Les applications

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Définition

Dans tout ce chapitre E, F, G et H désignent 4 ensembles non vides.

Définition

Une application, notée :

$$f : E \longrightarrow F$$

est la donnée de deux ensembles non vides :

– E appelé ensemble de départ,

– F appelé ensemble d'arrivée,

et pour tout $x \in E$, d'une élément de F noté $f(x)$ et appelé image de x par f.

Exemples.

• Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définit pour la donnée de $E \subset \mathscr{D}_f$ et de $F \subset \mathbb{R}$ tel que $f(E) \subset F$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

En effet par construction tout élément $x \in E \subset \mathscr{D}_f$ a pour image par f l'élément $f(x) \in f(E) \subset F$.

• Par exemple :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \ln : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \ln : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$$

sont des applications bien définies, tandis que

$$\ln : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

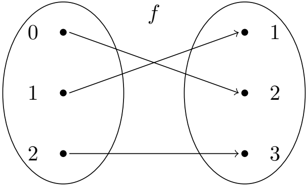
ne le sont pas.

• Dans le cas d'applications réelles, c'est à dire avec pour ensemble de départ et d'arrivée des parties de $\mathbb{R}$, les notions propres aux fonctions réelles, monotonie, stricte monotonie, courbe représentative, etc. conservent leur sens pour les applications.

• Autre exemple :

$$\begin{array}{rcl} f : [\![0,2]\!] & \longrightarrow & [\![1,3]\!] \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{array}$$

définit une application ayant pour ensemble de départ $[\![0,2]\!]$ et pour ensemble d'arrivée $[\![1,3]\!]$. On peut la schématiser par :



Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soit $y \in F$ un élément de l'espace d'arrivée. Un antécédent de y, s'il existe, est un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$, ou autrement dit, pour tout $x \in E$ et $y \in F$:

x est un antécédent de y ssi y est l'image de x

Remarque. Un élément quelconque y de l'espace d'arrivée peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

Exemple : en considérant l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

– Tout élément de $\mathbb{R}_-^*$ n'a aucun antécédent par f. En effet, un carré est toujours positif.

– 0 a pour seul antécédent 0.

– Tout élément $y \in \mathbb{R}_+^*$ a exactement deux antécédents : $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$.

Exemple. Indicatrice d'une partie d'un ensemble.

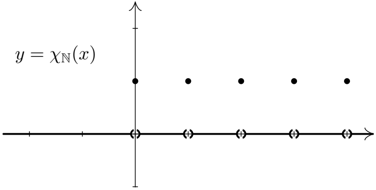
Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit l'indicatrice de A dans E comme l'application :

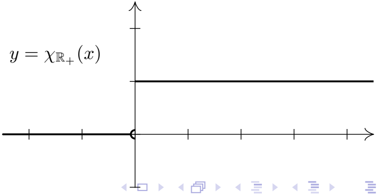
$$\chi_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Les antécédents de 1 sont tous les éléments de A.

Les antécédents de 0 sont tous les éléments de $\complement_E(A)$.

Exemple $\chi_{\mathbb{N}} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ et $\chi_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ ont pour courbe représentative :





Restriction, prolongement d'une application

Définition

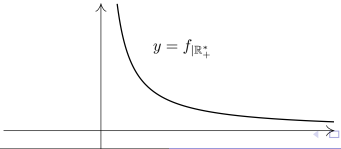
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A une partie de E. La restriction de f à A est l'application :

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple. Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad ; \quad f_{|\mathbb{R}_+^*} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

L'application f n'est pas monotone, tandis que sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$: est strictement décroissante. La courbe représentative de $f_{|\mathbb{R}_+^*}$ est :



Définition

Soit $f : A \longrightarrow F$ une application avec $A \subset E$. Toute application $g : E \longrightarrow F$ telle que :

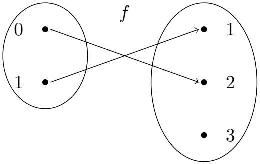
$$\forall x \in A,\ g(x) = f(x)$$

est un prolongement de f sur E.

