Bases mathématiques : Logique, raisonnement, ensembles
Partie 1 : Logique

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Ce chapitre donne le vocabulaire de notions de base en mathématiques : la logique, et les ensembles.

Nous illustrerons notamment les différents types de raisonnement que l'on est en droit d'appliquer pour démontrer une assertion.

Aux concours ce chapitre ne peut pas constituer le thème principal d'un exercice d'écrit ou d'oral (cependant sa maitrise est nécessaire pour <u>tous</u> les exercices d'écrit ou d'oral).

Proposition

Définition

Une proposition est un énoncé mathématique prenant une valeur de vérité : soit VRAI soit FAUX.

Exemples.

"2 est un nombre pair" est une proposition VRAIE.

"2 est un nombre impair" est une proposition FAUSSE.

Remarques.

– Une proposition vérifie le principe du tiers exclu : elle est soit VRAIE, soit FAUSSE ; l'un ou l'autre et jamais l'un et l'autre.

– Pour une proposition P, on a coutume d'écrire "P" plutôt que "P est VRAIE".

Assertion

Définition

Une assertion est un énoncé mathématique pouvant contenir des variables libres, chaque variable décrivant un ensemble donné, et qui pour chaque valeur de ses variables prend une valeur de vérité soit VRAI soit FAUX.

Une assertion ne contenant aucune variable libre est aussi une proposition ayant même valeur de vérité.

Plus généralement, une assertion est aussi une proposition dont la valeur de vérité est définie comme :

– VRAIE si l'assertion est vraie pour toute valeur de ses variables libres.

– FAUSSE sinon.

Remarque. Pour chaque valeur de ses variables libres, une assertion vérifie le principe du tiers exclu : elle est soit VRAIE soit FAUSSE

Exemples. Soit x un réel :

"$x \geq 0$" est une assertion ; elle est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et fausse pour tout $x \in \mathbb{R}_-$. C'est donc aussi une proposition FAUSSE.

"$x^2 \geq 0$" est une assertion toujours vraie. C'est donc aussi une proposition VRAIE.

Remarque. L'objet des mathématiques est d'établir quelles propositions sont vraies, et quelles propositions sont fausses. En ce sens les mathématiques ne s'intéressent qu'aux propositions. Les assertions ne servent qu'à la construction de propositions plus complexes.

Exercice 1. Parmi les énoncés suivants, lesquels sont des assertions, propositions, varies, fausses ?

– Le frère de ma mère est mon oncle. Proposition VRAIE.

– Mon oncle est le frère de ma mère. Assertion. Proposition FAUSSE

– André et Béa sont en couple. Assertion. Proposition FAUSSE

– Aujourd'hui un élève de BCPST1 Fénelon est arrivé en retard. Proposition.

– Les BCPST2 sont plus forts que les BCPST1.

Ce n'est pas une assertion ; que signifie "plus fort" ?.

Remarque. Pour être une assertion ou proposition, il ne doit pas y avoir d'ambiguité ! Tous les termes doivent être bien définis.

Exemple. Le professeur de Mathématiques annonce : "La semaine prochaine vous aurez une interro surprise". Peut-on le croire ? Et sinon aidons notre professeur de Mathématiques à énoncer une proposition vraie.

Qu'est qu'une interro surprise ? Une interro à laquelle on ne s'attend pas lorsqu'elle survient ? Mais alors elle ne peut pas avoir lieu lors du derniers cours (sinon on pourrait s'y attendre juste avant). Ni non plus lors de l'avant dernier (sinon, sachant qu'elle n'aura pas lieu lors du dernier cours, on pourrait s'y attendre aussi juste avant), etc... jusqu'au premier cours. C'est donc impossible qu'il y ait une interro surprise –en ce sens– la semaine prochaine.

Si l'on suppose que c'est cela que signifie "interro surprise", alors la proposition énoncée par le professeur est fausse. Sinon on peut rétorquer que la phrase est ambigüe et nécessite de définir correctement ses termes.

