Cours : rappels de calcul algébrique

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Ce chapitre préliminaire constitue un rappel des propriétés essentielles de calcul des nombres entiers, rationnels et réels. Il faudra maitriser ces seules propriétés pour calculer correctement, sans calculatrice.

Simple rappel de tout le cursus scolaire, la plupart des preuves y sont admises.

Un résultat :

dans une boite verte correspond à une définition,

dans une boite rouge, à un théorème ;

en gris les exercices d'application.

Les entiers naturels

Définition

L'ensemble des <u>entiers naturels</u>, noté $\mathbb{N}$, est le plus petit ensemble contenant 0, *et contenant le successeur de chacun de ses éléments. Autrement dit :*
Si E est un ensemble tel que :

$$0 \in E \quad \textit{et} \quad (n \in E \Longrightarrow (n+1) \in E)$$

alors $\mathbb{N} \subset E$.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non-nuls.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni de deux opérations : l'addition, notée $+$ et la multiplication, notée $\times$.

Relation d'ordre

L'ensemble des entiers naturels est muni d'une relation d'ordre :

Soient a et b deux entiers naturels ; on note $a \geq b$ (ou $b \leq a$) si il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $a = b + c$; on dit alors que a est plus grand (ou supérieur à) b ou que b est plus petit (ou inférieur à) a.

Remarque. Lorsque $a \geq b$, l'entier c tel que $a = b + c$ est unique ; on définit alors $a - b = c$.

Nous reviendrons dans un prochain chapitre sur la relation d'ordre sur les réels, et donc en particulier sur les entiers ; aussi nous restons pour l'instant succinct sur ses propriétés que nous étudierons en plus grande généralité.

Table de multiplication

Pour savoir calculer, il est essentiel de connaitre ses tables de multiplications :

Exercice 1. Donner toutes les entrées de la table de multiplication (à commutation près), ayant pour résultat :

$18 = 3 \times 6 = 2 \times 9 \quad 21 = 3 \times 7 \quad 28 = 4 \times 7 \quad 24 = 4 \times 6 = 3 \times 8 \quad 56 = 7 \times 8$

$54 = 6 \times 9 \quad 42 = 6 \times 7 \quad 49 = 7 \times 7 \quad 63 = 7 \times 9 \quad 64 = 8 \times 8 \quad 72 = 8 \times 9 \quad 81 = 9 \times 9$

Table de multiplication des 10 premiers entiers naturels

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Diviseurs et multiples

Soient a et b deux entiers naturels ; on dit que a divise b, ou que b est un multiple de a, si il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $b = a \times d$.

Remarque.

1 divise tout entier ; en effet $\forall n \in \mathbb{N}, n = 1 \times n$; 1 n'est multiple que de lui-même.
0 est multiple de tout entier ; en effet $\forall n \in \mathbb{N}, 0 = 0 \times n$; 0 ne divise que lui même.

Exercice 2. Déterminer tous les diviseurs de 60.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.$$

Quelques critères de divisibilité

Soit $n \in \mathbb{N}$, donné son écriture décimale (*i.e.* en base 10) :

- n est divisible par **2** ssi son chiffre des unités est pair (0, 2, 4, 6 ou 8).
- n est divisible par **3** ssi la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- n est divisible par **4** ssi ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4. (Exemple : $1\underline{48}$ est divisible par 4, $1\underline{46}$ n'est pas divisible par 4.)
- n est divisible par **5** ssi son chiffre des unités est 0 ou 5.
- n est divisible par **6** ssi n est divisible par 2 et par 3.

Quelques critères de divisibilité

- n est divisible par **7** ssi en lui supprimant son chiffre des unités et en retranchant 2 fois ce chiffre au nombre obtenu, on obtient un multiple de 7. (Exemple : 301 est divisible par 7 car $30 - 2 \times 1 = 28 = 4 \times 7$; en effet $43 \times 7 = 301$.)
- n est divisible par **8** ssi ses 3 derniers chiffres forment un multiple de 8. (Exemple : $1\underline{048}$ est divisible par 8 car 048 l'est.)
- n est divisible par **9** ssi la somme de ses chiffres est multiple de 9. (Exemple : 27 981 est divisible par 9 car $2 + 7 + 9 + 8 + 1 = 27 = 3 \times 9$.)
- n est divisible par **10** ssi son chiffre des unités est 0.
- n est divisible par **11** ssi les sommes de ses chiffres de rangs pairs et de rangs impairs sont égales. (Ex : 231 est divisible par 11 car $2 + 1 = 3$; $21 \times 11 = 231$.)