Remarque. La restriction à A d'un prolongement sur E de $f : A \longrightarrow F$ est f. Par contre il peut y avoir plusieurs prolongement de f sur E, chacun étant uniquement déterminé par ses images dans F des éléments de $E \setminus A$.

Exemple. L'application :

$$f : \{0,1\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



admet trois prolongements sur $[\![0,2]\!]$:

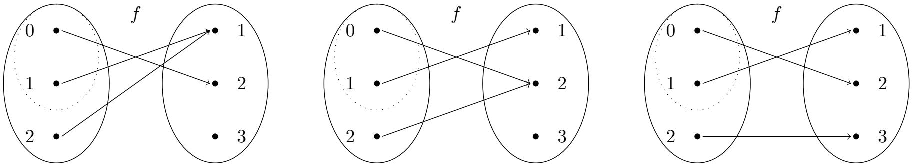


Image directe

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soit $A \subset E$. L'image directe de A par f notée $f(A)$ est définie par :

$$f(A) = \left\{f(x) \mid x \in A\right\} = \left\{y \in F \mid \exists x \in A,\, y = f(x)\right\}.$$

Lorsque $A = E$, $f(E)$ est appelé image directe de f.

Remarque. C'est l'ensemble des images par f des éléments de A. C'est une partie de l'ensemble d'arrivée F.

Remarque. Pour une application réelle f, L'image directe $f(I)$ d'un intervalle I sur lequel f est continue et strictement monotone est facile à déterminer : c'est un intervalle d'après le T.V.I., qui est d'une des formes suivantes :

Intervalle	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$[f(a),\lim_b f[$	$]\lim_b f,f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim_a f,f(b)]$	$[f(b),\lim_a f[$
$]a,b[$	$]\lim_a f,\lim_b f[$	$]\lim_b f,\lim_a f[$

en effet, dans le cas d'un intervalle fermé $[a,b]$:

$$f \text{ strictement croissante sur } [a,b] \implies a \le x \le b \iff f(a) \le f(x) \le f(b)$$

$$f \text{ strictement décroissante sur } [a,b] \implies a \le x \le b \iff f(b) \le f(x) \le f(a)$$

Quant aux autres cas, on les admet pour l'instant ; ils découleront du théorème de la limite monotone (cf. Chapitre "Limites").

Propriété

Si A et B sont deux parties de E :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
$$A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$$

Démonstration.

• ? $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?

Montrons deux inclusions.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in f(A \cup B)$; alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On a :

$$\begin{cases} x \in A \implies y = f(x) \in f(A) \\ \text{ou} \\ x \in B \implies y = f(x) \in f(B) \end{cases} \implies y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \implies y \in f(A) \cup f(B).$$

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in f(A) \cup f(B)$; alors :

$$\begin{cases} y \in f(A) \implies \exists x \in A, y = f(x) \\ \text{ou} \\ y \in f(B) \implies \exists x \in B, y = f(x) \end{cases} \implies \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) \implies f(A \cup B).$$

• ? $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$?

Supposons que $A \subset B$. Soit $y \in f(A)$ un élément quelconque : il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$; mais puisque $A \subset B$, $x \in B$ et donc $y \in f(B)$. Ainsi $f(A) \subset f(B)$.

■

Exercice

1) En considérant $f : x \longmapsto x^2$, $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$, vérifier qu'en général on n'a pas égalité entre $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

2) Montrer qu'en toute généralité une seule des deux inclusions est vraie. Laquelle ? 1) Avec l'exemple donné, il découle aisément des variations de f que $f(\mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$. Ainsi : $f(\mathbb{R}_+) \cap f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$.

D'autre part $f(\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-) = f(\{0\}) = \{0\}$. Ainsi ici $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$; on a seulement ici l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2) Montrons qu'en toute généralité l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est vraie. Soit $y \in f(A \cap B)$: il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Mais puisque $A \cap B \subset A$, $x \in A$, et donc $y \in f(A)$. De même $A \cap B \subset B$, donc $x \in B$ et $y \in f(B)$. Ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$.

Méthode. Pour déterminer l'image directe d'un intervalle $A \subset \mathbb{R}$ par f lorsque f est une application réelle continue et strictement monotone par intervalles.