Ce que veut dire le professeur c'est : "lors d'un cours de la semaine prochaine –je ne vous dit pas quand– vous aurez une interro".

Si le professeur voulait garder l'effet de surprise jusqu'au bout, il devrait plutôt annoncer : "La semaine prochaine vous aurez peut-être une interro surprise". Ce qui n'a pas tout à fait le même sens.

Propositions/assertions équivalentes

Définition

Deux assertions sont équivalentes lorsqu'elles prennent même valeur de vérité pour chaque valeurs de leurs variables libres.

Deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles ont même valeur de vérité.

Pour préciser que 2 assertions ou propositions P et Q sont équivalentes, on écrit :

$$P \equiv Q.$$

Le non logique (ou négation)

En partant d'assertions, on peut construire de nouvelles assertions à l'aide des connecteurs logiques non, et, ou.

Définition

Soit P une assertion ; sa négation notée (non P) ou $\neg P$ est l'assertion prenant pour valeur de vérité :

$\neg P$ est VRAIE lorsque P est fausse,

$\neg P$ est FAUSSE lorsque P est vraie.

Autrement dit, sa table de vérité est :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemples.

– Soit $n \in \mathbb{Z}$; la négation de l'assertion "n est pair" est équivalente à l'assertion "n est impair".

– Soient a et b deux entiers naturels ; la négation de l'assertion "a est multiple de b" est équivalente à l'assertion "le reste dans la division euclidienne de a par b est non nul".

Propriété

Soit P une assertion ; on a l'équivalence :

$$\neg(\neg P) \equiv P$$

Démonstration. Il suffit de comparer les tables de vérité de P et $\neg(\neg P)$, en appliquant deux fois la table de vérité du non logigue :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

Exemples. Avec l'exemple précédent :

– Soit $n \in \mathbb{Z}$; la négation de l'assertion "n est impair" est équivalente à l'assertion "n est pair".

– Soient a et b deux entiers naturels ; la négation de l'assertion "le reste dans la division euclidienne de a par b est non nul" est équivalente à l'assertion "a est multiple de b".

Méthode. Soit P une assertion.

– Pour montrer que la proposition $\neg P$ est vraie il faut montrer que pour toutes valeurs de ses variables libres, l'assertion P est fausse.

– Pour montrer que la proposition $\neg P$ est fausse il faut montrer que pour au moins une valeur de ses variables libres, l'assertion P est vraie. (C'est un contre-exemple.)

Le et logique (ou conjonction)

Définition

Soient P et Q deux assertions ; la conjontion P et Q (ou $P \wedge Q$) de P et Q est l'assertion prenant pour valeur de vérité :

VRAIE lorsque les deux assertions P et Q sont vraies,

FAUSSE lorsque l'une des assertions P ou Q est fausse.

Autrement dit, sa table de vérité est :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple. Soit x un réel ; la conjonction des assertions "$x \geq 0$" et "$x \leq 0$" est équivalente à l'assertion "$x = 0$". La conjonction des assertions "$x \geq 0$" et "$x \leq 1$" est l'assertion "$0 \leq x \leq 1$".

Propriété

Le et logique est commutatif et associatif ; soient P, Q et R trois assertions :

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P \qquad \textit{commutativité}$$
$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R \qquad \textit{associativité}$$

Remarque. L'associativité permet donc d'écrire $P \wedge Q \wedge R$ sans parenthèses.

Démonstration. Elles découlent facilement de la définition.

– Pour la commutativité :

L'assertion $P \wedge Q$ est VRAIE ssi les deux assertions P, Q sont VRAIES, ssi l'assertion $Q \wedge P$ est VRAIE ; d'où l'équivalence.

