Cours : Continuité de fonction

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Fonction continue en un point

Dans ce cours toutes les fonctions et applications sont réelles, c'est-à-dire définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

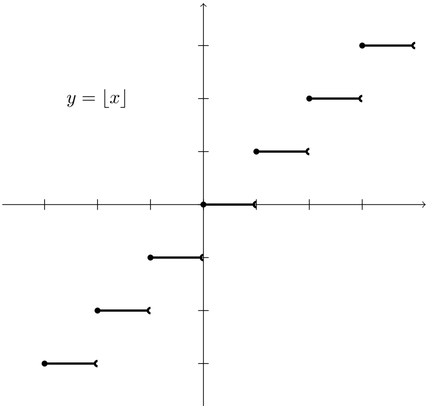
Définition

Soient I un intervalle, x_0 un élément de I et f une fonction définie sur I. On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque. Si f n'est pas continue en x_0, on dit que f est discontinue en x_0.

Exemple.

La fonction partie entière est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et discontinue en tout $x_0 \in \mathbb{Z}$ (cf. Chapitre "Limites de fonctions") :



Prolongement par continuité

Définition

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application ; si f n'est pas définie en x_0 mais admet une limite finie $\lim\limits_{x_0} f \in \mathbb{R}$ en x_0, alors le prolongement de f par continuité en x_0 est l'application :

$$\begin{array}{rcl} \overline{f} : D \cup \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ f(x_0) = \lim\limits_{x_0} f & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

On dit alors que f se prolonge par continuité en x_0.

Exemples.

- L'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$$

se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$:

Exemples

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

- L'application

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

n'est pas prolongeable par continuité en 0 ; en effet $\lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Exercice. Les applications suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{|x|}{x} \end{array}$$

Résolution.

- L'application f a pour limite $\frac{1}{2}$ en 0 ; elle se prolonge donc par continuité en :

$$\begin{array}{rccl} \overline{f} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

- L'application

$$\begin{array}{rccl} g : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

n'est pas prolongeable par continuité en 0 ; en effet : $\lim\limits_{0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$ et $\lim\limits_{0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$.

Continuité à droite et à gauche

Définition

Sous les mêmes hypothèses que dans la définition 1 :

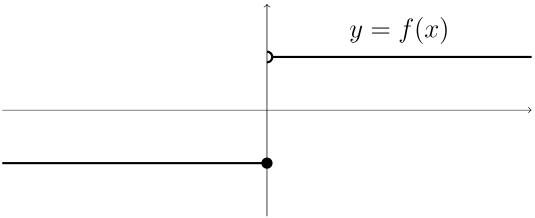
- *On dit que f est <u>continue à droite en x_0</u> si* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- *On dit que f est <u>continue à gauche en x_0</u> si* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Remarque. Lorsque x_0 est une extrémité de l'intervalle I, f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite ou à gauche en x_0.

Exemple

Exemple. L'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$



est continue à gauche en 0 mais n'est pas continue à droite en 0. Bien sûr elle n'est pas continue en 0.

Propriété

Sous les même hypothèses, si x_0 n'est pas une extrémité de I, alors f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la définition et de la propriété (cf. Chapitre "Limites de fonctions") :

$$\lim_{x \to x_0} f = f(x_0) \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} f = f(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f = f(x_0) \end{cases}$$

■

Exemples

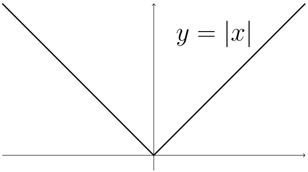
Exemples.

- L'application valeur absolue :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

est continue en 0 puisque :

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = 0 = \lim_{x\to 0^-} |x|.$$

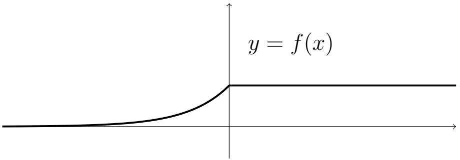


Exemples

Exemples.