On décompose A comme réunion d'intervalle sur lesquels f est strictement monotone :

$$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$$

alors

$$\begin{aligned} f(A) &= f(I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n) \\ &= f(I_1) \cup f(I_2) \cup \cdots \cup f(I_n) \end{aligned}$$

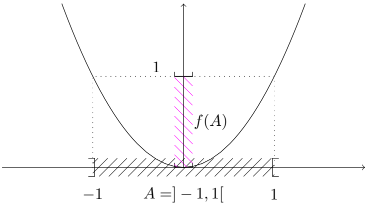
et les intervalles $f(I_1)$, $f(I_2)$, ..., $f(I_n)$ s'obtiennent à partir des variations de f.

Exemple. Lorsque :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

et $A =]-1;1[$; alors $f(A) = [0,1[$; à l'aide du tableau de variation ou de la courbe :

x	-1		0		1
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1



Car :

$$A =]-1;0] \cup [0;1[$$

f est continue et strictement décroissante sur $]-1;0]$, strictement croissante sur $[0;1[$:

$$\left.\begin{array}{r} f(]-1;0] = [f(0);f(-1)[= [0;1[\\ f([0;1[= [f(0);f(1)[= [0;1[\end{array}\right\} \Longrightarrow f(A) = f(]-1;0]) \cup f([0;1[) = [0;1[$$

Exercice Déterminer l'image directe de l'intervalle $[0;3[$ par l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2 \end{array}$$

L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$$

Ainsi $f'(x) \leq 0 \iff x \in [1,2]$, d'où le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↗	3	↘	2	↗	7	↗	$+\infty$

Or f est strictement, croissante sur $[0;1]$, décroissante sur $[1;2]$, croissante sur $[2;3[$, et :

$$f([0;1]) = [-2;3] \quad ; \quad f([1;2]) = [2;3] \quad ; \quad f([2;3[) = [2;7[$$

donc :

$$f([0;3[) = f([0;1]) \cup f([1;2]) \cup f([2;3[) = [-2;3] \cup [2;3] \cup [2;7[= [-2;7[.$$

Composition d'applications

Définition

Soient E, F, G trois ensembles non vides et les deux applications :

$$f: E \longrightarrow F \qquad \text{et} \qquad g: F \longrightarrow G$$

La composée de f par g, notée $g \circ f$ est l'application :

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarque. Schématiquement :

$$\begin{array}{rccccl} g \circ f : & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Exemples.

- Soient :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies et puisque :

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

on obtient :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \quad \text{et} \quad f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

- Soient :

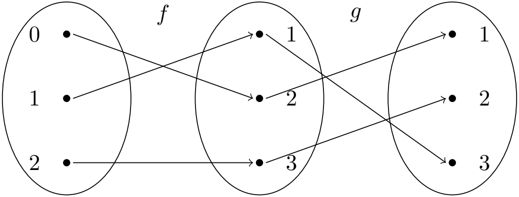
$$f : [\![0,2]\!] \longrightarrow [\![1,3]\!] \qquad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

et

$$g : [\![1,3]\!] \longrightarrow [\![1,3]\!] \qquad x \longmapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Alors $g \circ f$ est bien défini et :

$$g \circ f : [\![0,2]\!] \longrightarrow [\![1,3]\!] \qquad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



Remarque. Plus généralement données les deux applications :

$$f : \ E \longrightarrow F \qquad \text{et} \qquad g : \ G \longrightarrow H$$

dès que :

$$f(E) \subset G$$

on peut définir l'application :

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

comme la composée $g_{|f(E)} \circ \overline{f}$ de $\overline{f}$ par $g_{|f(E)}$ avec :

$$\begin{array}{rrcl} \overline{f} : & E & \longrightarrow & f(E) \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rrcl} g_{|f(E)} : & f(E) & \longrightarrow & H \\ & x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

C'est par abus de notation qu'on la notera plus simplement $g \circ f$.

• Exemple : la composée des deux applications :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array} \quad \text{suivie de} \quad \sqrt{} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

est l'application :

$$\sqrt{\exp} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\exp(x)} \end{array}$$

qui est bien définie puisque $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$.