– Pour l'associativité :

L'assertion $P \wedge (Q \wedge R)$ est VRAIE ssi les deux assertions P, $Q \wedge R$ sont VRAIES, ssi les trois assertions, P, Q et R sont VRAIES. De même l'assertion $(P \wedge Q) \wedge R$ est VRAIE ssi les trois assertions P, Q et R sont VRAIES ; d'où l'équivalence. ■

Propriété

Soient P et Q deux assertions :

$$P \wedge P \equiv P$$

$$\textit{si } P \textit{ est VRAIE} \quad P \wedge Q \equiv Q$$

$$\textit{si } P \textit{ est FAUX} \quad P \wedge Q \textit{ est FAUX}$$

Démonstration. Comme la précédente propriété, elles découlent immédiatement de la définition. ■

Méthode. Soient P et Q deux assertions ; pour montrer que la proposition $P \wedge Q$ est VRAIE on établit que pour chaque valeur de leurs variables libres, chacune des assertions P et Q est vraie.

Pour montrer que la proposition $P \wedge Q$ est FAUSSE on montre que pour au moins une valeur de leurs variables libres, l'une des assertions P ou Q est fausse (contre-exemple).

Le ou logique (ou disjonction)

Définition

Soient P et Q deux assertions ; la disjontion P ou Q (ou $P \vee Q$) de P et Q est l'assertion prenant pour valeur de vérité :

VRAIE lorsque au moins une des assertions P, Q est vraie,

FAUSSE lorsque les deux assertions P, Q sont fausses.

Autrement dit, sa table de vérité est :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple. Soit x un réel ; la disjonction des assertions "$x \geq 0$" et "$x \leq 0$" est VRAIE pour toute valeur de x.

Remarque. Le ou logique est inclusif : $P \vee Q$ est VRAIE notamment lorsque P et Q sont tous les 2 VRAIES.

Dans le langage courant, le ou n'est pas toujours inclusif ; il peut l'être :

"Ce soir j'irais volontiers au restaurant ou au cinéma".

Ou ne pas l'être :

"Au menu du restaurant, en 3ème plat : Fromage ou Dessert".

Dans ce cas le ou est dit exclusif.

En logique le ou exclusif de deux assertions P, Q est l'assertion :

$$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

Propriété

Le ou logique est commutatif et associatif ; soient P, Q et R trois assertions :

$$P \vee Q \equiv Q \vee P \qquad \textit{commutativité}$$

$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R \qquad \textit{associativité}$$

Remarque. L'associativité permet donc d'écrire $P \vee Q \vee R$ sans parenthèses.

Démonstration. Elles découlent facilement de la définition.

– Pour la commutativité :

L'assertion $P \vee Q$ est VRAIE ssi au moins une des deux assertions P, Q est VRAIE, ssi l'assertion $Q \vee P$ est VRAIE ; d'où l'équivalence.

– Pour l'associativité :

L'assertion $P \vee (Q \vee R)$ est VRAIE ssi au moins une des deux assertions P, $Q \vee R$ est VRAIE, ssi au moins une des trois assertions, P, Q et R est VRAIE. De même l'assertion $(P \vee Q) \vee R$ est VRAIE ssi au moins une des trois assertions P, Q et R sont VRAIES ; d'où l'équivalence. ■

Propriété

Soient P et Q deux assertions :

$$P \vee P \equiv P$$

$$\text{si } P \text{ est FAUX} \quad P \vee Q \equiv Q$$

$$\text{si } P \text{ est VRAI} \quad P \vee Q \text{ est VRAI}$$

Démonstration.

Comme la précédente propriété, elles découlent immédiatement de la définition.
■

Méthode. Soient P et Q deux assertions ; pour montrer que la proposition $P \vee Q$ est VRAIE : on suppose que P est FAUX pour une valeur des variables libres, et on montre qu'alors pour ces mêmes valeurs Q est VRAIE (ou l'inverse).