Nombres premiers

Un entier naturel n est dit <u>premier</u> si il a exactement deux diviseurs. De manière équivalente, n est premier si et seulement si $n \geqslant 2$ et n a pour seuls diviseurs 1 et lui-même.

Remarque. Crible d'Erathostène

C'est un algorithme pour déterminer si un nombre est premier :

Pour tous les entiers entre 0 et N : barrer 0 et 1, et répéter tant que possible :

Souligner le premier nombre non marqué, et effacer tous ses multiples.

Tous les nombres restants (soulignés) sont les nombres premiers $\leq N$.

Exemple : appliquer le crible d'Erathostène aux entiers ≤ 32 :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
		$\underline{2}$	3		5		7		9		11		13		15		17		19		21		23		25		27		29		31	
		$\underline{2}$	$\underline{3}$		5		7				11		13				17		19				23		25				29		31	
		$\underline{2}$	$\underline{3}$		$\underline{5}$		7				11		13				17		19				23						29		31	
		$\underline{2}$	$\underline{3}$		$\underline{5}$		$\underline{7}$				$\underline{11}$		$\underline{13}$				$\underline{17}$		$\underline{19}$				$\underline{23}$						$\underline{29}$		$\underline{31}$	

Tous les nombres premiers ≤ 32 sont donc : 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31.

Décompositions en facteurs premiers

En fait il est facile d'établir que dès que l'on a dépassé $\sqrt{N}$ (ici $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2} < 6$), tous les entiers restants sont premiers.

On a le résultat fondamental de décomposition en facteurs premiers :

Tout entier naturel $n \geq 2$ se décompose en un produit de nombres premiers ; de plus cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près.

Exercice 3. Décomposer 60 en produit de nombres premiers :

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

PGCD et PPCM

Soient a et b deux entiers naturels.
- Lorsque $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, on appelle plus grand commun diviseur (ou PGCD) de a et b, le plus grand entier naturel qui divise a et qui divise b.
- Lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on appelle plus petit commun multiple (ou PPCM) de a et b, le plus petit entier naturel $\neq 0$ qui est multiple de a et multiple de b.

Remarque. Un diviseur de a et de b est appelé un diviseur commun à a et b.
Un multiple de a et de b est appelé un commun multiple de a et b.

Exercice 4. Déterminer le PGCD ainsi que le PPCM de 12 et 15 :

$$PGCD(12,15) = 3 \qquad ; \qquad PPCM(12,15) = 60$$

Remarque. Le calcul du PGCD et du PPCM de deux entiers peut s'obtenir à partir de leur décomposition en facteurs premiers :

– Le PGCD s'obtient en multipliant tous les facteurs premiers communs aux deux nombres avec pour multiplicité (c'est à dire le nombre de fois où ils apparaissent), la plus petite multiplicité dans chacun des deux nombres.
– Le PPCM s'obtient en multipliant tous les facteurs premiers des deux nombres avec pour multiplicité la plus grande multiplicité dans chacun des deux nombres.
Exemples :

$$12 = 2 \times 2 \times 3 \quad ; \quad 15 = 3 \times 5$$
$$PGCD(12, 15) = 3 \quad ; \quad PPCM(12, 15) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3 \quad ; \quad 30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$PGCD(12, 30) = 2 \times 3 = 6 \quad ; \quad PPCM(12, 30) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$$

Avec cette remarque, il est assez facile de vérifier que :

$$PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = a \times b.$$

Deux entiers a et b non nuls sont dits premiers entre eux lorsque ils ont pour seul diviseur commun 1. Si a et b sont non nuls, a et b sont premiers entre eux si et seulement si $PGCD(a, b) = 1$ ssi $PPCM(a, b) = a \times b$.

Division euclidienne

Soient a un entier naturel et b un entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) tels que :

$$a = q \times b + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b$$

L'entier q est appelé le quotient, et l'entier r le reste dans la division euclidienne de a par b.

Sous ces hypothèses on pourra noter : $a \equiv r\ [b]$ que l'on lit a est congru à r modulo b.

Exemple.

– L'entier b divise a si et seulement si le reste dans la division euclidienne de a par b est nul.

– Division euclidienne de 60 par 16 : $60 = 3 \times 16 + 12$.

Le quotient est 3, le reste est 12.

Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD

Le calcul du PGCD de deux nombres a et b peut s'obtenir en procédant à plusieurs divisions euclidiennes :

– Si $b = 0$ alors le PGCD recherché est a ; sinon :
– Effectuer la division euclidienne de a par b ; le quotient est q, le reste est r.
– Si le reste $r = 0$ alors b est le PGCD recherché. Sinon :
– Recommencer en effectuant la division euclidienne de b par r ; et ainsi de suite.