Injectivité

Dans toute cette partie, $f : E \longrightarrow F$ désigne une application.
Pour tout couple $(x, x') \in E^2$:

$$x = x' \implies f(x) = f(x')$$

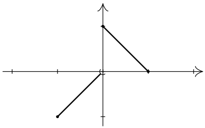
Dans quel cas a-t-on aussi la réciproque ? C'est-à-dire :

$$x = x' \iff f(x) = f(x').$$

On sait que c'est notamment le cas lorsque f est une application réelle strictement monotone. Mais ça peut être aussi le cas pour des applications qui ne sont pas strictement monotone.

Exemple.
Soit :

$$f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{si } \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Alors f est strictement monotone sur $[-1;0[$ et sur $[0;1]$ et

$$f([-1;0[) = [-1;0[\quad \text{et} \quad f([0;1]) = [0;1] \implies f([-1;1]) = [-1;1]$$

Soient $x, x' \in [-1;1]$ tels que $f(x) = f(x')$.

Premier cas : si $f(x) \in [-1;0[$ alors $x, x' \in [-1;0[$ et donc :

$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Deuxième cas : si $f(x) \in [0;1]$ alors $x, x' \in [0;1]$ et donc :

$$f(x) = f(x') \implies 1 - x = 1 - x' \implies x = x'.$$

Ainsi, pour tout $(x, x') \in [-1;1]^2$, $f(x) = f(x') \implies x = x'$.

Définition

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite injective si pour tout $(x, x') \in E^2$:

$$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

Remarque. L'assertion $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ est la contraposée de $f(x) = f(x') \implies x = x'$. Ainsi les applications injectives sont exactement celles pour lesquels $\forall (x, x') \in E^2, x = x' \iff f(x) = f(x')$. Autrement dit :

Pour une application $f : E \longrightarrow F$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- *f est injective,*
- $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$
- $\forall (x, x') \in E^2,\ x = x' \iff f(x) = f(x')$.

Exemples.

• L'application : $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective ; en effet $-1 \neq 1$ tandis que $f(-1) = f(1)$.

• Une application (réelle) strictement monotone est injective, en effet, si $f : E \longrightarrow F$ est, par exemple, strictement croissante :

$$x \neq x' \Longrightarrow \begin{cases} x < x' \\ \text{ou} \\ x' < x \end{cases} \underset{f\nearrow}{\Longrightarrow} \begin{cases} f(x) < f(x') \\ \text{ou} \\ f(x') < f(x) \end{cases} \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

Par exemple $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application injective car strictement croissante.

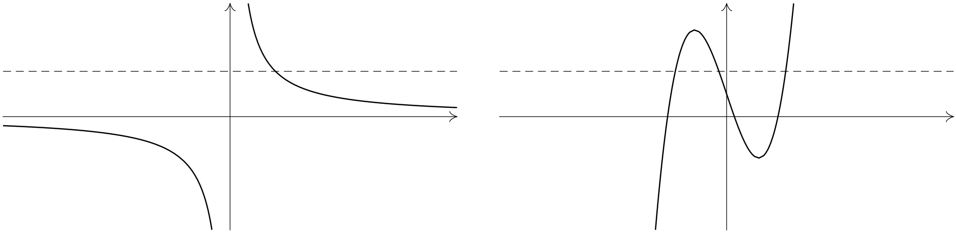
• Une application monotone n'est pas en général injective. Par exemple l'application partie entière : $\lfloor . \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective puisque $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$.

• Toute restriction d'une application injective est injective. Un prolongement d'une application injective n'est pas en général injective.

Remarques. Interprétation graphique pour une application réelle :

$f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si toute droite horizontale intersecte la courbe représentative de f en au plus un point.

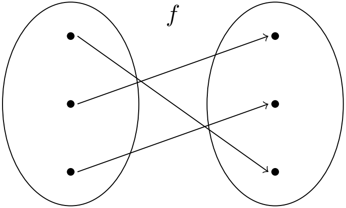
Exemple :



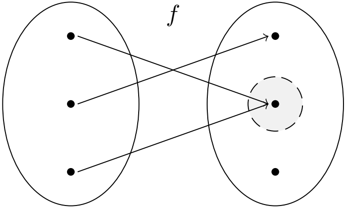
injective   non injective

• Interprétation ensembliste.