Pour montrer que la proposition $P \vee Q$ est FAUSSE on montre que pour au moins une valeur de leurs variables libres, les deux assertions P, Q sont fausses (contre-exemple).

Propriétés

Dans cette partie, P, Q et R désignent 3 assertions.

Propriété

Pour toutes valeurs de ses variables libres :

$$\begin{array}{lr} P \vee \neg P & \textit{est VRAIE} \\ P \wedge \neg P & \textit{est FAUSSE} \end{array}$$

Démonstration. Cela découle immédiatement des définitions. ■

Propriété

(Lois de de Morgan)

La négation d'une conjonction est la disjonction des négations :

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

La négation d'une disjonction est la conjonction des négations :

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

Démonstration. Comparons leur table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

d'où l'équivalence $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.

Propriété

(Lois de de Morgan)

La négation d'une conjonction est la disjonction des négations :

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

La négation d'une disjonction est la conjonction des négations :

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

d'où l'équivalence $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$. ∎

Propriété

Distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ et de $\vee$ sur $\wedge$.

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Démonstration. Comparons leur table de vérité.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(\wedge) \vee (\wedge)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

D'où l'équivalence $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Propriété

Distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ et de $\vee$ sur $\wedge$.

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(\cdot \vee \cdot) \wedge (\cdot \vee$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	F

D'où l'équivalence $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$. ■

Exercice 2. Simplifier :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\ \text{b)} & \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee (Q \wedge P))) \end{array}$$

a)

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) &\equiv (P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \\ &\equiv P \vee \neg P \equiv VRAI \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee (Q \wedge P))) &\equiv P \vee \neg(\neg Q \vee (Q \wedge P)) \\ &\equiv P \vee (Q \wedge \neg(Q \wedge P) \\ &\equiv P \vee (Q \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \\ &\equiv P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\equiv P \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) \\ &\equiv P \vee Q \end{aligned}$$

Définition de l'implication

Définition

Soient P et Q deux assertions ; l'implication $\Longrightarrow$ est un connecteur logique défini par :

$$(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$$

et se lit "P implique Q".

Méthode. Pour montrer la proposition $P \Longrightarrow Q$:

On suppose que pour une valeur de ses variables libres, $\neg P$ est FAUX, et on montre que pour ces même valeurs Q est VRAIE.

Autrement dit : on suppose que pour une valeur de ses variables libres P est VRAI, et on montre qu'alors pour ces mêmes valeurs Q est VRAI.

Pour montrer que la proposition $P \Longrightarrow Q$ est FAUSSE :

on montre que pour une valeur de ses variables libres, on a P sans avoir Q.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$; montrons que $x = -1 \Longrightarrow x^2 = 1$.

Supposons que $x = -1$; alors $x^2 = (-1) \times (-1) = 1$.

Montrons que $x^2 = 1 \Longrightarrow x = -1$ est faux.

En prenant $x = 1$, on a bien $x^2 = 1 \times 1 = 1$ sans avoir $x = -1$.

Remarque. L'assertion $P \Longrightarrow Q$ se lit aussi :

– Si P alors Q,

– P est une condition suffisante à Q,

– Pour avoir Q il suffit d'avoir P,

– Q est une condition nécessaire à P,

– Pour avoir P il est nécessaire d'avoir Q.

Exercice 3. Donner la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On constate que l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est fausse exactement lorsqu'on a P sans avoir Q.

Négation d'une implication

Propriété

La négation de l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est :

$$\neg(P \Longrightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q.$$

Remarque. L'implication $P \Longrightarrow Q$ est fausse dès que P est vraie sans que Q le soit.