Exemple. : Calcul de $PGCD(12, 30)$:

$$12 = 0 \times \underline{30} + \underline{12}$$

$$30 = 2 \times \underline{12} + \underline{6}$$

$$12 = 2 \times \boxed{6} + \underline{0}$$

ainsi $PGCD(12, 30) = 6$.

Le PPCM se déduit alors de : $PPCM(12, 30) = 12 \times 30 \div PGCD(12, 30) = 60$

En langage algorithmique, l'algorithme d'Euclide s'écrit :

Calcul du PGCD de a et b :

TANT QUE $b \neq 0$:

    Effectuer la division euclidienne de a par b ; soit r le reste.
    Changer a par b
    Changer b par r

FIN TANT QUE

Renvoyer a.

Exercice 5. Calculer le PGCD de 91 et 119.

$$119 = 1 \times \underline{91} + \underline{28} \quad ; \quad 91 = 3 \times \underline{28} + \underline{7} \quad ; \quad 28 = 4 \times \boxed{7} + \underline{0}$$

$$PGCD(91, 119) = 7$$

Les entiers relatifs

La soustraction n'est pas une opération bien définie sur l'ensemble des entiers naturels. Soient a et b deux entiers naturels avec $a \geq b$, on note :

$$a - b = c \quad \text{où } c \text{ est l'entier naturel tel que } a = b + c$$

Elle le devient sur l'ensemble des entiers relatifs :

Définition

Pour tout entier naturel non-nul $n \in \mathbb{N}^*$ on définit son opposé $-n$ et l'ensemble des <u>entiers relatifs</u> :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \left\{ -n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

On étend l'opposé $-$ et les opérations $+$, $-$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}$ par :

$$-0 = 0 \quad ; \quad -(-a) = a \quad ; \quad \text{si } a \leq b \text{ alors } a - b = -(b-a)$$

$$a + (-b) = (-b) + a = a - b \quad ; \quad -(a+b) = (-a) + (-b)$$

$$(-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b) \quad ; \quad (-a) \times (-b) = a \times b$$

Alors :

L'ensemble des entiers relatifs est le plus petit ensemble contenant 0 et contenant le successeur et le prédécesseur de chacun de ses éléments. Autrement dit :
Si E est un ensemble tel que :

$$0 \in E \quad \text{et} \quad (n \in E \implies [(n+1) \in E \quad \text{et} \quad (n-1) \in E])$$

alors $\mathbb{Z} \subset E$.

On note $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non-nuls et :

$$\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^* = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid (-n) \in \mathbb{N} \right\}.$$

Les éléments de $\mathbb{Z}_-$ sont les entiers négatifs, les éléments de $\mathbb{N}$ sont les entiers positifs ; 0 est le seul entier à la fois positif et négatif.

Remarques.

– L'entier n est positif (respectivement négatif) si et seulement si son opposé $(-n)$ est négatif (respectivement positif).

– Tout entier relatif peut s'écrire $\pm n$ (lire "plus ou moins n") avec n un entier naturel ; c'est sa valeur absolue.

Toutes les propriétés vues sur les entiers naturels restent alors vraies pour les entiers relatifs en les appliquant à leur valeur absolue.

$\mathbb{Z}$ est muni d'une structure d'ordre qui étend celle de $\mathbb{N}$, définie par :

$$\text{Pour tout } a \in \mathbb{Z}_- \text{ et } b \in \mathbb{N}, \quad a \leq b$$
$$\text{Pour tout } a \in \mathbb{Z}_- \text{ et } b \in \mathbb{Z}_-, \quad a \leq b \iff -b \leq -a$$

Terminons avec la notion de parité d'un entier :

- Un entier relatif n est pair si il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2 \times q$ (ssi son reste dans la division euclidienne par 2 est 0).
- Un entier relatif n est impair si il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2 \times q + 1$ (ssi son reste dans la division euclidienne par 2 est 1).
- Deux entiers n et m ont même parité si ils sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs ; sinon ils ont parité contraire.
- Si m est pair, n et $n \pm m$ ont même parité.
- Si m est impair n et $n \pm m$ ont parité contraire.