$f : E \longrightarrow F$ est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f.



injective



non injective

Propriété

Une application $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si l'équation :

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in E$ et de paramètre $y \in F$, admet pour chaque valeur du paramètre y au plus une solution.

Démonstration. Montrons que les négations des deux assertions sont équivalentes : f n'est pas injective ssi il existe $x_1 \neq x_2$ des éléments de E avec $f(x_1) = f(x_2)$ ssi pour le paramètre $y = f(x_1) \in F$ l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet au moins deux solutions dans E. ∎

Méthode. Pour déterminer si une application $f : E \longrightarrow F$ est injective, on peut considérer l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$, et étudier pour chaque valeur du paramètre $y \in F$, si elle admet au plus une solution.

Exercice

1) Montrer que les applications :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1-x}{1+x} \end{array}$$

sont injectives.

2) Montrer que l'application :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 - x + 1} \end{array}$$

n'est pas injective.

1) Pour f : considérons l'équation :

$$\frac{1}{x} = y \quad : \quad \begin{cases} \text{si } y = 0 : \text{aucune solution} \\ \text{si } y \neq 0 : \text{une unique solution } x = \frac{1}{y} \end{cases}$$

Donc f est injective.

Pour g ; considérons l'équation :

$$\frac{1-x}{1+x} = y \iff 1-x = y(1+x) \iff x(1+y) = 1-y$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{si } y = -1 : \text{aucune solution} \\ \text{si } y \neq -1 : \text{une unique solution } x = \frac{1-y}{1+y} \end{cases}$$

Donc g est injective.

2) Pour h ; considérons l'équation :

$$\sqrt{x^2-x+1} = y \iff \begin{cases} y < 0 : \text{pas de solution} \\ \text{ou} \\ y \geq 0 \text{ et } x^2-x+1 = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y \geq 0 \\ \text{et} \\ x^2-x+1-y^2 = 0 \end{cases}$$

Lorsque $y \geq 0$, le trinôme en x : $x^2-x+1-y^2$ a pour discriminant :

$$\Delta = 1-4+4y^2 = 4y^2-3.$$

En particulier pour $y = 1$, $\Delta > 0$ et l'équation admet donc deux solutions.

Ainsi h n'est pas injective.

Remarque. Il s'avère que pour une application réelle définie et continue sur un intervalle, être injectif est équivalent à être strictement monotone.

Nous n'avons pas encore les outils pour démontrer ce résultat et ne l'utiliserons pas comme argument, même si on peut le garder à l'esprit.

Attention, ce n'est vrai que pour une application réelle, sous l'hypothèse de continuité, et sur un intervalle !

Une composée d'applications injectives est injective :

Propriété

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications injectives. Alors la composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une application injective.

Démonstration. La composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bien définie. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \neq y$.

$$\begin{aligned} x \neq y &\Longrightarrow f(x) \neq f(y) && \text{car } f \text{ injective} \\ &\Longrightarrow g(f(x)) \neq g(f(y)) && \text{car } g \text{ injective} \\ &\Longrightarrow g \circ f(x) \neq g \circ f(y) \end{aligned}$$

donc $g \circ f$ est injective. ■

Exercice Les applications suivantes sont-elles injectives ?

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \end{array} \quad ; \quad G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} \end{array}$$

On considère les applications f, g et h de l'exercice précédent, et on utilise les résultats obtenus.

1) L'application F est la composée de g suivie de exp ; g est injective, ainsi que exp (car strictement croissante). Par composition, F est injective.

2) L'application h est la composée de G suivie de f. Ainsi puisque f est injective, si G l'était, h serait injective, ce qui n'est pas le cas. Donc G n'est pas injective.

Surjectivité

On se rappelle que $f : E \longrightarrow F$ est injective ssi tout élément de F admet au plus une antécédent par f.

Définition

Une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f.

