

Topologie géométrique

Nous rappelons la construction de la topologie géométrique, et le théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston. Pour tous les faits énoncés non démontrés, ou pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de référence [BP], [CEG], et [Th].

1 Définition de la topologie géométrique

Définition 1 Soit X un espace topologique. On note $F(X)$ l'ensemble des fermés de X . La **topologie de Chabauty**, sur $F(X)$, est la topologie admettant pour sous-base les ensembles de la forme suivante :

- 1) $O_1(K) = \{A \in F(X) \mid A \cap K = \emptyset\}$ pour un compact K .
- 2) $O_2(U) = \{A \in F(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}$ pour un ouvert U .

La topologie de Chabauty vérifie de jolies propriétés.

Proposition 1.1 Soit X un espaces topologique quelconque. On munit $F(X)$ de la topologie de Chabauty. Alors,

- 1) $F(X)$ est compact.
- 2) Si X est Hausdorff, localement compact, et a une base dénombrable d'ouverts, alors $F(X)$ a une base dénombrable d'ouverts, et est métrisable (et donc Hausdorff).
- 3) Si X est compact et métrique, la topologie de chabauty sur $F(X)$ est équivalente à la topologie induite par la distance de Hausdorff.

Cette topologie peut à première vue, sembler abstraite. La partie 3), de la proposition précédente, la rend déjà plus concrète. En outre, sous des hypothèses suffisantes, le résultat suivant montre que la notion de convergence dans cette topologie est très naturelle.

Proposition 1.2 Soit X un espace métrisable, localement compact. Une suite $(F_n)_n$ de $F(X)$ converge vers $F \in F(X)$ pour la topologie de Chabauty, si et seulement si :

- 1) Si $x \in X$ est la limite d'une suite $(x_n)_n$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$, alors $x \in F$.
- 2) Donné $x \in F$, il existe une suite $(x_n)_n$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$, qui converge vers x .

Si G est un groupe de Lie, alors G est un espace Hausdorff, localement compact, et métrisable. On munit $F(G)$ de la topologie de Chabauty. On note $C(G)$ l'ensemble des sous-groupes fermés de G , et $D(G)$ l'ensemble des sous-groupes discrets de G . Bien sûr, $D(G) \subset C(G) \subset F(G)$. On peut considérer les topologies induites par $F(G)$ sur $C(G)$ et $D(G)$. On vérifie alors, que $C(G)$ est un fermé dans $F(G)$, et que $D(G)$ est un ouvert dans $C(G)$. Ainsi $C(G)$ est compact métrisable, muni d'une

base dénombrable d'ouverts, et $D(G)$ est localement compact, métrisable et muni d'une base dénombrable d'ouverts.

Cette topologie est très usuelle lorsque l'on considère des représentations dans un groupe de Lie. Soit $(\Gamma_n)_n$ une suite de sous-groupes fermés d'un groupe de Lie, on dit que $(\Gamma_n)_n$ converge géométriquement vers Γ , si elle converge pour la topologie de Chabauty. Une suite de représentations discrètes dans G , converge géométriquement, lorsque la suite de $D(G)$ constituée de leur image, converge pour la topologie de Chabauty.

Nous nous restreignons maintenant au cas où $G = PSL(2, \mathbb{C}) = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$. On note $D_*(PSL(2, \mathbb{C}))$, ou plus simplement $D_*(I^+(\mathbb{H}^3))$, l'ensemble des sous-groupes discrets sans torsion de $PSL(2, \mathbb{C})$. On munit D_* de la topologie induite par la topologie de Chabauty sur $F(PSL(2, \mathbb{C}))$. On note τ_C cette topologie. On construit une topologie pour les 3-variétés hyperboliques (complètes), en utilisant l'identification de $D_*(I^+(\mathbb{H}^3))$ et de l'ensemble des 3-variétés hyperboliques (complètes), munies d'un repère. Nous ne pouvons pas procéder directement pour les 3-variétés hyperboliques, car la représentation d'holonomie n'est définie qu'au choix d'un repère près.