Les nombres rationnels

Définition

L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$\text{avec} \quad \frac{p}{1} = p \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' = p'q$$

L'ensemble des nombres rationnels non nuls est :

$$\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}^*,\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels contient $\mathbb{Z}$; il est muni des opérations $+$, $-$, $\times$ qui étendent celles de $\mathbb{Z}$, ainsi que d'une opération de division $\div$ définies par :

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q} = \frac{p+p'}{q} \quad ; \quad \frac{p}{q} - \frac{p'}{q} = \frac{p-p'}{q}$$

$$\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{p \times p'}{q \times q'} \quad ; \quad p \times \frac{p'}{q'} = \frac{p \times p'}{q'}$$

$$\frac{p}{q} \div \frac{p'}{q'} = \frac{p \times q'}{q \times p'} \quad ; \quad \frac{p}{q} \div q' = \frac{p}{q \times q'}$$

Remarque. Pour additionner ou soustraire deux nombres rationnels de dénominateurs différents, on change leur écriture de sorte qu'ils aient pour dénominateur commun le PPCM de leur dénominateur respectif.

Exercice 6. Calculer :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} - \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1 \times 3}{6 \times 3} - \frac{1 \times 2}{9 \times 2} = \frac{3}{18} - \frac{2}{18} = \frac{1}{18}$$
$$\frac{1}{12} + \frac{2}{15} = \frac{1 \times 5}{12 \times 5} + \frac{2 \times 4}{15 \times 4} = \frac{5}{60} + \frac{8}{60} = \frac{13}{60}$$
$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{40} = \frac{8}{15} - \frac{7}{120} = \frac{8 \times 8}{15 \times 8} - \frac{7}{120} = \frac{64}{120} - \frac{7}{120} = \frac{57}{120}$$

Tout nombre rationnel est muni d'un signe, positif ou négatif :

Un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ est :

– positif si p et q sont des entiers de mêmes signes ; on écrit $\frac{p}{q} \geq 0$,

– négatif si p et q sont des entiers de signes opposés ; on écrit $\frac{p}{q} \leq 0$.

On note :

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \frac{p}{q} \geq 0 \right\} \quad ; \quad \mathbb{Q}_- = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \frac{p}{q} \leq 0 \right\}$$

L'ensemble des nombres rationnels est muni d'un opérateur de signe $\pm$:

L'ensemble des nombres rationnels est muni des opérateurs de signe $+$ et $-$ définis par :

$$+\frac{p}{q} = \frac{p}{q} \quad ; \quad -\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} = \frac{p}{-q}.$$

L'écriture d'un nombre rationnel n'est pas unique ; par contre elle l'est sous forme irréductible :

Un nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme irréductible, c'est à dire sous la forme : $\pm\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.

Remarques.

– Pour écrire sous forme irréductible un nombre rationnel, on divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.

– Dans un calcul sur les rationnels, on écrit le résultat sous forme irréductible.

Exercice 7. Calculer (le résultat doit être donné sous forme irréductible) :

$$\frac{1}{21}+\frac{1}{28}=\frac{4}{3\times7\times4}+\frac{3}{4\times7\times3}=\frac{7}{3\times4\times7}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{11}{24}-\frac{13}{40}=\frac{11\times5}{3\times8\times5}-\frac{13\times3}{5\times8\times3}=\frac{55-39}{3\times5\times8}=\frac{16}{3\times5\times8}=\frac{2}{15}$$
$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\div3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

L'ensemble des rationnels est muni d'une structure d'ordre qui étend celles de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$, définie par :

Soient $\dfrac{p}{q}$ et $\dfrac{p'}{q'}$ deux rationnels ayant des dénominateurs q et q' de même signe, alors :

$$\frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'} \iff pq' \leq p'q.$$

Les nombres réels

Jusqu'à l'antiquité on a cru que tous les nombres apparaissant dans la réalité, c'est-à-dire en tant que grandeurs géométriques (longueurs, aires, volumes), étaient les nombres rationnels.
C'est vers le V^e siècle av. J.C. que les grecs se sont aperçus que la longueur ($\sqrt{2}$) de la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas un nombre rationnel (c'est un irrationnel). La circonférence (π) d'un cercle de diamètre 1, est un autre exemple d'irrationnel.

Si l'on considère une droite graduée, permettant de représenter chacun des points de la droite à l'aide d'un nombre –son abscisse– alors les points correspondants aux nombres rationnels ne forment qu'une infime partie de cette droite.
Il est alors nécessaire d'étendre l'ensemble des nombres rationnels à un ensemble plus grand, celui des abscisses de tous les points de la droite. Ce sont les nombres réels.
Au XIX^e siècle a été démontré que presque tous les nombres réels sont des irrationnels.

Les nombres réels

Nous admettrons la construction rigoureuse des nombres réels.

Définition

– $\mathbb{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels.*
– $\mathbb{R}^*$ *désigne le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *des nombres réels non nuls.*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Les inclusions sont strictes : $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Opérations sur les nombres

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni des deux opérations $+$ et $\times$ qui étendent ces mêmes opérations de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

Elles vérifient les propriétés suivantes : soient a, b, c des nombres réels.