- L'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$



est continue en 0 ; en effet :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 = f(0)$$

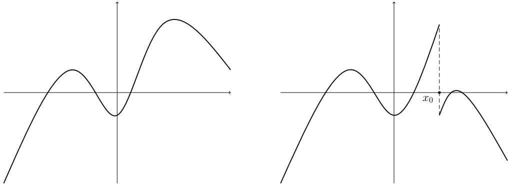
Fonction continue sur un intervalle

Définition

Une fonction f est <u>continue sur un intervalle I</u> si elle est continue en tout $x_0 \in I$.
On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Remarque. Interprétation géométrique.

Informellement, f est continue sur I s'interprète graphiquement par : "la courbe représentative de f au-dessus de I peut être tracé continument, c'est-à-dire sans lever le stylo."



Continue — Discontinue en x_0

Propriétés

Propriété

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- *Somme. Si f et g sont continues sur I alors $f+g$ est continue sur I.*
- *Multiplication par un scalaire. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, si f est continue sur I alors (λf) est continue sur I.*
- *Produit. Si f et g sont continues sur I alors $f \times g$ est continue sur I.*
- *Quotient. Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule par sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.*
- *Composition. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I.*

Démonstration. Découle des effets de ces opérations sur les limites (cf. chapitre "Limites de fonctions"). ■

Remarques

Remarque. En considérant $I = [x_0, x_0] = \{x_0\}$, le résultat est vrai en particulier, en un point x_0.

Remarque. À l'exception de partie entière $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, toutes les fonctions usuelles sont continues sur tout intervalle dans leur domaine de définition.
Pour un polynôme ou une fraction rationnelle, cela découle de la propriété précédente et de la continuité de l'identité $x \longmapsto x$ et de toute fonction constante $x \longmapsto c$ (cf. chapitre "Limites de fonctions"). Pour $x \longmapsto |x|$ ça découle aussi de sa continuité en 0 établie ci-dessus.
Pour exp, ln, sin, cos, tan cela découle du fait qu'une application dérivable sur I est continue sur I (admis pour l'instant, cf. chapitre "Dérivabilité").

Exercice. Les applications suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \quad ; \quad g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Résolution.

• Les fonctions ln, sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc continues. Par composition $x \longmapsto \ln(1+x)$ est continue sur son ensemble de définition $]-1; +\infty[$. Ainsi les restrictions $f_{|\mathbb{R}_+}$ de f à $\mathbb{R}_+$ et $f_{|\mathbb{R}_-^*}$ de f à $\mathbb{R}_-^*$ sont des applications continues. Cela signifie notamment que f est continue à droite en 0 ; est-elle continue en 0 ; c'est-à-dire est-elle aussi continue à gauche en 0 ?

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sin(x) = \sin(0) = 0 = f(0)$$

Ainsi f est aussi continue à gauche en 0, et donc continue en 0 ; en conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour les raisons évoquées ci-dessus, les restrictions $g_{|\mathbb{R}_+}$ de g à $\mathbb{R}_+$ et $g_{|\mathbb{R}_-^*}$ de g à $\mathbb{R}_-^*$ sont des applications continues. Cela signifie notamment que g est continue à droite en 0 ; est-elle continue en 0, c'est-à-dire est-elle aussi continue à gauche en 0 ?

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \cos(x) = \cos(0) = 1 \neq g(0)$$

Ainsi g n'est pas continue à gauche en 0 ; en conclusion, g est continue sur $\mathbb{R}^*$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en $x_0 \in D$ et (u_n) une suite à valeur dans D. Alors :

$$\lim u_n = x_0 \implies \lim f(u_n) = f(x_0).$$

Démonstration. Découle du théorème de composition des limites :

$$\left.\begin{array}{l} \lim u_n = x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{array}\right\} \implies \lim f(u_n) = f(x_0).$$

■

Exemple.