Nous avons besoin d'introduire les notations qui suivent. Soit $\mathcal{H}$ l'espace des 3-variétés hyperboliques complètes. On note :

$$\mathcal{H}^* = \{(M, x) \in H \times M\}_{/\sim}$$

où $(M, x) \sim (M', x')$ si il existe une isométrie $\phi : M \longrightarrow M'$, telle que $\phi(x) = x'$.

$$\mathcal{H}^{**} = \{(M, x, b)\}_{/\sim}$$

où $M \in \mathcal{H}, x \in M$, et b est une base orthonormale de $T_x M$, et où $(M, x, b) \sim (M', x', b')$ si il existe une isométrie $\phi : M \longrightarrow M'$, telle que $\phi(x) = x'$, et b' est l'image de b par $d\phi_x : T_x M \longrightarrow T_{x'} M'$.

On a les surjections naturelles :

$$\mathcal{H}^{**} \xrightarrow{f_1} \mathcal{H}^* \xrightarrow{f_2} \mathcal{H}$$

Pour définir une topologie géométrique, on utilise le fait célèbre suivant :

Proposition 1.3 *Fixons un point de base z_0 de $\mathbb{H}^3$, et un repère orthonormal b_0 de $T_{z_0} \mathbb{H}^3$. alors l'application :*

$$\Lambda : D_*(I^+(\mathbb{H}^3)) \ni \Gamma \longrightarrow (\mathbb{H}_{/\Gamma}^3, \pi(z_0), d_{z_0} \pi(b_0)) \in \mathcal{H}^{**}$$

(où π désigne l'application de revêtement), est une bijection.

Définition 2 La **topologie géométrique** pour $\mathcal{H}^{**}$, est la topologie τ qui fait de

$$\Lambda : (D_*(I^+(\mathbb{H}^3)), \tau_C) \longrightarrow (\mathcal{H}^{**}, \tau)$$

un homéomorphisme.

Les topologies géométriques pour $\mathcal{H}^*$ et $\mathcal{H}$ sont les topologies les plus fines, pour lesquelles f_1 et f_2 sont continues.

Remarques : – Il faut garder à l'esprit, qu'avec cette topologie, une suite $(M_n)_n$ de $\mathcal{H}$ converge vers M_0 , si et seulement si il existe $(x_n)_n$ tel que la suite (M_n, x_n) de $\mathcal{H}^*$ converge vers (M_0, x_0) , si et seulement si il existe $(x_n)_n$, et $(b_n)_n$ tels que la suite (M_n, x_n, b_n) de $\mathcal{H}^{**}$ converge vers (M_0, x_0, b_0) .
– On peut montrer que munis de ces topologies, $\mathcal{H}^{**}$ est localement compact et Hausdorff, $\mathcal{H}^*$ est Hausdorff, alors que $\mathcal{H}$ n'est pas Hausdorff.

2 Caractérisation géométrique

Nous commençons par donner une caractérisation forte de la convergence géométrique. Soient $x, y \in \mathbb{H}^3$, on note $P_{y,x} : T_y \mathbb{H}^3 \longrightarrow T_x \mathbb{H}^3$, le transport parallèle le long du segment $[y, x]$, c'est à dire la valeur de la différentielle en y , de l'isométrie hyperbolique d'axe (x, y) , qui se décompose en une translation qui envoie y sur x , et une rotation d'axe (x, y) d'angle 0.

Soit K un compact de $\mathbb{H}^3$, et f, g des applications C^∞ sur un voisinage de K . On note d_n la n -ième différentielle, et pour $x \in K$, et $n \geq 1$, on considère l'application suivante :

$$P_{f(x),x} \circ d_n f(x) - P_{g(x),x} \circ d_n g(x)$$

On peut définir une distance entre f et g sur K , par :

$$D(f, g)_K = \max_{x \in K} d(f(x), g(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \min\{1, \max_{x \in K} \|P_{f(x),x} \circ d_n f(x) - P_{g(x),x} \circ d_n g(x)\|\}$$

On peut vérifier le résultat suivant :

Proposition 2.1 *Pour toute boule fermée $\overline{B}$, la topologie induite par $D_{\overline{B}}$ sur $I^+(\mathbb{H}^3) = PSL(2, \mathbb{C})$ est équivalente à la topologie usuelle.*

Soient $(M, x_0, b) \in \mathcal{H}^{**}$, et $R, \varepsilon > 0$, on définit $V((M, x_0, b), R, \varepsilon)$ comme l'ensemble des variétés $(N, y_0, c) \in \mathcal{H}^{**}$ vérifiant les propriétés suivantes. Si

$$\pi_M : (\mathbb{H}^3, z_0) \longrightarrow (M, x_0) \quad \pi_N : (\mathbb{H}^3, z_0) \longrightarrow (N, y_0)$$

sont les applications de revêtement données par la proposition 1.3, Il existe une application f , lisse dans un voisinage U de $\overline{B(z_0, R)} \subset \mathbb{H}^3$, à valeur dans $\mathbb{H}^3$, telle que :

