $N \cap \mathcal{Z} = \{1\}$. Ainsi, la restriction de ρ à $\mathcal{Z}$ est un isomorphisme sur $\underline{\mathcal{Z}}$. Or $\underline{\mathcal{Z}}$ est un sous-groupe non trivial (puisque $\underline{u} \in \underline{\mathcal{Z}}$) du centralisateur $\mathcal{Z}(\underline{u})$ de $\underline{u}$ dans $\pi_1(M)/N$. Avec la proposition 3.2, $\mathcal{Z}(\underline{u})$ est cyclique infini. Ainsi, $\underline{\mathcal{Z}}$ est cyclique infini, et donc $\mathcal{Z}$ aussi.

Considérons maintenant le cas où $u \in \Pi$, alors $\underline{u} \in \underline{\Pi}$. Supposons d'abord que u soit de torsion. Dans ce cas, avec la proposition 3.1, $\mathcal{Z}(\underline{u})$ est un sous-groupe cyclique fini de $\underline{\Pi}$. Si $a \in \mathcal{Z}(u) - \Pi$, alors $\underline{a} \in \mathcal{Z}(\underline{u}) - \underline{\Pi}$. Ainsi, en particulier, $\mathcal{Z}(u) \subset \Pi$, et donc, avec la proposition 2.2, N est dans le centre de $\mathcal{Z}(u)$. De plus, on a $\mathcal{Z}(u)/N \cong \underline{\mathcal{Z}}$. Or $\underline{\mathcal{Z}}$ est un sous-groupe non trivial de $\mathcal{Z}(\underline{u})$, et est donc cyclique (fini). Ainsi, Puisque N est central dans $\mathcal{Z}(u)$, clairement, $\mathcal{Z}(u)$ est abélien.

Supposons maintenant, que u soit d'ordre infini. Alors, puisque $\mathcal{Z} \cap \underline{\Pi}$ contient $\underline{u}$, dans son centre, c'est un groupe Fuchsien infini, ayant un centre non trivial. Avec la proposition II.3.11 de [JS], $\mathcal{Z} \cap \underline{\Pi}$ est isomorphe au groupe de la bouteille de Klein, ou à un groupe libre abélien de rang 1 ou 2. Or, avec la proposition II.3.7 de [JS], le sous-groupe d'orientation $\underline{\Pi}$ d'un groupe Fuchsien ne peut pas contenir le groupe de la bouteille de Klein comme sous-groupe. Ainsi, $\mathcal{Z} \cap \underline{\Pi}$ est un groupe libre abélien de rang 1 ou 2.

Nous souhaitons montrer que $\mathcal{Z} \cap \Pi$ est abélien. Puisque $u \in \underline{\Pi}$, N est dans le centre de $\mathcal{Z} \cap \Pi$, et de plus, $(\mathcal{Z} \cap \Pi)/N \cong \mathcal{Z} \cap \underline{\Pi}$. Si $\mathcal{Z} \cap \underline{\Pi}$ est cyclique, il est facile de vérifier, puisque N est central, que $\mathcal{Z} \cap \Pi$ est abélien. Si $\mathcal{Z} \cap \underline{\Pi}$ est libre abélien de rang

2, alors avec le lemme 4.1, soit $\mathcal{Z} \cap \Pi$ est abélien, soit N est le centre de $\mathcal{Z} \cap \Pi$. Or u est dans le centre de $\mathcal{Z} \cap \Pi$, et n'est pas dans N . Ainsi, on a la conclusion souhaitée. ■

Nous caractérisons maintenant les éléments du bord conjugués dans un espace fibré de Seifert à bord non vide.

Topologiquement, le résultat suivant affirme que dans un fibré de Seifert M à bord non vide, à l'exception des cas $M \cong S^1 \times D^2$, $M \cong S^1 \times S^1 \times I$, ou d'un I -fibré non trivial base la bouteille de Klein, un anneau essentiel est saturé en fibres régulière dans toute fibration de Seifert de M .

Proposition 4.2 (Anneaux essentiels dans un Seifert) *Soit M un espace fibré de Seifert, à bord non vide, qui n'est pas $S^1 \times D^2$, $S^1 \times S^1 \times I$, ou le I -fibré non trivial sur $\mathbb{KB}_2$. Avec les notations du théorème 2.1, nous notons $T_i = \langle d_i, h \rangle$ et $T_j = \langle d_j, h \rangle$, avec $1 \leq i, j \leq p$ (éventuellement $i = j$). Soient $a \in T_i$ et $b \in T_j$, et u qui conjugue a en b dans $\pi_1(M)$.*

Alors soit $i = j$, $a = b$, et $u \in T_i$, soit $a = h^n$ et $b = h^{\epsilon n}$, où $\epsilon = \pm 1$. De plus, $\epsilon = 1$ si et seulement si u est dans le sous-groupe canonique de $\pi_1(M)$.