- Commutativité.

$$a + b = b + a$$
$$a \times b = b \times a$$

- Associativité.

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \text{que l'on note } a + b + c$$
$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \qquad \text{que l'on note } a \times b \times c$$

- Distributivité de $\times$ sur $+$.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \qquad \text{(à gauche)}$$
$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c \qquad \text{(à droite)}$$

- Existence d'un élément neutre.

$$a + 0 = a \qquad 0 \text{ est l'élément neutre de } +$$
$$a \times 1 = a \qquad 1 \text{ est l'élément neutre de } \times$$

- Intégrité de $\times$

$$a \times b = 0 \iff a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0$$

- Existence d'un opposé et d'un inverse.

Il existe un unique nombre noté $(-a)$ tels que :

$$a + (-a) = 0$$

Si $a \neq 0$, il existe un unique nombre noté $\frac{1}{a}$ tels que :

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

Soustraction et division (ou quotient) sont alors définies par :

On note :

$$a - b = a + (-b)$$

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \qquad \text{si } b \neq 0$$

- Propriétés de l'opposé et de l'inverse.

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$
$$-(-a) = a$$
$$a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

si $a \neq 0$ et $b \neq 0$:

$$\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} \quad ; \quad \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$
$$\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a} \quad ; \quad \frac{1}{a} \neq 0$$

Puissances entières

Définition

Puissances entières.

– *Soit a un nombre réel et* $n \in \mathbb{N}$ *; on définit :*

$$a^n = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n\ facteurs\ a} & si\ n \neq 0 \end{cases}$$

– *Soit a un nombre réel non nul et* $n \in \mathbb{Z}_-^*$ *; on définit :*

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \underbrace{\frac{1}{a} \times \cdots \times \frac{1}{a}}_{-n\ facteurs\ \frac{1}{a}}$$

Remarque. $0^0 = 1$.

Exercice 8.

1) Pour quelles valeurs du réel x, $\dfrac{(x-1)^{-3}}{(x+2)^4}$ est-il défini ? Pour $x \notin \{1, -2\}$.

2) Calculer 2^n :
2.a) pour n variant de 0 à 10.

$$2^0 = 1 \quad ; \quad 2^1 = 2 \quad ; \quad 2^2 = 4 \quad ; \quad 2^3 = 8 \quad ; \quad 2^4 = 16 \quad ; \quad 2^5 = 32$$
$$2^6 = 64 \quad ; \quad 2^7 = 128 \quad ; \quad 2^8 = 256 \quad ; \quad 2^9 = 512 \quad ; \quad 2^{10} = 1024.$$

2.b) Pour n variant de -1 à -5 (donner ses écritures fractionnaires et décimales).

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad ; \quad 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad ; \quad 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0,125$$
$$2^{-4} = \frac{1}{16} = 0,0625 \quad ; \quad 2^{-5} = \frac{1}{32} = 0,03125$$

Les puissance satisfont aux propriétés suivantes :

Soient a et b des nombres réels, et p, q deux entiers relatifs. Lorsque les deux membres des égalités ci-dessous sont définis :

$$(a \times b)^p = a^p \times b^p \quad ; \quad a^p \times a^q = a^{p+q} \quad ; \quad (a^p)^q = a^{p \times q}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^p = \frac{1}{a^p} = a^{-p} \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} = a^p \times b^{-p} \quad ; \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Exercice 9. 1) Simplifier : $\frac{8^2}{2^5}$; $\frac{16^3}{4^6}$; $\frac{6^4}{8^2}$:

$$\frac{8^2}{2^5} = \frac{(2^3)^2}{2^5} = \frac{2^6}{2^5} = 2^1 = 2 \quad ; \quad \frac{16^3}{4^6} = \frac{(2^4)^3}{(2^2)^6} = \frac{2^{12}}{2^{12}} = 2^0 = 1$$

$$\frac{6^4}{8^2} = \frac{(2 \times 3)^4}{(2^3)^2} = \frac{2^4 \times 3^4}{2^6} = \frac{3^4}{2^2} = \frac{9^2}{2^2} = \frac{81}{4}$$

2) Soient $n, m \in \mathbb{Z}$; simplifier : $(-1)^n$ et $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^m}$ (discuter selon les valeurs de n et $n+m$.)

si n est pair, $n = 2p$: $\quad (-1)^n = (-1)^{2p} = \left((-1)^2\right)^p = 1^p = 1$

si n est impair, $n = 2p+1$: $\quad (-1)^n = (-1)^{2p+1} = \left((-1)^2\right)^p \times (-1)^1 = 1^p \times (-1) = -1$

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^m} = (-1)^{n-m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n-m \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n-m \text{ est impair} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } n+m \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n+m \text{ est impair} \end{cases}$$

car $n+m = n-m+2m$ a même parité que $n-m$.