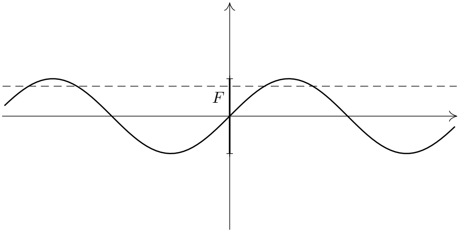
Autrement dit f est surjective si :

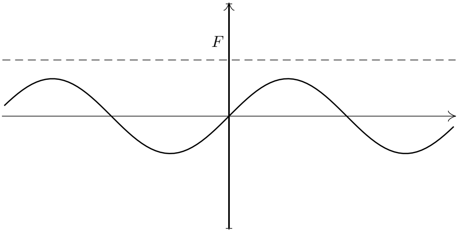
$$f(E) = F.$$

Remarques. Interprétation graphique pour une application réelle :

$f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si toute droite horizontale d'équation $y = a$ avec $a \in F$ intersecte la courbe représentative de f en au moins un point.

Exemple :



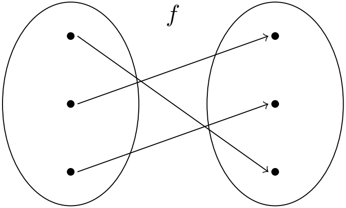


$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$ est surjective

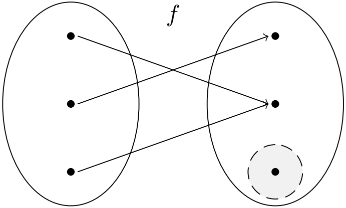
$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective

• Interprétation ensembliste.

$f : E \longrightarrow F$ est surjective si tout élément de F a au moins un antécédent par f.



surjective



non surjective

Remarque. La surjectivité d'une application de dépend que du choix de l'espace d'arrivée. Plus précisément, pour toute application $f : E \longrightarrow F$ on peut construire une application ayant même espace de départ et mêmes images et qui soit de plus surjective :

$$\text{Pour toute application} \quad \begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad ,$$

$$\text{l'application} \quad \begin{array}{rcl} \overline{f} : E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad \text{est surjective}$$

Propriété

Une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si l'équation :

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in E$ et de paramètre $y \in F$, admet pour chaque valeur du paramètre y au moins une solution.

Démonstration. Montrons que les négations des deux assertions sont équivalentes : f n'est pas surjective ssi il existe $y \in F$ n'ayant aucun antécédent par f ssi pour cette valeur du paramètre $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x n'admet aucune solution. ∎

Méthode. Pour déterminer si une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, on peut considérer l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$, et étudier pour chaque valeur du paramètre $y \in F$, si elle admet au moins une solution.

Exercice Déterminer les espaces d'arrivée adéquats pour que chacune des 3 applications suivantes soit surjective :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & \dfrac{1-x}{1+x} \end{array} \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2-x+1} \end{array}$$

Avec les calculs effectués à l'exercice 3, il faut et il suffit :

- Pour f : espace d'arrivée : $\mathbb{R}^*$.
- Pour g : espace d'arrivée : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Pour h : espace d'arrivée : $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$.

Une composée d'applications surjectives est surjective :

Propriété

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications surjectives. Alors la composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une application surjective.

Démonstration. La composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bien définie. Soit $z \in G$ quelconque.

$$\begin{aligned} &\exists y \in F,\ z = g(y) && \text{car } g \text{ surjective} \\ \text{et pour ce } y,\ &\exists x \in E,\ y = f(x) && \text{car } f \text{ surjective} \\ \Longrightarrow\ &\exists x \in E,\ z = g(f(x)) = g \circ f(x) && \end{aligned}$$

Ainsi tout élément de G admet un antécédent par $g \circ f$: $g \circ f$ est surjective. ■

Bijectivité

Définition

Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si tout élément de F a exactement un antécédent par f ; c'est à dire :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x).$$

Exemples.