- (i) $f(z_0) = z_0$
- (ii) f est équivariante, *i.e.*

$$\forall z_1, z_2 \in U, \quad \pi_M(z_1) = \pi_M(z_2) \iff \pi_N(f(z_1)) = \pi_N(f(z_2))$$

- (iii) $D(f, Id)_{\overline{B(z_0, R)}} < \varepsilon$

On définit la topologie τ_G sur $\mathcal{H}^{**}$ comme la topologie admettant comme sous-base la classe des ensembles de la forme $V((M, x_0, b), R, \varepsilon)$. On peut démontrer que $\{V((M, x_0, b), R, \varepsilon) \mid R, \varepsilon > 0\}$ est une base de voisinage de (M, x_0, b) dans $(\mathcal{H}^{**}, \tau_G)$.

Proposition 2.2 *La topologie τ_G sur $\mathcal{H}^{**}$ est équivalente à la topologie géométrique.*

Afin de mieux appréhender la signification géométrique de cette convergence, remarquons que la boule centrée en x_0 , de rayon R dans M est l'image par π_M de la boule de centre z_0 et de rayon R , et que par équivariance, f passe au quotient en une application ϕ définie sur $B(x_0, R) \subset M$, à valeurs dans N , qui est k -bilipschitz, où k ne dépend que de ε , et $k(\varepsilon) \rightarrow 1^+$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. L'application ϕ envoie x_0 sur y_0 et b près de c , dans un sens fort.

Remarquons de plus que l'on peut montrer que si f est une application lisse sur un voisinage de $\overline{B} = \overline{B(z_0, R)}$, telle que $f(z_0) = z_0$ et $D(f, Id)_{\overline{B}} < \varepsilon$, alors pour ε suffisamment petit f^{-1} est bien définie et lisse sur un voisinage de $\overline{B'} = \overline{B(z_0, R')}$, et $D(f^{-1}, Id)_{\overline{B'}} < \varepsilon'$, pour ε', R' ne dépendant que de R et ε , et vérifiant $R' \rightarrow R$ et $\varepsilon' \rightarrow 0$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

On peut utiliser f et f^{-1} pour montrer qu'il existe $R > 0$, tel que $B(x_0, R) \subset M$ et $B(y_0, R) \subset N$ sont $(k, 0)$ -quasi-isométriques, avec k qui ne dépend que de ε , et $k \rightarrow 1^+$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cela permet d'introduire une définition (à priori plus faible) d'une topologie sur $\mathcal{H}^{**}$. Il s'avère (cf. [CEG]) que la topologie obtenue est encore équivalente à la topologie géométrique. Ainsi on aurait pu adopter une définition plus faible. Cependant, il est important de garder à l'esprit que ces applications bilipschitziennes, sont en fait induites par des applications équivariantes C^∞ -proches de l'identité sur $B(z_0, R)$.

3 Interprétation topologique de la convergence

Nous nous restreignons dans cette partie, au cas des variétés hyperboliques de volume fini. Nous rappelons le fait célèbre suivant (cf. [Ra]).

Proposition 3.1 *Une variété hyperbolique M , est de volume fini, si et seulement si ∂M est soit vide, soit une réunion de tores.*

Nous noterons respectivement $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*, \mathcal{F}^{**}$, les restrictions de $\mathcal{H}, \mathcal{H}^*, \mathcal{H}^{**}$, aux variétés hyperboliques de volume fini. C'est à dire, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des 3-variétés hyperboliques de volume fini, $\mathcal{F}^*$ l'ensemble des 3-variétés hyperboliques de volume fini munies d'un point de base, et $\mathcal{F}^{**}$ l'ensemble des 3-variétés hyperboliques munies d'un point de base x et d'un repère orthonormal de leur espace tangent en x . On munit ces ensembles des topologies induites par $\mathcal{H}, \mathcal{H}^*, \mathcal{H}^{**}$.