Exemple. L'indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

est discontinue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

En effet :

– Si $x_0 \in \mathbb{Q}$: la suite $u_n = x_0 + \dfrac{\pi}{n}$ est une suite d'irrationnels qui tend vers x_0. Ainsi $\chi_{\mathbb{Q}}(x_0) = 1$, tandis que $u_n \longrightarrow x_0$ et $\chi_{\mathbb{Q}}(u_n) = 0 \longrightarrow 0$; ainsi $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x_0.

–Si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ la suite des approximation par défaut de x_0 à la n-ième décimale :

$$u_n = \frac{\lfloor 10^n \times x_0 \rfloor}{10^n}$$

est une suite de rationnels qui tend vers x_0 ; en effet :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 &\implies x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \\
&\implies 10^n x_0 - 1 < \lfloor 10^n \times x_0 \rfloor \leq 10^n x_0 \\
&\underset{\times 10^{-n} > 0}{\implies} x_0 - \frac{1}{10^n} < u_n \leq x_0 \\
&\implies \lim u_n = x_0 \quad \text{d'après le théorème des gendarmes}
\end{aligned}$$

Ainsi $\chi_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$ tandis que $u_n \longrightarrow x_0$ et $\chi_{\mathbb{Q}}(u_n) = 1 \longrightarrow 1$. Donc $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en x_0.

Exercice. Soient :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \quad ; \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0, tandis que g l'est.

Résolution.

• Pour f : en considérant la suite $u_n = \frac{1}{n\pi} \longrightarrow 0$:

$$f(u_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n \quad \text{n'a pas de limite.}$$

Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

- Pour g : On a l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ -1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ -x \leq x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ x \leq x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x \end{cases}$$

et donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$; ainsi g est prolongeable par continuité en 0, en posant $g(0) = 0$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ telle que :

$$f(a) \times f(b) \leqslant 0$$

Alors f admet une racine sur l'intervalle $[a, b]$, i.e. $\exists x \in [a, b],\ f(x) = 0$.

Démonstration. Détaillée au §2.5 ■

Remarque. Le théorème justifie de l'existence d'une racine pour une application réelle f sur un intervalle $[a, b]$ aux deux conditions que :

- f soit continue,
- $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes différents.

Remarque. Il n'y a en général pas unicité de la racine.
Par contre si f est de plus strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$ alors la racine est bien unique.

Exercice. Justifier que l'équation :

$$\tan(x) = \cos(x) \qquad (E)$$

admet une solution sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ (on ne demande pas de calculer cette solution). Sur cet intervalle, la solution est-elle unique ?

Résolution. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \tan(x) - \cos(x)$; elle est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (notamment) et est continue comme somme de fonctions continues. Or :

$$f(0) = \tan(0) - \cos(0) = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} > 0$$

Ainsi d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Cette solution est unique sur cet intervalle ; en effet sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, tan est strictement croissante, cos est strictement décroissante, et donc f, comme somme de fonctions strictement croissantes, est strictement croissante.

Corollaire

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et soit f continue sur $[a, b]$. Si y_0 est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe (au moins) un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y_0$.

Démonstration. Appliquons le T.V.I. à $g = f - y_0$; g est continue sur $[a, b]$ (par somme) et $g(a) = f(a) - y0$, $g(b) = f(b) - y_0$;
or par hypothèse y_0 est entre $f(a)$ et $f(b)$ et donc $g(a)$ et $g(b)$ ont des signes opposés. D'après le T.V.I., il existe $c \in [a, b]$ tel que
$g(c) = f(y) - y_0 = 0 \implies f(c) = y_0$. ∎

Image d'un intervalle par une application continue

Théorème

L'image $f(I)$ d'un intervalle I par une application continue f est un intervalle

Démonstration. Pour le montrer admettons la caractérisation suivante des intervalles :
une partie J de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tout $(a, b) \in J^2$ avec $a < b$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a \leqslant x \leqslant b \implies x \in J$.