Exercice 4. Soient a et b deux entiers naturels. On considère les deux assertions P et Q :

$$P \equiv (a \text{ divise } b) \Longrightarrow (a^2 \text{ divise } b)$$
$$Q \equiv (a^2 \text{ divise } b) \Longrightarrow (a \text{ divise } b)$$

a) Donner la négation de P et de Q.

b) Lesquelles des propositions P, Q, $\neg P$, $\neg Q$ sont-elles vraies ?

a) On a :

$$\neg P \equiv (a \text{ divise } b) \text{ et } (a^2 \text{ ne divise pas } b)$$
$$\neg Q \equiv (a^2 \text{ divise } b) \text{ et } (a \text{ ne divise pas } b)$$

b) Seule la proposition Q est vraie. Montrons-là :

Supposons que pour deux entiers a et b, a^2 divise b ; c'est à dire $b = a^2 \times c$ pour un certain entier c et donc $b = a \times (a \times c)$ avec $a \times c \in \mathbb{N}$. Donc par définition, a divise b.

Les trois autres propositions sont fausses ; pour $\neg Q$ c'est clair puisque Q est vraie.
Pour P et $\neg P$, exhibons des contre-exemples :

– Pour P : avec $a = 2$ et $b = 10$: 2 divise 10 sans que $2^2 = 4$ ne divise 10.

– Pour $\neg P$: avec $a = 2$ et $b = 20$: 2 et $2^2 = 4$ divisent tous les deux 20.

Réciproque d'une implication ; équivalence

Définition

La réciproque de l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est l'assertion $Q \Longrightarrow P$.

Remarque. On ne peut rien déduire de la valeur de vérité de $Q \Longrightarrow P$ connaissant celle de $P \Longrightarrow Q$.

Exemples : Soit x un nombre réel ;

$$x = -1 \Longrightarrow x^2 = 1 \qquad \text{est VRAIE}$$

$$\text{sa réciproque} \quad x^2 = 1 \Longrightarrow x = -1 \qquad \text{est FAUSSE}$$

Car pour $x = 1$ on a bien $x^2 = 1$ sans que $x = -1$.

$$x = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \qquad \text{est VRAIE}$$

$$\text{sa réciproque} \quad x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \qquad \text{est VRAIE}$$

Par intégrité de la multiplication.

$x^2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 0$ est FAUSSE

sa réciproque $x \geq 0 \Longrightarrow x^2 \geq 0$ est VRAIE

Car pour $x = -1$ on a $x^2 \geq 0$ et $x < 0$.

Définition

Soient P et Q deux assertions, l'assertion $P \iff Q$ est définie par :

$$(P \iff Q) \equiv ((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P))$$

et se lit <u>P est équivalent à Q</u>.

Exercice 5. Donner la table de vérité de $(P \iff Q)$:

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

On constate que l'assertion $P \iff Q$ est vraie exactement lorsque P et Q ont même valeur de vérité.

On en déduit :

Propriété

La proposition $P \iff Q$ est vraie si et seulement si les deux assertions P et Q sont équivalentes $(P \equiv Q)$.

Contraposée d'une implication

On a par définition de l'implication :

$$\begin{aligned}
P \Longrightarrow Q &\equiv \neg P \vee Q & \\
&\equiv Q \vee \neg P & \text{par commutativité du ou} \\
&\equiv \neg(\neg Q) \vee \neg P & \text{d'après la propriété 1} \\
&\equiv (\neg Q) \Longrightarrow (\neg P) & \text{par définition de } \Longrightarrow
\end{aligned}$$

Définition

L'implication

$$(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$$

s'appelle la contraposée de l'implication

$$P \Longrightarrow Q.$$

Elles ont même valeur de vérité.

Exemple. La contraposée de

$$x = -1 \Longrightarrow x^2 = 1$$

est :

$$x^2 \neq 1 \Longrightarrow x \neq -1.$$

Ce sont deux propositions vraies.

Exercice 6. Donner la contraposée de chacune des implications suivantes :

– Quand il pleut la route est mouillée.

Si la route est sèche, c'est qu'il ne pleut pas.

– Un élève travaillant sérieusement son cours de maths aura la moyenne en maths.