Identités remarquables

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Exercice 10. Factoriser dans $\mathbb{R}$ en utilisant les identités remarquables :

$$x^2 + 2x - 3$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 4 &= (x+1)^2 - 2^2 \\ &= (x+1+2)(x+1-2) = (x+3)(x-1) \end{aligned}$$

Exercice 11. Développer :

$$(a+b)^3 \quad ; \quad (a-b)^3 \quad ; \quad (a+b)^4 \quad ; \quad (a+b+c)^2 \quad ; \quad (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b) \\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\
(a+b)^4 &= (a+b)^2(a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b+c)^2 &= (a+(b+c))^2 = a^2+2a(b+c)+(b+c)^2 \\
&= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \\
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3 \\
&= a^3-b^3
\end{aligned}$$

Remarque. Les coefficients dans le développement de $(a+b)^n$ s'obtiennent grâce au triangle de Pascal :

1	$(a+b)^0 = 1a^0b^0 = 1$
11	$(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1 = a+b$
121	$(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1331	$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
14641	$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Le premier terme (en haut) du triangle de Pascal vaut 1, tous les autres s'obtiennent en sommant leur terme du dessus avec leur terme au dessus à gauche (les espaces vides comptant pour 0).

Signe d'un réel

Les nombres réels sont dotés d'un signe :

$$\text{positif } (\text{"}+\text{" ou } \geq 0) \text{ ou négatif } (\text{"}-\text{" ou } \leq 0).$$

$\mathbb{R}_+$ (respectivement $\mathbb{R}_+^*$) désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ des nombres réels (respectivement strictement) positifs.
$\mathbb{R}_-$ (respectivement $\mathbb{R}_-^*$) désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ des nombres réels (respectivement strictement) négatifs.

Les opérations sur les réels ont l'effet suivant sur leur signe :

- La somme de réels positifs est un réel positif.
- La somme de réels négatifs est un réel négatif.
- Le produit de 2 réels est positif ssi les 2 réels ont même signe.
- Si $a \in \mathbb{R}^*$: a et $(-a)$ sont de signes opposés.
  a et $1/a$ sont de même signe.

Remarque. Dit différement :

- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ sont stables par $+$.
- $\mathbb{R}_+$ est stable par $\times$.

– Règle des signes :

$$(-)\times(+)\longrightarrow(-) \qquad (+)\times(-)\longrightarrow(-)$$
$$(+)\times(+)\longrightarrow(+) \qquad (-)\times(-)\longrightarrow(+)$$

– Le quotient $\dfrac{a}{b}$ a même signe que le produit $a\times b$.

Pour étudier le signe d'un produit ou quotient, on dresse un tableau de signe :

Exercice 12. Déterminer en fonction de x le signe de $\frac{2-x}{(x+1)^3}$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$(x+1)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x+1)^3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$\dfrac{2-x}{(x+1)^3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

La propriété suivante est très utile :

Une somme de termes positifs est nulle ssi chacun de ses termes est nul.

Racine carrée

Soit x un nombre réel.

– Si x est strictement positif, il existe exactement deux réels, opposés l'un de l'autre, dont le carré vaut x.

– Si $x = 0$, 0 est le seul réel dont le carré vaut x.

– Si $x < 0$ aucun réel n'a pour carré x.

Pout tout nombre réel positif x, sa racine carrée $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif dont le carré vaut x :

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \text{et} \quad \sqrt{x} \geq 0.$$

La racine carrée d'un réel positif satisfait les propriétés suivantes :

Pour tous réels positifs x et y :

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad ; \quad \text{si } x \geq 0 \quad \sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y} \quad ; \quad \text{si } y \neq 0 \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$\text{si } n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{x^n} = \left(\sqrt{x}\right)^n \quad ; \quad \text{si } n \in \mathbb{Z}_-^* \text{ et } x \neq 0 \quad \sqrt{x^n} = \left(\sqrt{x}\right)^n$$

Exercice 13. Simplifier :

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2^5}}{\sqrt{2 \times 3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Résolution d'équation

Résoudre une équation $(\mathscr{E}) : A(x) = B(x)$ dans un ensemble E consiste à déterminer tous les éléments $x \in E$ vérifiant l'équation ; ce sont les solutions dans E de l'équation.