Soit I un intervalle et soient $(\alpha, \beta) \in f(I)^2$: ainsi $\exists (a, b) \in I^2$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$; supposons aussi sans perte de généralité que $a < b$. Soit $y \in \mathbb{R}$ compris entre α et β. D'après le corollaire 5 appliqué à f restreinte à $[a, b]$, $\exists x \in [a, b] \subset I$, $y = f(x)$. Donc $y \in f(I)$. Il découle de la caractérisation des intervalles que $f(I)$ est un intervalle. ■

Exercice.

Exercice. Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x)^2.$$

Résolution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} & f(x)(1 - f(x)) = 0 \\ \Longrightarrow\ & f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 1 \end{aligned}$$

Donc $f(\mathbb{R})$ ne peut contenir comme seuls éléments que 0 ou 1. Mais puisque f est continue, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle ; ce ne peut donc être que le singleton $[0,0] = \{0\}$ ou $[1,1] = \{1\}$.
Ainsi f est nécessairement constante égale à 0 ou à 1. Réciproquement une telle application satisfait les conditions données dans l'énoncé.

Lorsque une application continue est en outre strictement monotone sur un intervalle I, l'image $f(I)$ de l'intervalle par f s'obtient à l'aide du résultat très utile suivant :

Propriété

Soit f une application continue et strictement monotone sur un intervalle I ; alors l'image directe $f(I)$ de I par f est l'intervalle donnée dans le tableau suivant selon que $I = [a, b], [a, b[, \ldots,$ et selon le sens de variation de f :

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$	f continue et $\nearrow$	f continue et $\searrow$
$[a, b]$	$\left[f(a), f(b)\right]$	$\left[f(b), f(a)\right]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f, f(a)\right]$
$]a, b]$	$\left]\lim\limits_{a^+} f, f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{a^+} f\right[$
$]a, b[$	$\left]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f\right[$

Démonstration. On ne démontre que deux cas ; la preuve des autres est analogue.

• 1^er^ cas : $I = [a, b]$ et f strictement croissante.

Puisque f est continue, $f(I) = \{f(x) \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ est un intervalle ; or :

$$a \leqslant x \leqslant b \underset{f \nearrow}{\iff} f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

Ainsi $f(I) = [f(a); f(b)]$.

• 2^eme^ cas : $I = [a; b[$ et f est strictement croissante.

Puisque f est continue, $f(I) = \{f(x) \mid a \leqslant x < b\}$ est un intervalle.

D'une part puisque f est strictement croissante :

$$a \leqslant x \underset{f \nearrow}{\iff} f(a) \leqslant f(x)$$

et donc $f(I)$ a pour minimum $f(a)$.

D'autre part, puisque f est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe et est égale à $\sup f([a; b[)$ ou $+\infty$ selon que $f([a; b[)$ soit ou non majoré.

– Premier sous-cas : si $f([a;b[)$ n'est pas majoré, on a bien

$$f([a;b[) = [f(a);+\infty[= \left[f(a), \lim_{b^-} f\right[.$$

– Deuxième sous-cas : si $f([a;b[)$ est majoré, alors :

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f([a;b[)$$

Ainsi l'intervalle $f(I)$ a pour minimum $f(a)$ et pour borne supérieure $\lim_{x\to b^-} f(x)$; il est donc d'une des formes $f(I) = \left[f(a), \lim_{b^-} f\right[$ ou $f(I) = \left[f(a), \lim_{b^-} f\right]$.

Montrons que le deuxième cas ne peut pas survenir ; en effet, autrement il existerait $x_0 \in [a;b[$ tel que $f(x_0) = \lim_{b^-} f = \sup f([a;b[) = \max f([a;b[)$; mais puisque f est strictement croissante, alors pour $x_1 \in]x_0;b[$ quelconque :

$$a \leqslant x_0 < x_1 < b \implies f(x_1) > f(x_0) = \sup f([a;b[)$$

ce qui contredirait le fait que $\sup f([a;b[)$ soit un majorant de $f([a;b[)$ puisque par définition $f(x_1) \in f([a;b[)$. Ainsi $f(I) = \left[f(a), \lim_{b^-} f\right[$. ■

Remarque. Nous avons deja vu que l'image directe d'un intervalle I par une application continue non strictement monotone, peut s'obtenir lorsqu'il est possible de décomposer I en une réunion d'intervalles sur lesquels f est strictement monotone, en appliquant :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

(cf. Chapitre "Applications").