Si M est une 3-variété hyperbolique complète, on peut fixer un repère, de façon à ce que $M = \Lambda(\Gamma)$ avec les notations de la proposition 1.3. Rappelons que pour $\varepsilon > 0$ donné, on définit la partie épaisse de M , notée $M_{[\varepsilon, \infty]}$, comme l'image par π_M de $\{x \in \mathbb{H}^3 \mid \forall \gamma \in \Gamma, d(x, \gamma.x) \geq \varepsilon\}$. La partie fine de M , notée $M_{[0, \varepsilon]}$, est le complémentaire de $M_{[\varepsilon, \infty]}$ dans M . Il existe une constante uniforme (sur l'ensemble

des 3-variétés hyperboliques), μ , appelée constante de Margulis, telle que si $\varepsilon < \mu$, alors $M_{[0,\varepsilon]}$ consiste en un nombre fini de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps et de tubes de Margulis (cf. [Ra]).

Proposition 3.2 *Soit (M_n, x_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}^*$, convergeant vers $(M_0, x_0) \in \mathcal{F}^*$. Alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, et pour $n \gg 0$, $x_n \in M_{n[\varepsilon, \infty]}$. Soit un $\varepsilon > 0$ fixé ; alors pour $n \gg 0$, il existe :*

- Une suite de réels strictement positifs, $(\sigma_n)_n$, t.q. $\sigma_n \longrightarrow 0$.
- Une suite de réels, $(k_n)_n$, $k_n > 1$, t.q. $k_n \longrightarrow 1$.
- Pour tout n , une application k_n -bilipschitzienne,

$$\phi_n : M_{0[\varepsilon, \infty]} \longrightarrow M_n$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) ϕ_n est la restriction d'une application lisse sur un voisinage de $M_{0[\varepsilon, \infty]}$; induite par une application équivariante C^∞ proche de l'identité.
- (ii) $f_n(x_0) = x_n$.
- (iii) $M_{n[\varepsilon + \sigma_n, \infty]}$ est contenu dans l'intérieur de $\phi_n(M_{0[\varepsilon, \infty]})$, et $\phi_n(M_{0[\varepsilon, \infty]})$ est contenu dans l'intérieur de $M_{n[\varepsilon - \sigma_n, \infty]}$.

Donnée M , on peut choisir $\alpha(M)$, avec $0 < \alpha(M) < \mu$, suffisamment petit, de façon à ce que pour tout $\varepsilon < \alpha(M)$, la partie ε -fine de M consiste en un nombre $d \geq 0$ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps. Ils sont en correspondance bi-univoque avec les composantes (toriques) de ∂M . En fait, pour $\varepsilon < \alpha(M)$, M est homéomorphe à $M_{[0, \varepsilon]}$.

Pour ε suffisamment petit, et n suffisamment grand, le complémentaire de $\phi_n(M_{0[\varepsilon, \infty]})$ dans M_n , est contenu dans la partie μ -fine de M_n , qui consiste en des $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps et des tubes. Une étude topologique et géométrique simple, permet d'arriver aux résultats suivants :

Théorème 3.1 *Soit $(M_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}^{**}, \mathcal{F}^*$, ou $\mathcal{F}$, convergeant vers M dans le même espace, ayant k $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, alors, pour $n \gg 0$, la partie ε -épaisse de M_n est homéomorphe à M . La suite M_n est partitionnée en $k+1$ sous-suites (éventuellement finies), $(M_n^{(h)})_n$, pour $h = 0 \dots k$, où $M_n^{(h)}$ a $k-h$ $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ -cusps et h tubes dans sa partie fine. De plus la longueur des géodésiques axiales des h tubes tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

On peut remarquer que la suite $(M_n^{(0)})_n$ est stationnaire, égale à M . En particulier, les points de $\mathcal{F}$ correspondant aux variétés fermées, sont isolés.

Sous une version corollaire, on obtient une interprétation topologique de la convergence géométrique.

Corollaire 3.1 *Sous les mêmes hypothèses, pour $n \gg 0$, $M_n^{(h)}$ est obtenu par h obturations de Dehn sur M .*

4 Convergence de représentations

Par définition, la suite $(M_n)_n$ de $\mathcal{F}$ converge vers $M \in \mathcal{F}$ si il existe une suite $(M_n, x_n, b_n)_n$ de $\mathcal{F}^{**}$ qui converge vers (M, x_0, b_0) . Si l'on note $\Gamma_n = \Lambda^{-1}((M_n, x_n, b_n))$ et $\Gamma = \Lambda^{-1}(M, x_0, b_0)$, alors par définition de la convergence géométrique, la suite $(\Gamma_n)_n \subset PSL(2, \mathbb{C})$ converge géométriquement vers $\Gamma \in PSL(2, \mathbb{C})$. On désire préciser cette notion de convergence.