Deux équations sont équivalentes (noté $\iff$) si elle ont mêmes solutions.

a) Addition : en ajoutant un même nombre à chaque membre d'une équation on obtient une équation équivalente.

$$u = v \iff u + w = v + w$$

b) Multiplication : en multipliant par un même nombre non nul chaque membre d'une équation on obtient une équation équivalente.

$$w \neq 0 \implies (u = v \iff u \times w = v \times w)$$

c) Élévation au carré : on garde l'équivalence en élevant au carré lorsque les deux membres sont positifs :

$$u = v \implies u^2 = v^2$$

$$\text{si } u \geq 0 \text{ et } v \geq 0 \ : \ u = v \iff u^2 = v^2$$

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les deux équations :

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{5} \qquad (E_1)$$

$$x = \sqrt{2-x} \qquad (E_2)$$

• Résolution de (E_1) : les expressions sont bien définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ car x^2+1 et 5 sont positifs. On peut procéder par équivalence :

$$\begin{aligned}
(E_1) &\iff x^2+1 = 5 && \text{en élevant au carré}\\
&\iff x^2-4 = 0 && \text{en ajoutant } -5 \text{ aux deux membres}\\
&\iff (x-2)(x+2) = 0 &&\\
&\iff x = \pm 2 && \text{par intégrité de } \times
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_1 = \{-2; 2\}$.

• Résolution de (E_2) : l'expression de droite n'est définie que pour $x \leq 2$; x n'étant pas positif on ne peut pas conserver l'équivalence en élevant au carré.

Analyse : si x est solution alors $x \leq 2$ et :

$$\begin{aligned}
x = \sqrt{2-x} &\Longrightarrow x^2 = 2 - x && \text{en élevant au carré}\\
&\Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0\\
&\Longrightarrow (x-1)(x+2) && \text{car 1 et } -2 \text{ ont racines évidentes}\\
&\Longrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2 && \text{par intégrité de } \times
\end{aligned}$$

Synthèse : Parmi les possibles solutions trouvées lesquelles sont effectivement solutions ?

1 et -2 sont ≤ 2, et :

$$\begin{aligned}
&\text{pour } x = 1 : \sqrt{2-x} = \sqrt{1} = 1 = x && \Longrightarrow 1 \text{ est solution}\\
&\text{pour } x = -2 : \sqrt{2-x} = \sqrt{4} = 2 \neq x && \Longrightarrow -2 \text{ n'est pas solution}
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est le singleton $\mathscr{S}_2 = \{1\}$.

Résolution d'une équation du second degré

Soient a, b, c 3 réels avec $a \neq 0$, et le trinôme $ax^2 + bx + c$. On s'intéresse à l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (E)$$

- **Écriture du trinôme sous forme canonique.**

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left[\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x}_{} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\overbrace{\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{} - \frac{b^2}{4a^2}}^{} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\overbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}^{} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

Pour le trinôme $ax^2 + bx + c$, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant,

$$a \times \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

est l'écriture sous forme canonique du trinôme.

- **Racines du trinôme (solutions de (E)).**

– 1^{er} cas : si $\Delta > 0$.

Alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2$; donc :

$$(E) \underset{\times \frac{1}{a}}{\iff} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
(E) &\underset{\times \frac{1}{a}}{\iff} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0\\
&\iff \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\times\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0\\
&\iff \left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\times\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0\\
&\iff x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \quad \text{ou} \quad x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \qquad (\text{intégrité de } \times)\\
&\iff x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}
$$

– 2^{eme} cas : si $\Delta = 0$.

$$\begin{aligned}(E) &\underset{\times \frac{1}{a}}{\Longleftrightarrow} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{-b}{2a}\end{aligned}$$

– 3^{eme} cas : si $\Delta < 0$.
Alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $ax^2 + bx + c = a \times \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: il n'y a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

en résumé :

L'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ a pour solutions, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles distinctes :

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, une unique solution réelle :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, il n'y a aucune solution réelle.

• **Signe du trinôme.**

Déterminons le signe pris par le trinôme $ax^2 + bx + c$ en fonction du réel x. On part de l'écriture sous forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a \times \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

– 1^{er} cas : si $\Delta \leq 0$. Alors :

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq 0.$$

Donc $ax^2 + bx + c$ a même signe que a. De plus si $\Delta < 0$ il n'y a aucune racine réelle et l'inégalité est stricte.