Image d'un segment par une application continue

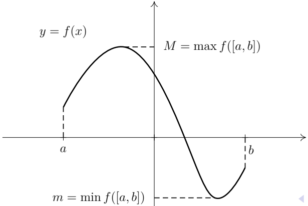
Nous admettrons le résultat suivant. Il s'avère très utile !

Théorème

L'image d'un segment $[a, b]$ (i.e. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$) par une application continue est un segment $[m, M]$ où :

$$m = \min f([a, b]) = \inf_{[a,b]} f \qquad M = \max f([a, b]) = \sup_{[a,b]} f.$$

En d'autres termes, une application continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.



Preuve par dichotomie du T.V.I.

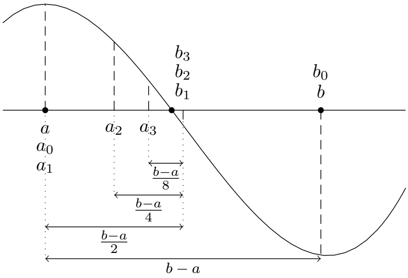
Nous prouvons dans cette partie le théorème des valeurs intermédiaires. Nous procédons par dichotomie afin d'en retirer dans la section suivante un algorithme de calcul approchée de racine d'une fonction.

À prouver :

> Soit f continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) \leqslant 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration. Le preuve par dichotomie consiste à construire les deux suites (a_n) et (b_n) de points de $[a, b]$ par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ m_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{si } f(a_n) \times f(m_n) \leqslant 0 \ : & \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = m_n \end{cases} \\ \text{sinon :} & \begin{cases} a_{n+1} = m_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases} \end{cases}$$



On établit alors :

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent vers une même limite $c \in [a, b]$ qui est une racine de f. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leqslant b_n$$
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$
$$f(a_n) \times f(b_n) \leqslant 0$$

Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition de récurrence.

Initialisation. $\mathscr{P}_0$ est vraie : $a_0 = a \leqslant b = b_0$, $b_0 - a_0 = b - a$ et $f(a_0) \times f(b_0) = f(a) \times f(b) \leqslant 0$.

Hérédité. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ (HR). Soit $m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

Premier cas, si $f(a_n) \times f(m_n) \leqslant 0$: $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m_n$. Alors :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a_n - b_n}{2} \underset{\text{(HR)}}{\leqslant} 0 \implies a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \underset{\text{(HR)}}{=} \frac{b - a}{2 \times 2^n} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

$$f(a_{n+1}) \times f(b_{n+1}) = f(a_n) \times f(m_n) \leqslant 0.$$

Deuxième cas, si $f(a_n) \times f(m_n) > 0$: $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$. Alors :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \underset{\text{(HR)}}{\leqslant} 0 \implies a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \underset{\text{(HR)}}{=} \frac{b - a}{2 \times 2^n} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

$$f(a_{n+1}) \times f(b_{n+1}) = f(m_n) \times f(b_n) \text{ a même signe que } f(a_n) \times f(b_n) \leqslant 0.$$

Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Ceci conclut la récurrence.

Reprenons la démonstration :

$$a_{n+1} - a_n = 0 \text{ et } b_{n+1} - b_n = m_n - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$$

ou

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geqslant 0 \text{ et } b_{n+1} - b_n = 0$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ et $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$: (a_n) est croissante ; (b_n) est décroissante.
Par ailleurs $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant b_n$ et $b_n - a_n = (b-a) \times 2^{-n} \underset{n \mapsto \infty}{\longrightarrow} 0$. Donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. En particulier (a_n) et (b_n) convergent et ont même limite $c \in [a, b]$. Or $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$f(a_n) \times f(b_n) \leqslant 0$$