Considérons une suite (M_n, x_n) de $\mathcal{F}^*$ convergeant vers (M, x_0) . Alors pour $n \gg 0$, on a le plongement

$$\psi_n : (M, x_0) \longrightarrow (M_n, x_n)$$

donné par le corollaire 3.1, il n'est bien défini, qu'à homotopie près. On considère l'homomorphisme (bien défini),

$$\psi_{n*} : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow \pi_1(M_n, x_n)$$

Puisque $M_n \setminus \psi_n(M)$ est constitué de tores solides, avec le théorème de Van-Kampen, ψ_{n*} est surjectif, et son noyau est normalement engendré par les classes des pentes de chirurgies.

Pour tout n , on a (donné b_n), la représentation d'holonomie,

$$p_n : \pi_1(M_n, x_n) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

dont l'image est Γ_n . On considère (donné b_0), la représentation d'holonomie,

$$P : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

dont l'image est Γ . La suite $(\Gamma_n)_n$ converge géométriquement vers Γ . On construit la suite de représentations (non fidèles) $(P_n)_n$,

$$P_n : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

en posant $P_n = p_n \circ \psi_{n*}$.

Proposition 4.1 *Soit $(M_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{F}^{**}$, convergeant vers M . La suite $(P_n)_n$, converge algébriquement vers P . C'est à dire, que pour tout élément $\gamma \in \pi_1(M, x_0)$, la suite $(P_n(\gamma))_n$ converge vers $P(\gamma)$ dans $PSL(2, \mathbb{C})$.*

On savait déjà que pour $\gamma \in \pi_1(M, x_0)$, il existe une suite $(\gamma_n)_n$ où $\gamma_n \in \Gamma_n = P_n(\pi_1(M, x_0))$ qui converge vers $P(\gamma)$. Cette proposition montre, que la suite $(P_n(\gamma))_n$ converge vers $P(\gamma)$.

Démonstration Considérons une suite $((M_n, x_n, b_n))_n$ de $\mathcal{F}^{**}$ convergeant vers $((M, x_0, b_0))$. Fixons un repère de $\mathbb{H}^3$, et considérons les applications de revêtement données par la proposition 1.3,

$$\pi : (\mathbb{H}^3, z_0) \longrightarrow (M, x_0)$$

$$\pi_n : (\mathbb{H}^3, z_0) \longrightarrow (M_n, x_n)$$

et les représentations d'holonomie associées,

$$P : \pi_1(M, x_0) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

$$p_n : \pi_1(M_n, x_n) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

Comme précédemment, on note $\Gamma_n = p_n(\pi_1(M_n, x_n))$, et $\Gamma = P(\pi_1(M, x_0))$.

Soit $\gamma \in \Gamma$, on pose $R > 2d(z_0, \gamma.z_0)$. Soit $\tilde{\gamma}$ un arc géodésique de z_0 à $\gamma.z_0$. Alors $\pi(\tilde{\gamma})$ est un lacet fermé basé en x_0 , de classe c dans $\pi_1(M, x_0)$, et $\gamma = P(c)$. Pour tout n , il existe une application f_n définie sur un voisinage de $\overline{B(z_0, R)}$, à valeur dans $\mathbb{H}^3$, équivariante, proche de l'identité, qui fixe z_0 . Posons $\tilde{\gamma}_n = f_n(\tilde{\gamma})$; alors, par équivariance, $\pi_n(\tilde{\gamma}_n)$ est un lacet fermé de M_n , basé en x_n . Notons c_n sa classe dans $\pi_1(M_n, x_n)$, et $\gamma_n = p_n(c_n)$. Alors, on vérifie sur un voisinage de z_0 ,