Un élève n'ayant pas eu la moyenne en maths n'a pas travaillé sérieusement son cours de math.

– $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$

$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

– $(x \leq y$ et $y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$

$x > z \Longrightarrow (x > y$ ou $y > z)$

Méthode. Pour démontrer une implication $P \Longrightarrow Q$, on peut soit montrer l'implication directe, en supposant P vraie et en établissant que Q est aussi vraie, soit montrer la contraposée en supposant que Q est faux et en établissant que P aussi est faux.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{Z}$; montrer que n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair.

On montre sa contraposée : n impair $\Longrightarrow$ n^2 impair. Supposons donc l'existence d'une entier k tel que : $n = 2k + 1$. Alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{N}} + 1$$

et donc par définition n^2 est impair.

On en déduit donc que si n^2 est pair, alors n est aussi pair.

Définition des quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Définition

Soit $P(x)$ une assertion contenant $x \in E$ comme variable libre.

L'assertion :

$$\forall x \in E, P(x)$$

signifie :

$$\textit{Pour tout } x \textit{ dans } E,\ P(x)$$

Le symbôle $\forall$ s'appelle le quantificateur universel.

L'assertion :

$$\exists x \in E, P(x)$$

signifie :

$$\textit{Il existe } x \textit{ dans } E,\ P(x)$$

Le symbôle $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.

Dans les assertions, "$\forall x \in E, P(x)$" et "$\exists x \in E, P(x)$" la variable x n'est plus libre : elle est liée.

Remarque.

– La proposition $\forall x \in E, P(x)$ est vraie lorsque l'assertion $P(x)$ est vraie pour toute valeur de x. Elle a donc même valeur de vérité que la proposition $P(x)$.

– La proposition $\exists x \in E, P(x)$ est vraie lorsque pour une valeur $x = a \in E$, la proposition $P(a)$ est vraie.

Méthode.

– Pour prouver la proposition $\forall x \in E, P(x)$: on prend $x \in E$ quelconque et on montre que la proposition $P(x)$ est vraie.

Exemple : prouvons la proposition : $\forall n \in \mathbb{N}, 1$ divise n.

Soit n un entier naturel quelconque ; alors $n = 1 \times n$, donc 1 divise n. Ainsi tout entier naturel est divisible par 1.

– Pour prouver la proposition $\exists x \in E, P(x)$: on peut exhiber une valeur de x pour laquelle $P(x)$ est vraie.

Exemple : prouvons la proposition : $\exists n \in \mathbb{N}, n$ divise 1.

Pour $n = 1$ on a bien 1 divise 1, puisque $1 = 1 \times 1$. Ainsi la proposition est vraie.

Exercice 8. Prouver la proposition suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n} \leq 10^{-m}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors :

$$\frac{1}{n} \leq 10^{-m} \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10^m} \iff 1 \times 10^m \leq 1 \times n \iff 10^m \leq n$$

Il suffit donc de choisir $n = 10^m \in \mathbb{N}^*$ pour que $\frac{1}{n} \leq 10^{-m}$.
On a montré que pour une valeur quelconque de $m \in \mathbb{N}$:

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n} \leq 10^{-m}$$

et donc : $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{n} \leq 10^{-m}$.

Remarque. Attention, pour le quantificateur existentiel, il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ signifie qu'il existe au moins un $x \in E$ pour lequel $P(x)$ est vraie.

Pour dire : "Il existe exactement un $x \in E$ tel que $P(x)$", on fait suivre le quantificateur existentiel d'un point d'exclamation :

Exemple : les deux propositions suivantes sont vraies :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \ \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \ \exists ! x \in \mathbb{R}_+, x^2 = a$$

Pour la première il peut exister 2 valeurs de $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant l'assertion $x^2 = a$: $x = \pm\sqrt{a}$.

Pour la deuxième, il n'existe qu'une valeur de $x \in \mathbb{R}_+$ satisfaisant l'assertion $x^2 = a$: $x = \sqrt{a}$.