Puisque f est continue : $\lim f(a_n) = f(c)$, $\lim f(b_n) = f(c)$ et par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus :
$f(c)^2 = f(c) \times f(c) \leqslant 0$. Donc $f(c) = 0$. ∎

Algorithme de recherche d'une racine par dichotomie

La preuve par dichotomie du T.V.I. donne un algorithme de calcul approché d'une racine de fonction ; il consiste à calculer a_n et b_n jusqu'au premier rang n où $|b_n - a_n|$ est inférieur à l'erreur e autorisée. Puisque par construction l'intervalle $[a_n, b_n]$ contient une racine de f, a_n en sera une valeur approchée par défaut, et b_n une valeur approchée par excès, avec une erreur d'au plus e. Plus précisément :

Donnés :

- une application f continue sur un intervalle $[a, b]$ et telle que $f(a) \times f(b) \leqslant 0$
- une marge d'erreur e.

L'algorithme retourne une valeur approchée à e près d'une racine de f sur $[a, b]$, c'est à dire $x \in [a, b]$ tel que l'intervalle $[x - e; x + e] \subset [a, b]$ contienne une racine de f :

• Méthode de recherche d'une racine par dichotomie à e près :

```
TANT QUE b-a > e
    m = (a+b) / 2
    SI f(a) * f(m) <= 0 ALORS :
        a, b = a, m # Dichotomie à gauche
    SINON :
        a, b = m, b # Dichotomie à droite
FIN TANT QUE
RETOURNE (a+b)/2
```

• On peut aussi renvoyer une valeur approchée par défaut à e près d'une racine de f sur $[a, b]$, c'est à dire $x \in [a, b]$ tel que l'intervalle $[x; x + e] \subset [a, b]$ contienne une racine de f :

```
RETOURNE a
```

ou une valeur approchée par excés à e près d'une racine de f sur $[a, b]$, c'est à dire $x \in [a, b]$ tel que l'intervalle $[x - e; x] \subset [a, b]$ contienne une racine de f :

```
RETOURNE b
```

ou encore les deux :

```
RETOURNE [a,b]
```

Code python

```
def dichotomie(f,a,b,e):
    while b-a > e:
        m = (a+b)/2 # milieu
        if f(a)*f(m) <= 0:
            a, b = a, m # Dichotomie à gauche
        else:
            a, b = m, b # Dichotomie à droite
    return (a+b)/2
    #return a # pour une valeur par défaut à e près
    #return b # pour une valeur par excès à e près
    #return [a,b] # pour l'intervalle à e près
```

- Exemple : calcul d'une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

```
In [1] : f = lambda x : x**2-2
In [2] : dichotomie(f,0,3,0.001)
1.4139404296875
```

Le théorème de la bijection

Nous voyons (admettons) dans cette partie que l'application réciproque d'une bijection continue est-elle même continue.

Théorème

Si f est une application continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I vers son image, l'intervalle $J = f(I)$.
De plus son application réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue, strictement monotone et a même monotonie que f.

Exemple. L'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est la primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Ainsi ln est dérivable, donc continue (cf. Chapitre "Dérivabilité") et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ vers l'intervalle $]\lim_{0^+} \ln, \lim_{+\infty} \ln[= \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est aussi continue et strictement croissante d'après le théorème de la bijection.

Le théorème de la bijection

Nous voyons (admettons) dans cette partie que l'application réciproque d'une bijection continue est-elle même continue.

Théorème

Si f est une application continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I vers son image, l'intervalle $J = f(I)$. De plus son application réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue, strictement monotone et a même monotonie que f.

Remarque. Ce résultat est très utile, mais c'est surtout un "fourre-tout" ; on savait déjà établir la plupart de ses conclusions. La seule chose nouvelle, et importante, est la continuité de la bijection réciproque d'une bijection continue. Mais c'est justement le seul point que nous admettrons dans la preuve...