$$f_n \circ \gamma = \gamma_n \circ f_n$$

et puisque $f_n \longrightarrow Id$; $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ sur $\overline{B(z_0, R)}$ pour la topologie C^∞ , et donc, avec la proposition 2.1, $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ pour la topologie usuelle de $PSL(2, \mathbb{C})$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe R assez grand, tel que $\pi(B(z_0, R)) \supset M_{[\varepsilon, \infty]}$. On prend ε suffisamment petit pour que, $M_{[\varepsilon, \infty]}$ soit homéomorphe à M . Avec les notations du paragraphe précédent, on a un plongement (bilipschitzien), ψ_n de $M_{[\varepsilon, \infty]}$ dans M_n , induit par f_n . Ainsi le lacet $\psi_n(\pi(\tilde{\gamma}))$ est bien défini, et il s'agit en fait du lacet $\pi_n(\tilde{\gamma}_n)$. Remarquons que $c_n = \psi_{n*}(c)$, et qu'alors $P_n(c) = p_n \circ \psi_{n*}(c) = \gamma_n$ converge vers $P(c) = \gamma$. ■

5 Théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston

Dans la section précédente, nous avons déduit des conditions nécessaires, pour qu'une suite de variétés hyperboliques de volume fini converge, mais nous ne nous sommes pas assuré de leur existence. Pour cela, nous disposons du théorème de chirurgie de Thurston.

Rappelons que pour des entiers naturels, on note $p \wedge q = 1$ si, soit p et q sont non nuls, et premiers entre eux, soit l'un est nul, et l'autre est égal à ± 1 . Soit M une 3-variété à bord non vide, et $\mathcal{T} \subset \partial M$ un tore. Une fois fixée une base de $\pi_1(\mathcal{T})$, la classe d'homéomorphisme de la variété obtenue par obturation de Dehn sur $\mathcal{T}$, ne dépend que des coefficients (p, q) de chirurgie ou pente de chirurgie, où $p \wedge q = 1$. Posons que la chirurgie sur $\mathcal{T}$ de coefficient ∞ consiste à retirer la composante au bord $\mathcal{T}$. Posons $D = \{(p, q) | p \wedge q = 1\}$ et $\overline{D} = D \cup \{\infty\}$; $\overline{D}$ peut être vu comme un sous-ensemble de S^2 . En effet D est un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et en considérant la compactification de $\mathbb{R}^2$ en S^2 par projection stéréographique qui envoie le pôle nord sur ∞ , $\overline{D}$ se plonge dans S^2 . Remarquons, qu'avec la topologie usuelle de S^2 , si U est un voisinage de ∞ , alors tous les points de $\overline{D}$, à l'exception d'un nombre fini, sont dans U . On munit $\overline{D}$ de la topologie induite.

Si M a q composantes toriques au bord, $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_q$, une obturation de Dehn (au sens large) sur $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_q$, est déterminée par un élément de $\overline{D}^q = \overline{D} \times \dots \times \overline{D}$. On munit cet espace de la topologie produit.

Théorème 5.1 *Soit M une variété hyperbolique de volume fini, ayant k composantes (toriques) au bord, $k \geq 1$. Il existe un voisinage U de $(\infty, \dots, \infty)$ dans $\overline{D}^k$, tel que si $(d_1, \dots, d_k) \in U$, alors $M_{(d_1, \dots, d_k)}$ est hyperbolique de volume fini. De plus l'ensemble de toutes les 3-variétés hyperboliques obtenues de cette façon, contient des sous-suites non triviales convergeant vers M .*

Remarques : – Par une suite non triviale, nous entendons une suite qui n'est pas stationnaire au bout d'un certain rang.

– La première partie de ce résultat est souvent résumée sous la forme "presque toutes" les 3-variétés obtenues par chirurgie sur une variété hyperbolique sont hyperboliques. Mais attention au sens de "presque toutes". Si M n'a qu'une composante au bord (le complément d'un noeud dans une variété fermée), alors "presque toutes" signifie "toutes sauf un nombre fini" ; mais si M a plusieurs composantes, le complémentaire de U peut être de cardinalité infinie.

Références

- [BP] R.BENEDETTI et C.PETRONIO, *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext, Springer, 1992.
- [CEG] R.CANARY, D.EPSTEIN, et L.GREEN, *Notes on notes of Thurston* in *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space*, London Math. Soc. Lectures Notes **111**, Cambridge University Press (1992), pp. 3–92.
- [Ra] J.RATCLIFFE, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **149**, Springer-Verlag, 1994.
- [Th] W.THURSTON, *The geometry and topology of three-manifolds*, (1980), notes distribuées par l'université de Princeton. Une version électronique est disponible à l'adresse URL : <http://www.msri.org>.

Jean-Philippe Préaux
preaux@cmi.univ-mrs.fr