Démonstration Conservons les notations du paragraphe 5.3. Considérons une fibration de M , notons B sa base, et N la fibre. Puisque M est à bord non vide (notons p le nombre de composantes de ∂M), $\pi_1(M)/N$ est le produit libre des groupes cycliques engendrés par les générateurs de $\pi_1(M)/N$, à l'exception de l'un d'entre eux, $\underline{d}_p$.

$$\pi_1(M)/N = F * \langle \underline{c}_1 \rangle * \cdots * \langle \underline{c}_q \rangle * \langle \underline{d}_1 \rangle * \cdots * \langle \underline{d}_{p-1} \rangle$$

où F est le groupe libre engendré par $\underline{a}_1, \underline{b}_1, \dots, \underline{a}_g, \underline{b}_g$, ou par $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_g$, selon si B est ou non orientable. L'image de d_p par ρ , est donnée par la formule :

$$\rho(d_p) = \underline{d}_p = \left(\left(\prod_{i=1}^g [\underline{a}_i, \underline{b}_i] \right) \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_{p-1} \right)^{-1}$$

$$\rho(d_p) = \underline{d}_p = (\underline{a}_1^2 \cdots \underline{a}_g^2 \underline{c}_1 \cdots \underline{c}_q \underline{d}_1 \cdots \underline{d}_{p-1})^{-1}$$

selon si B est ou non orientable.

Puisque M n'est pas homéomorphe à un tore solide, toutes les composantes de ∂M sont incompressibles. Avec le théorème 2.1, à conjugaison près, les plongements des groupes du bord dans $\pi_1(M)$ peuvent être pris comme étant $T_i = \langle d_i, h \rangle$ pour i variant de 1 à p . Ainsi, $\rho(T_i)$ est engendré par $\underline{d}_i$.

Nous souhaitons vérifier les conditions suivantes :

- Premièrement que pour tout $i = 1, 2, \dots, p$, l'image de T_i par ρ soit non triviale, et que si $i \neq j$, alors $\rho(T_i) \cap \rho(T_j) = 1$. Clairement ce n'est pas le cas seulement lorsque la fibration a pour base un disque ou un anneau et aucune fibre exceptionnelle.
- Deuxièmement que si $i \neq j$, alors aucun élément non trivial de $\rho(T_i)$ n'est conjugué à un élément de $\rho(T_j)$. Ce n'est pas le cas seulement dans le cas d'une fibration sur l'anneau sans fibres exceptionnelles.
- Dernièrement que deux éléments différents de $\rho(T_i)$ aient des classes de conjugaison

distinctes. Ce n'est pas le cas seulement dans le cas d'une fibration ayant pour base le disque avec deux fibres exceptionnelles d'indices 2 ; dans ce cas $d = c_1.c_2 \sim c_2c_1 = (c_1c_2)^{-1} = d^{-1}$.

Si M est un S^1 -fibré sur D^2 , alors puisque M est orientable, ce ne peut-être que le tore solide $S^1 \times D^2$. Si M est un S^1 -fibré sur l'anneau, alors ce peut-être $S^1 \times S^1 \times I$, ou le I -fibré non trivial sur $\mathbb{KB}_2$. Enfin, si M a pour base le disque et deux fibres exceptionnelles d'indice 2, M ne peut-être homéomorphe qu'au I -fibré non trivial sur $\mathbb{KB}_2$. Ainsi, dans notre cas, les conditions précédentes sont vérifiées.

Si u conjugue a en b dans $\pi_1(M)$, alors $\underline{u}$ conjugue $\underline{a}$ en $\underline{b}$ dans $\pi_1(M)/N$, et donc, soit $i = j$, $\underline{a} = \underline{b} = \underline{d}_i^t$, et $\underline{u} = \underline{d}_i^r$, pour $t, r \in \mathbb{Z}$, soit $\underline{a} = \underline{b} = 1$.

Dans le premier cas, puisque $\ker \rho = N \subset T_i$, $u \in T_i$, et $a = bh^n$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Mais T_i est abélien, et donc u commute avec a, b , et h , ainsi,

$$b = uau^{-1} = ubh^nu^{-1} = bh^n$$

et donc $h^n = 1$. Or puisque M est à bord non vide, $\pi_1(M)$ est infini, et donc h est d'ordre infini (cf. remarque 1, théorème 2.1). Donc $n = 0$, et $a = b$.

Dans le second cas, $a = h^n$, et $b = h^m$. Puisque $\pi_1(M)$ est infini, on peut appliquer la proposition 2.2, et alors,

$$b = h^m = uh^nu^{-1} = h^{\epsilon n}$$

où $\epsilon = \pm 1$ et $\epsilon = 1$ si et seulement si u est dans le sous-groupe canonique. De plus, puisque h est d'ordre infini, $m = \epsilon n$. ■

On obtient immédiatement le corollaire :

Corollaire 4.1 *Sous ces hypothèses, dans $\pi_1(M)$, le centralisateur d'un élément de $T_i - N$ est T_i . De plus T_i est son propre normalisateur.*

Références

- [He] J.HEMPEL, *3-manifolds*, Annals of mathematics studies, Princeton university press, 1976.
- [Ja] W.JACO, *Lectures on three-manifold topology*, Publications of the Conference Board of the Mathematical Sciences **43**, American Mathematical Society (1977).
- [JS] W.JACO et P. SHALEN, *Seifert fibre space in 3-manifolds*, Memoirs of the American Mathematical Society **220** (1979).
- [LS] R.LYNDON et P.SCHUPP, *Combinatorial group theory*, Springer Verlag, 1976.
- [Or] P.ORLIK, *Seifert manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **291**, Springer-Verlag (1972).
- [Sc] P.SCOTT, *The geometries of 3-manifolds*. Bulletin of the London Mathematical Society **15**, London Math. Society (1983), pp. 401–487.
- [Sei] H.SEIFERT, *Topology of three dimensional fibered spaces*, Acta Mathematica **60** (1933), pp. 147–288.

Jean-Philippe Préaux
preaux@cmi.univ-mrs.fr