– 2^{eme} cas : si $\Delta > 0$. Alors :

$$ax^2 + bx + c = a \times \underbrace{\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{=P}$$

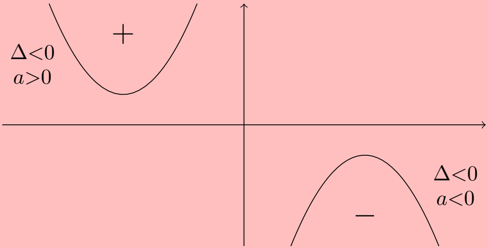
Dressons le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$		$+\infty$
$x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

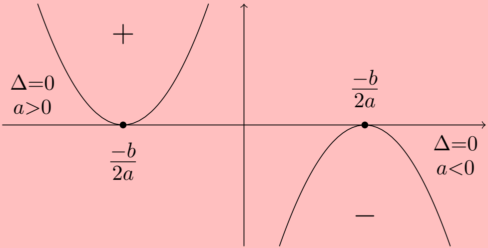
Ainsi le trinôme $ax^2 + bx + c$ a même signe que a en dehors des racines, et signe contraire entre les racines.

En résumé :

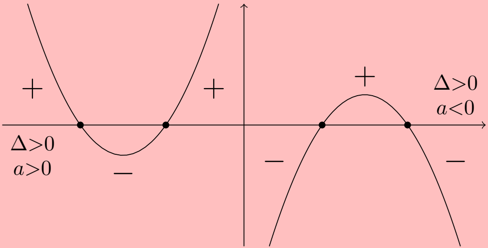
- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ est garde un signe constant, celui de a.



- Si $\Delta = 0$, le trinôme garde un signe constant, celui de a.



• Si $\Delta > 0$, le trinôme change de signe ; il a le signe de a à l'extérieur des racines, et le signe opposé entre les racines.



Exercice 15. Déterminer en fonction de $x \in \mathbb{R}$ le signe de :

$$x^2 - 4 \qquad ; \qquad x^2 - x + 1 \qquad ; \qquad -x^2 - x + 1$$

• Pour $x^2 - 4$: $\Delta = 16 > 0$, le trinôme a deux racines réelles distinctes : ± 2. Il est positif lorsque $x \leq -2$ ou $x \geq 2$ et négatif lorsque $-2 \leq x \leq 2$.

• Pour $x^2 - x + 1$: $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, le trinôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et garde un signe constant strictement positif.

• Pour $-x^2 - x + 1$: $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$, le trinôme a deux racines réelles distinctes : $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Il est négatif lorsque $x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et positif lorsque $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

- **Lien racines-coefficients.**

Notons x_1, x_2 les 2 racines comptées avec leur ordre de multiplicité du trinôme $ax^2 + bx + c$ (si $\Delta = 0$, $x_1 = x_2$). Alors :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad ; \qquad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration. Dans ce cas $\Delta \geq 0$ et :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ainsi :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

■

En particulier, si le trinôme est unitaire, c'est-à-dire de la forme $x^2 - Sx + P$, alors ses racines vérifient $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 \times x_2 = P$.

Exercice 16. Déterminer sans calcul les racines des trinômes :

$$x^2 - 3x + 2 \qquad ; \qquad x^2 + 5x + 6$$

- Pour $x^2 - 3x + 2$: les racines sont 1 et 2 car $1 + 2 = 3$ et $1 \times 2 = 2$.
- Pour $x^2 + 5x + 6$: les racines sont -2 et -3 car $-2 + (-3) = -5$ et $(-2) \times (-3) = 6$.

La réciproque est aussi vraie :

Les solutions du système d'inconnues x, y :

$$\begin{cases} x+y=S \\ x\times y=P \end{cases}$$

sont les racines comptées avec leur ordre de multiplicité du trinôme x^2-Sx+P (si $\Delta=0$, $x=y$).

Démonstration. Soient x et y des solutions du système :

$$\begin{cases} x+y=S \\ x\times y=P \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=S-x \\ x\times(S-x)=P \end{cases} \Longrightarrow x^2-Sx+P=0$$

et de même $y^2-Sy+P=0$. Donc x et y sont racines du trinôme. De plus si $x=y$ alors $\Delta=S^2-4P=(2x)^2-4x^2=0$; ainsi si $\Delta\neq 0$ alors $x\neq y$. Réciproquement si x et y sont les deux racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) de x^2-Sx+P il découle du résultat précédent que x et y sont solutions du système. ■

Exercice 17. Résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x \times y = 9 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x \times y = -1 \end{cases}$$

• Pour le premier : x, y sont les racines comptées avec leur ordre de multiplicité du trinôme $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$; ainsi $x = y = 3$. Le système admet un unique couple solution : $(3, 3)$.

• Pour le second : x, y sont les racines comptées avec leur ordre de multiplicité du trinôme $x^2 - x - 1$; son discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ et ses racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Le système admet deux couples solutions : $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.