Exercice 9. Traduire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

a) f est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$

b) Le polynôme P admet au moins une racine réelle.

$\exists x \in \mathbb{R}, P(x) = 0.$

c) La fonction g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[0,1]$.

$\exists ! x \in [0,1], g(x) = 0$

Négation d'une proposition avec quantificateurs

Propriété

Soit $P(x)$ une assertion contenant x comme variable libre.

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg P(x)$$
$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \equiv \forall x \in E, \neg P(x)$$

Démonstration. L'assertion $\neg(\forall x \in E, P(x))$ est vraie lorsque l'assertion $\forall x \in E, P(x)$ est fausse, c'est à dire lorsque pour au moins une valeur de x, l'assertion $\neg P(x)$ est vraie. D'où la première équivalence.

L'assertion $\neg(\exists x \in E, P(x))$ est vraie lorsque l'assertion $\exists x \in E, P(x)$ est fausse, c'est à dire lorsque pour aucune valeur de x, $P(x)$ n'est vraie, c'est à dire lorsque pour toute valeur de x, $\neg P(x)$ est vraie. D'où la deuxième équivalence. ∎

Exemple. Les négations de :

– "Tous les élèves sont arrivés à l'heure ce matin", est :
"Un élève (au moins) est arrivé en retard".

– "Un élève (au moins) n'a pas eu la moyenne au DS", est :
"Tous les élèves ont eu la moyenne au DS".

Exercice 10. Donner la négation des propositions suivantes :

a) $\forall x \in E, \forall y \in F, \ x \leq y$

$\exists x \in E, \exists y \in F, \ x > y$

b) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq M$

$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}, \ |u_n| > M$

c) $\forall x \in E, \ P(x) \Longrightarrow Q(x)$

$\exists x \in E, \ P(x) \wedge \neg Q(x)$

d) $(\forall x \in E, \ P(x)) \Longrightarrow (\forall x \in E, \ Q(x))$

$(\forall x \in E, \ P(x)) \wedge (\exists x \in E, \ \neg Q(x))$

Méthode.

Pour montrer que la proposition $\forall x \in E, P(x)$ est fausse, on peut montrer que pour au moins une valeur de $x \in E$, la proposition $P(x)$ est fausse.

Pour montrer que la proposition $\exists x \in E, P(x)$ est fausse, on peut montrer que pour toute valeur de x la proposition $P(x)$ est fausse.

Ordre des quantificateurs

L'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est important : les permuter donne un énoncé qui en général n'est pas équivalent.

Exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, \ xy = 1$$

est vrai : pour $x \in \mathbb{R}^*$ quelconque, il suffit de prendre $y = \frac{1}{x}$.

$$\exists y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in R^*, \ xy = 1$$

est faux : en effet si pour $x \in \mathbb{R}^*$, $xy = 1$ alors par exemple $(2x)y = 2 \neq 1$ et $2x \in \mathbb{R}^*$. Ainsi quelque soit $y \in \mathbb{R}^*$, l'assertion $\forall x \in R^*, xy = 1$ est fausse.

Par contre, en présence de quantificateurs tous de même type (existentiels ou universels) et placés en début d'assertion, on a le droit de permuter leur ordre :

Propriété

$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ P(x,y) \equiv \forall y \in F, \forall x \in E,\ P(x,y)$$
$$\exists x \in E, \exists y \in F,\ P(x,y) \equiv \exists y \in F, \exists x \in E,\ P(x,y)$$

Démonstration. Pour la première, sa vérité équivaut à ce que pour toute valeur de $x \in E$ et de $y \in F$, $P(x,y)$ soit vraie.

Pour la seconde sa vérité équivaut à ce que pour au moins une valeur de $x \in E$ et de $y \in F$, $P(x,y)$ soit vraie.

Par commutativité du et logique, on a bien l'équivalence. ∎