Démonstration. La stricte monotonie de f entraine son injectivité (cf. chapitre "Applications"). Donc f réalise une bijection I sur son image $J = f(I)$. Ainsi $f : I \longrightarrow J$ est bijective. Son application réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est donc bien définie. Puisque f est continue, D'après le TVI (théorème 6), J est un intervalle. Montrons que f^{-1} a même monotonie que f : soient $y_1 \neq y_2$ quelconques dans J et $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Alors :
• si f est strictement croissante :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\iff f(x_1) < f(x_2) \\ y_1 < y_2 &\iff f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

et donc f^{-1} est aussi strictement croissante.
• si f est strictement décroissante :

$$\begin{aligned} x_1 > x_2 &\iff f(x_1) < f(x_2) \\ y_1 < y_2 &\iff f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

et donc f^{-1} est aussi strictement décroissante.
Il reste à montrer la continuité de f^{-1} ; nous l'admettons. ■

Exercice. Montrer que :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$$

est continue et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$. Déterminer son application réciproque f^{-1} et établir la continuité et la stricte monotonie de f^{-1}.

Résolution. l'application est continue, et même dérivable comme composée d'applications dérivables :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{1+x^2} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{\ln} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+x^2 & \longmapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$$

Sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \text{ qui a pour signe } \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \\ = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et son tableau de variation est :

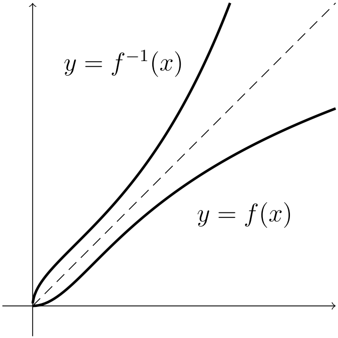
x	0		$+\infty$
			$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	
	0		

f réalise donc une bijection, continue, de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.
d'après le théorème de la bijection $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue et strictement croissante. Déterminons l'expression analytique de $f^{-1}(y)$: résolvons l'équation de paramètre $y \in \mathbb{R}_+$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ suivante

$$\begin{aligned} & y = \ln(1+x^2) \\ \Longrightarrow\ & e^y = \exp(\ln(1+x^2)) \\ \Longrightarrow\ & e^y = 1+x^2 \\ \Longrightarrow\ & x^2 = e^y - 1 \\ \underset{x \geqslant 0}{\Longrightarrow}\ & x = \sqrt{e^y - 1} \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $f^{-1}(y) = x$ est définie :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{e^y - 1} \end{array}$$



Exemple : fonctions $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \longmapsto x^n$ la fonction puissance n-ième. La fonction f_n est dérivable sur son domaine de définition (car polynomiale) avec pour dérivée $f_n' : x \longmapsto nx^{n-1}$.

- **Premier cas.** Lorsque n est pair ; $\forall x > 0, f_n'(x) = nx^{n-1} > 0$. L'application

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

est continue et strictement croissante. Son tableau de variation est :

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline & & & +\infty \\ f_n(x) & & \nearrow & \\ & 0 & & \end{array}$$

f_n réalise donc une bijection, continue, de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de la bijection, sa bijection réciproque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

est continue et strictement croissante.

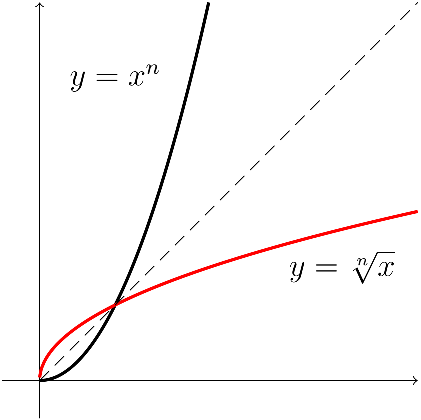
Propriété

Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ est pair la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et continue. Elle est strictement croissante et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Démonstration. Il reste à prouver que $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$. D'après le théorème de la limite monotone $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Par limite d'une composée :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x^n} = L \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} x = L \Longrightarrow L = +\infty.$$

• La courbe représentative de $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ s'obtient à partir de celle de $x \longmapsto x^n$ par une symétrie d'axe $y = x$.