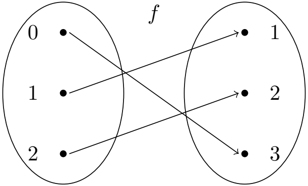
- Si $a \neq 0$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

est bijective : $y \in \mathbb{R}$ a pour seul antécédent $x = \frac{y}{a}$.

- L'application :

$$f : [\![0,2]\!] \longrightarrow [\![1,3]\!]$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



est une bijection :

1 a pour unique antécédent 1
2 a pour unique antécédent 2
3 a pour unique antécédent 0

• *Pour tout ensemble E non vide, l'application :*

$$Id_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

est une bijection appelée l'application identité de E.

Propriété

Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si f est injective et surjective.

Démonstration. Par définition f est bijective si et seulement si tout élément de F admet exactement un antécédent,

$\iff$ tout élément de F a au plus un antécédent
et tout élément de F a au moins un antécédent
$\iff$ f est injective et surjective ∎

La bijectivité d'une application permet de définir son application réciproque :

Proposition-Définition

Si une application

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est bijective, alors on peut définir son application réciproque :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

par :

$$\forall x \in E, \ \forall y \in F, \ f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Démonstration. Lorsque f est bijective l'équation $y = f(x)$ admet pour tout $y \in F$ une unique solution $x \in E$. Noter $x = f^{-1}(y)$ cette solution pour chaque $y \in F$, définit l'application $f^{-1} : F \longrightarrow E$. ■

Exemples.

- Soit $a \neq 0$; l'application bijective :

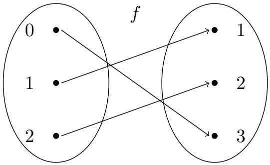
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

a pour application réciproque :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y}{a} \end{array}$$

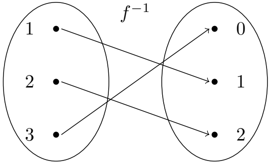
- L'application bijective :

$$\begin{array}{rccl} f : [\![0,2]\!] & \longrightarrow & [\![1,3]\!] \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{array}$$



a pour bijection réciproque :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : [\![1,3]\!] & \longrightarrow & [\![0,2]\!] \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases} \end{array}$$



- L'application identité est sa propre application réciproque :

$$Id_E^{-1} = Id_E.$$

Exercice Montrer que l'application :

$$f :]1;+\infty[\longrightarrow]1;+\infty[$$
$$x \longmapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

est bijective et déterminer son application réciproque.

Soit $y \in]1;+\infty[$, résolvons l'équation d'inconnu $x \in]1;+\infty[$:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = y \iff \frac{x+1}{x-1} = y^2 \iff x(y^2-1) = 1+y^2 \iff x = \frac{1+y^2}{y^2-1} > 1$$

Ainsi f est bijective et sa bijection réciproque est :

$$f :]1;+\infty[\longrightarrow]1;+\infty[$$
$$x \longmapsto \frac{y^2+1}{y^2-1}$$

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Son application réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi bijective et a pour application réciproque :

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Démonstration. Puisque f^{-1} est définie par :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

l'équation $x = f^{-1}(y)$ d'inconnue y admet pour toute valeur du paramètre $x \in E$ une unique solution $y = f(x) \in F$; ainsi $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est bijective de réciproque f. ■

Remarque. Ainsi f^{-1} s'appelle aussi <u>bijection réciproque de f.</u>

Une composée d'applications bijective est bijective :

Propriété

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications bijectives ; leur composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration. Les applications f et g sont injectives et surjectives. Leur composée $g \circ f$ est donc injective et surjective, et donc bijective.

De plus pour tout $x \in E$ et $z \in G$:

$$\begin{aligned} z = g \circ f(x) &\iff z = g(f(x)) \\ &\iff f(x) = g^{-1}(z) && \text{car } g \text{ bijective, } z \in G \text{ et } f(x) \in F \\ &\iff x = f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right) && \text{car } f \text{ bijective, } g^{-1}(z) \in F \text{ et } x \in E \\ &\iff x = f^{-1} \circ g^{-1}(z) \end{aligned}$$

donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

On peut toujours composer une bijection et sa bijection réciproque ; on obtient une application identité :

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Alors :

$$f^{-1} \circ f = Id_E \qquad ; \qquad f \circ f^{-1} = Id_F$$

Démonstration. Les composées $f^{-1} \circ f = E \longrightarrow E$ et $f \circ f^{-1} : F \longrightarrow F$ sont bien définies.

Soit $y \in F$ et $x \in E$ tels que $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$,

$$\Longrightarrow f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y \Longrightarrow \ f \circ f^{-1} = Id_F$$
$$\text{et } f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x \Longrightarrow \ f^{-1} \circ f = Id_E$$

■

La réciproque est aussi vraie :

Propriété

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ tel que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Démonstration. Soit $y \in F$ quelconque, montrons que l'équation (E), $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in E$, et que cette solution est $x = g(y)$.

$$(E) \ : \ y = f(x) \implies g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = Id_E(x) = x$$

Donc si (E) admet une solution, ce ne peut être que $x = g(y)$. Vérifions que $g(y)$ est solution de (E) :

$$f(g(y)) = f \circ g(y) = Id_F(y) = y$$

Ainsi (E) admet $x = g(y)$ comme unique solution. Ainsi f est bijective, et puisque :

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

l'application réciproque est $f^{-1} = g$. ∎

Méthode. Pour montrer que $f : E \longrightarrow F$ est bijective :

• Soit montrer séparément que f est injective et surjective.

• Soit montrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ et de paramètre $y \in F$ admet toujours une unique solution.

• Soit montrer l'existence de $g : F \longrightarrow E$ tel que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
(Attention les deux conditions sont nécessaires.)

Toute application injective $f : E \longrightarrow F$ permet de définir une bijection $\overline{f} : E \longrightarrow f(E)$ par $\overline{f}(x) = f(x)$. On dira que f réalise une bijection de E vers $f(E)$. Plus généralement :

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, et A une partie non vide de E, B une partie non vide de F.

Si :

– la restriction $f_{|A}$ de f à A est injective, et

– $f(A) = B$,

alors on dit que <u>f réalise une bijection de A vers B</u>.

Dans ce cas, l'application :

$$\begin{array}{cccc} \overline{f}: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est bijective.

Exemple. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est ni bijective, ni injective, ni surjective.

Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$, mais aussi de $\mathbb{R}_-$ vers $\mathbb{R}_+$, et de $[1;2]$ vers $[1;4]$, etc.

Rappelons que les courbes représentatives d'une application réelle bijective et de son application réciproque sont symétriques l'une de l'autre (cf. Chapitre 8 : "Fonctions usuelles").

Propriété

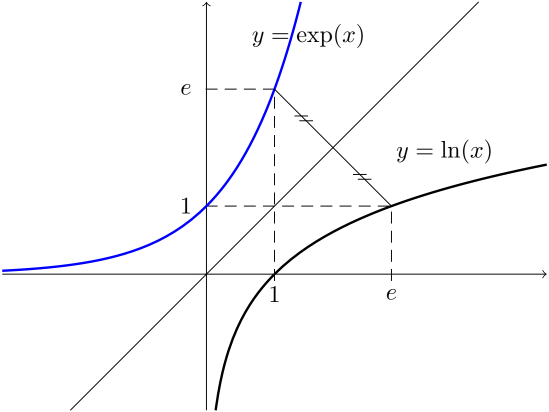
Soient E et F des parties non vides de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F$ une application bijective.

Alors les courbes représentatives de f et de sa bijection réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemples.

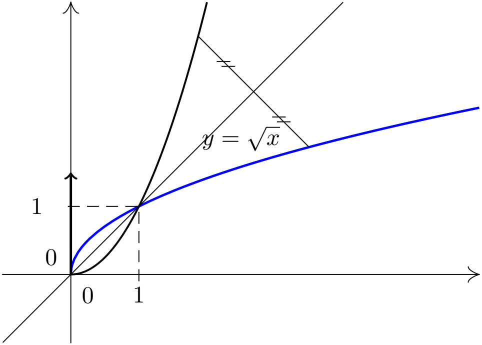
- Pour les bijections :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$



- Pour les bijections :

$$X^2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$



- Pour les bijections :

$$\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$