• **Deuxième cas.** Lorsque n est impair ; $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_n'(x) = nx^{n-1} > 0$ (car $(n-1)$ est pair). L'application

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

est continue et strictement croissante. Son tableau de variation est :

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline & & & +\infty \\ f_n(x) & & \nearrow & \\ & -\infty & & \end{array}$$

f_n réalise donc une bijection, continue, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de la bijection, sa bijection réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

est continue et strictement croissante.

Propriété

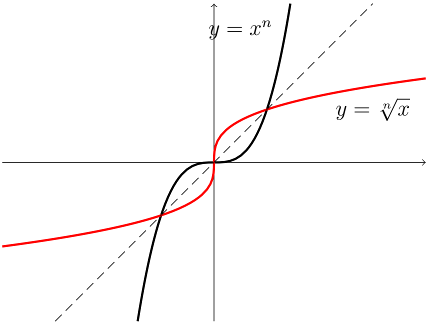
Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ est impair la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et continue. Elle est strictement croissante, impaire et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{x} = \pm\infty$.

Démonstration. L'imparité découle de l'imparité de f_n ; n étant impair, $\forall x \in \mathbb{R} : (-x)^n = (-1)^n \times x^n = -x^n$. En composant par $\sqrt[n]{\ }$:

$$\begin{aligned} & (\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^n = y \iff (-x)^n = -y) \\ \iff & \left(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{y} \iff \sqrt[n]{(-x)^n} = \sqrt[n]{-y}\right) \\ \iff & \left(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x = \sqrt[n]{y} \iff -x = \sqrt[n]{-y}\right) \end{aligned}$$

et donc $\forall\, y \in \mathbb{R}, \sqrt[n]{-y} = -\sqrt[n]{y}$, *i.e.* $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est impaire. Il reste à prouver que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{x} = \pm\infty$. Le même argument que précédemment montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$. Par imparité, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$. ■

- La courbe représentative de $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ s'obtient à partir de celle de $x \longmapsto x^n$ par une symétrie d'axe $y = x$.



- De plus par définition :

  - Si n est pair : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y}$.
  - Si n est impair : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y}$.

Exemple : la fonction arctan

Considérons la restriction $\tan_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ de la fonction tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Sur cet intervalle tan est continue est strictement croissante. Ainsi $\tan_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]\lim_{(-\frac{\pi}{2}^+)} \tan, \lim_{(\frac{\pi}{2}^-)} \tan\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

Propriété

La bijection réciproque de $\tan_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ *est :*

$$\begin{array}{rcl} \arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ y & \longmapsto & \arctan(y) \end{array}$$

où $\arctan(y)$ *est l'unique réel* $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $\tan(x) = y$.

L'application arctan *est continue, strictement croissante et impaire.*

Démonstration. Tous les premiers points découlent du théorème de la bijection. Il reste à prouver l'imparité, elle découle de l'imparité de tan. En composant par arctan :

$$\left(\forall x \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R}, \tan(x) = y \iff \tan(-x) = -y\right)$$

$$\iff \left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R}, \arctan(\tan(x)) = \arctan(y) \right.$$
$$\left. \iff \arctan(\tan(-x)) = \arctan(-y)\right)$$

$$\iff \left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R}, x = \arctan(y) \iff -x = \arctan(-y)\right)$$

et donc $\forall\, y \in \mathbb{R}, \arctan(-y) = -\arctan(y)$, *i.e.* arctan est impaire. ∎

- Valeurs remarquables de arctan :

y	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(y)$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$

- Limites aux bornes :

$$\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2} \qquad ; \qquad \lim_{+\infty} \arctan = +\frac{\pi}{2}$$

- De plus, par définition :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(y)) = y$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) = x$$

$$\forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad \arctan(\tan(x)) \equiv x \ [\pi]$$

• La courbe représentative de arctan s'obtient à partir de celle de $\tan_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ par une symétrie d'axe $y = x$: