Bases mathématiques : Logique, raisonnement, ensembles
Partie 2 : Méthodes de raisonnement

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Méthodes de raisonnement

- Quantifier universellement les variables libres
- Preuve par l'absurde
- Comment prouver $\forall x \in E, P(x)$
- Comment prouver que $\exists\, x \in E, P(x)$
- Comment montrer $\exists\,!\, x \in E,\ P(x)$
- Comment montrer une implication $P \implies Q$
- Comment prouver une équivalence $P \iff Q$
- Raisonnement par analyse et synthèse
- Preuve par récurrence

Méthodes de raisonnement

Dans cette partie nous passons en revue les différentes méthodes pour démontrer une proposition.

Quantifier universellement les variables libres

Donnée une proposition, on peut commencer par ajouter un quantificateur universel pour chacune de ses variables libres. On obtient une proposition équivalente ne contenant aucune variable libre.

Comme deja remarqué :

Propriété

Soit $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une proposition contenant les variables libres $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $\ldots$, $x_n \in E_n$. La proposition $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a même valeur de vérité que la proposition :

$$\forall\, x_1 \in E_1, \forall\, x_2 \in E_2, \ldots, \forall\, x_n \in E_n,\ \ P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

qui ne contient, elle, plus aucune variable libre.

Remarque. Les quantificateurs sont en début de proposition ; leur ordre ne change rien à la valeur de vérité.

Cela clarifie la proposition, et permet d'éviter des erreurs en passant à la négation.
Pour une proposition sans aucune variable libre, on a en effet :

Propriété

Soit P une proposition sans aucune variable libre. Alors P et sa négation $\neg P$ ont des valeurs de vérité contraires. Autrement dit :

$$P \vee \neg P \quad \text{est VRAIE}$$
$$P \wedge \neg P \quad \text{est FAUSSE}$$

Démonstration. Lorsque P ne contient aucune variable libre, sa valeur de vérité est aussi celle en tant qu'assertion. Le résultat découle alors immédiatement de la propriété 6. ■

Exercice 11 Transformer les propositions suivantes en des propositions équivalentes ne contenant aucune variable libre.

a) Soit x, y deux réels ; $x < y \Longrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\ x < a < y$:

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R},\ x < y \Longrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R},\ x < a < y.$

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\left|\frac{1}{n}\right| \leq \varepsilon$:

$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| \leq \varepsilon.$

Preuve par l'absurde

Soit P une proposition sans variable libre. Pour montrer P, on suppose sa négation $\neg P$ et on en déduit une contradiction, c'est à dire Q et $\neg Q$.
L'hypothèse $\neg P$ est donc fausse, P est donc vraie.

Exemple. Montrons que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ est un rationnel. Alors $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous forme irréductible :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{avec } p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}$$

Alors, en élevant au carré :

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Longrightarrow 2q^2 = p^2$$

Donc p^2 est un entier pair. Mais puisque n^2 pair implies n pair (cf. preuve en exercice plus haut), p aussi est un nombre pair, disons, $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$.

Ainsi :

$$2q^2 = (2p')^2 = 4p'^2 \Longrightarrow q^2 = 2p'^2$$

Donc q^2 est pair, et donc q aussi est pair.

Mais donc p et q ont 2 pour diviseur commun. Cela contredit le fait que p et q ont été choisis premiers entre eux. Contradiction.

Ainsi $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Exemple. Montrons qu'il existe un nombre infini de nombres premiers.

Par l'absurde : supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers, disons $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n$.

Notons $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Alors $p_n < N$ et donc N n'est pas premier ; puisque $1 < N$, N est donc divisible par un nombre premier, $p_1, p_2, \ldots,$ ou p_n ; disons que N est divisible par p_k.

Puisque N et $p_1 p_2 \cdots p_n$ sont tous les deux divisibles par p_k :

$$1 = N - p_1 p_2 \cdots p_n \text{ est divisible par } p_k > 1$$

Si $a = b + c$ et a et b sont divisibles par d alors $a - b = c$ est divisible par d.

Or 1 a pour seul diviseur dans $\mathbb{N}$ lui-même, et donc $p_k = 1$. Contradiction.

Comment prouver $\forall x \in E, P(x)$

• Le plus souvent, on prend $x \in E$ quelconque, et on prouve $P(x)$ pour cette valeur.

Exemple. Montrer que tout entier naturel est pair ou impair.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Effectuons la division euclidienne de n par 2 ; il existe donc $q \in \mathbb{N}$ et r valant 0 ou 1 tel que : $n = 2q + r$.

Si $r = 0$ alors $n = 2q$ et donc n est pair.

Si $r = 1$ alors $n = 2q + 1$ et donc n est impair.

Ainsi n est pair ou impair.

• On peut appliquer une disjonction de cas : si $E = E_1 \cup E_2$ on prouve séparément que $\forall x \in E_1, P(x)$ et $\forall x \in E_2, P(x)$.

C'est surtout le cas lorsque $P(x)$ contient des termes définis eux-mêmes par disjonction de cas, sur E_1 et sur E_2.

Exemple. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$.

Rappelons que :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

– Premier cas : si $x \geq 0$.

Alors x est un réel positif dont le carré vaut x^2, et par définition de la racine carrée $\sqrt{x^2} = x$. D'autre part, par définition de la valeur absolue, $|x| = x$.

Ainsi, lorsque $x \geq 0$: $\sqrt{x^2} = |x|$.

– Deuxième cas : si $x \leq 0$.

Alors $-x$ est un réel positif, et $(-x)^2 = x^2$; donc par définition de la racine carrée, $\sqrt{x^2} = -x$. Et par définition de la valeur absolue $|x| = -x$.

Ainsi, lorsque $x \leq 0$: $\sqrt{x^2} = |x|$.

On en déduit que pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

• Plus rarement, on procède par l'absurde, en supposant que $\exists x \in E, \neg P(x)$ pour aboutir à une contradiction.

Exemple. Soit a un irrationnel. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \times a$ est aussi un irrationnel.

Par l'absurde : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \times a$ soit un rationnel. Alors $n \times a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. Mais alors en divisant par n :

$$a = \frac{p}{n \times q}$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ et donc $n \times q \in \mathbb{Z}^*$. Donc a est un rationnel. Contradiction.

Comment prouver que $\exists x \in E, P(x)$

- Souvent : on construit un $x \in E$ satisfaisant $P(x)$.

Exercice Montrer que $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} < 2^{-1000}$. On a :

$$\frac{1}{n} < 2^{-1000} \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{2^{1000}} \iff 1 \times 2^{1000} < 1 \times n \iff 2^{1000} < n$$

En prenant $n = 2^{1000} + 1 \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\frac{1}{n} < 2^{-1000}$.

Les propositions de la forme $\exists x \in E, P(x)$ sont souvent les plus difficiles à prouver : construire $x \in E$ vérifiant $P(x)$ demande parfois un peu d'imagination.

Exercice Soient a et b deux nombres rationnels avec $a < b$. Montrer qu'il existe un rationnel c tel que $a < c < b$.

Considérons $c = \frac{1}{2}(a+b)$; (c'est le milieu de a et b sur la droite réelle) ; c est un rationnel car somme et produit de rationnels sont rationnels.
D'autre part :

$$b - c = b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0 \Longrightarrow c < b$$

$$a - c = a - \frac{a+b}{2} = \frac{2a-a-b}{2} = \frac{a-b}{2} < 0 \Longrightarrow a < c$$

Ainsi on a construit $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$: entre deux rationnels il y en a toujours un troisième !

• Souvent : on applique un théorème important qui assure de l'existence de $x \in E$ vérifiant $P(x)$.

Exercice Montrer que $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$.

On applique le théorème des valeurs intermédiaires : si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

D'une part la fonction $x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ est continue sur $\mathbb{R}$, car polynomiale.
D'autre part : $f(0) = 4 > 0$ et $f(-2) = -8 + 2 \times 4 - 3 \times 2 + 4 = -2 < 0$.
Ainsi d'après le T.V.I. il existe $x \in [-2, 0]$ tel que $f(x) = 0$.

• Plus rarement, on procède par l'absurde, en supposant que $\forall x \in E, \neg P(x)$, pour en déduire une contradiction.

Exemple. Dans une classe d'au moins 4 élèves, l'élection d'un délégué est organisée de la façon suivante : chaque élève vote pour l'un de ses autres camarades. Montrer que deux élèves ont nécessairement obtenu le même nombre de voix.

Soit $N \geq 4$ le nombre d'élèves. Procédons par l'absurde, en supposant que tous les élèves ont obtenu un nombre de voix différents. Donc soit :

$$V_1 < V_2 < V_3 < \cdots < V_N$$

leur nombre de voix respectifs. Le nombre total de voix étant égal au nombre de votants N, on a :

$$V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_N = N$$

Mais puisque les V_i sont des entiers positifs tous différents :

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (N-1) \leq V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_N = N$$

Or :

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$$

(comme somme des N premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.). Ainsi :

$$\frac{N(N-1)}{2} \leq N \Longrightarrow \frac{N-1}{2} \leq 1 \Longrightarrow N-1 \leq 2 \Longrightarrow N \leq 3$$

C'est impossible puisque $N \geq 4$. CQFD

Comment montrer $\exists ! x \in E, P(x)$

- On procède toujours en montrant séparément l'existence et l'unicité.

Pour établir l'unicité on se donne $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $P(x_1)$ et $P(x_2)$, et on en déduit que $x_1 = x_2$.

Exercice Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(f(x)) = x \quad (1) \quad \text{et} \quad f(g(x)) = x \quad (2)$$

- Existence : la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ convient ; $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$:

$$g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x \quad \text{et} \quad f(g(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

• Unicité : Supposons l'existence de 2 fonctions g_1 et g_2 définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant (1) et (2).

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ quelconque :

$$f(g_1(x)) = x = f(g_2(x)) \qquad \text{d'après (2)}$$

$$\text{donc} \quad g_1(f(g_1(x))) = g_1(f(g_2(x))) \qquad \text{en composant par } g_1$$

$$\text{Or} \quad g_1(f(\underbrace{g_1(x)}_{=X\in\mathbb{R}_+})) = g_1(x) \text{ et } g_1(f(\underbrace{g_2(x)}_{=X'\in\mathbb{R}_+})) = g_2(x) \qquad \text{d'après (1)}$$

$$\text{donc} \quad g_1(x) = g_2(x)$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g_1(x) = g_2(x)$; donc $g_1 = g_2$. D'où l'unicité.

Comment montrer une implication $P \Longrightarrow Q$

Il y a deux méthodes :

- Par raisonnement direct. On suppose P, et on en déduit Q.
- Par contraposée. On suppose $\neg Q$, et on en déduit $\neg P$.

Exercice

a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R}$,

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2).$$

b) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R}$,

$$x \neq y \Longrightarrow x^3 \neq y^3.$$

a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ quelconques.

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3\\ &= x^3-y^3\end{aligned}$$

b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ quelconques. Montrons la contraposée de l'implication recherchée : $x^3 = y^3 \Longrightarrow x = y$.

Supposons que $x^3 = y^3$; alors $x^3 - y^3 = 0$. D'après a) :

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ \text{ou} \\ x^2+xy+y^2=0 \end{cases}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque fixé ; le trinôme $x^2 + xy + y^2$ en x a pour discriminant $\Delta = y^2 - 4y^2 = -3y^2 \leq 0$. Ainsi pour que l'on ait $x^2 + xy + y^2 = 0$ pour des réels x et y, nécessairement $\Delta = 0$, ce qui implique $y = 0$ puis $x^2 = 0$. Donc $x = y = 0$.

Ainsi, si $x^3 = y^3$, alors $x - y = 0$ ou $x = y = 0$. Dans tous les cas, $x = y$, ce qui prouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Longrightarrow x^3 \neq y^3.$$

Comment prouver une équivalence $P \Longleftrightarrow Q$

• Raisonnement par équivalence. Lorsque c'est possible on part de P (respectivement Q) que l'on transforme successivement en des propositions équivalentes jusqu'à aboutir à Q (respectivement P).

$$P \Longleftrightarrow P_1 \Longleftrightarrow P_2 \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow Q$$

Ce n'est pas toujours possible : on doit conserver l'équivalence à chaque étape ! Dans tous les autres cas :

• On montre séparément les deux implications $P \Longrightarrow Q$ et sa réciproque $Q \Longrightarrow P$ (par raisonnement direct ou par contraposée).

Exercice Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

$(\Rightarrow)$ Supposons n pair : donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$ et donc :

$$n^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2 \times \underbrace{(2p^2)}_{\in \mathbb{Z}}$$

donc n^2 est pair. Cela montre l'implication directe.

$(\Leftarrow)$ Montrons le sens réciproque : n^2 pair implique n pair. Par contraposée ; on suppose que n est impair, donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p + 1$. Alors :

$$n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2 \times \underbrace{(2p^2 + 2p)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$$

et donc n^2 est impair. Cela prouve la réciproque.

Raisonnement par analyse et synthèse

Parfois, dans des exercices plus difficiles, on attend que l'on prouve une équivalence $P \Longleftrightarrow Q$ mais en ne nous donnant que P et en attendant en plus que l'on détermine Q.

Cela survient lorsque le problème consiste à déterminer tous les éléments d'un ensemble vérifiant certaines propriétés.

Par exemple : résoudre l'équation $x = \sqrt{2x-1}$ dans $\mathbb{R}$ revient à montrer l'équivalence entre les deux assertions $(x \in \mathbb{R}$ et $x = \sqrt{2x-1})$ et $(x = 1)$.

S'il est possible de procéder par équivalence, c'est le plus simple. Sinon l'analogue d'un raisonnement par implication directe et par réciproque s'appelle un raisonnement par analyse et synthèse.

Le principe est le suivant :

• Raisonnement par analyse et synthèse. On procède dans l'ordre :

– D'abord, dans la partie Analyse, on déduit de P des conditions nécessaires.

– Ensuite dans la partie Synthèse, on détermine quels éléments vérifiant ces conditions nécessaires, satisfont aussi P. Cela définit Q.

Lorsque l'analyse est menée suffisamment loin, Q sera équivalent aux conditions nécessaires obtenues durant l'analyse.
Sinon on pourra toujours affiner ces conditions dans la partie synthèse pour obtenir Q.

Exercice Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x = \sqrt{2x-1}$ par analyse et synthèse.

Analyse. Pour que $x = \sqrt{2x-1}$ nécessairement $2x - 1 \geq 0$ et donc $x \geq \frac{1}{2}$ et :

$$x = \sqrt{2x-1} \Longrightarrow x^2 = 2x - 1 \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Synthèse. Pour $x = 1$, on a :

$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{1} = 1 = x$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{1\right\}$.

Remarquons qu'on aurait pu aussi ici procéder par équivalence en considérant deux cas, selon que $x < 0$ ou $x \geq 0$.

Exemple. Un peu plus difficile, un cas où le raisonnement par analyse et synthèse s'impose :

Déterminer toutes les fonction f définies et continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left[f(x)\right]^2 \qquad (*)$$

Analyse. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ satisfaisant $(*)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \times (1 - f(x)) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ \text{ou} \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

D'autre part :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1).$$

En effet, sinon, il existerait $x_1 < x_2$ tel que $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 1$ (ou l'inverse). Mais puisque f est continue, d'après le T.V.I., il existerait aussi $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}$. Ce qui est impossible. Donc nécessairement f est la fonction réelle constante égale à 0 ou à 1.

Synthèse. Les fonctions réelles constantes égale à 0 ou à 1 satisfont $(*)$, puisque si $f(x) = 0$ alors $f(x)^2 = 0$ et si $f(x) = 1$ alors $f(x)^2 = 1$. De plus elles sont toutes les deux continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi les réponses au problème sont les 2 fonctions constantes égales à 0 ou 1.

Preuve par récurrence

C'est une méthode de démonstration importante, mais qui ne s'applique qu'aux propositions portant sur des entiers.

Principe de récurrence

Théorème

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

– $\mathscr{P}(n_0)$. (Initialisation), et

– Pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$. (Hérédité).

Alors pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. On se rappelle que l'ensemble des entiers naturels est le plus petit ensemble contenant 0 et contenant le successeur de chacun de ses éléments.

Notons $P(n - n_0) = \mathscr{P}(n)$. Alors $P(n) = \mathscr{P}(n + n_0)$ et on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(n_0) \equiv & P(0), \text{ et} \\ & \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow (\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)) \\ \equiv & \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 0 \Longrightarrow (P(n) \Longrightarrow P(n+1))\end{aligned}$$

Donc l'assertion $P(n)$ est vérifiée pour $n = 0$, et dès qu'elle est vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi pour son successeur $(n+1)$. Elle est donc vérifiée pour tout entier naturel. Donc $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier naturel $n \geq n_0$. ■

Remarque. Le principe de récurrence reste vrai lorsque n et n_0 sont des entiers relatifs.

Méthode. Rédaction d'une récurrence :

" Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$.

Initialisation. $\mathscr{P}(n_0)$ car ...

Hérédité. Soit $n \geq n_0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

...

D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $\mathscr{P}(n)$. "

Exemple. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 4^n$ est divisible par 9.

Montrons le par récurrence, en prenant pour assertion de récurrence :

$\mathscr{P}(n) \equiv 13^n - 4^n$ est divisible par 9.

Initialisation. $\mathscr{P}(0)$ est vraie var :

$$13^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0 \text{ est divisible par } 9$$

Hérédité. Soit $n \geq 0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} 13^{n+1} - 4^{n+1} &= 13 \times 13^n - 4 \times 4^n \\ &= (9+4) \times 13^n - 4 \times 4^n \\ &= \underbrace{9 \times 13^n}_{\text{divisible par 9}} + \underbrace{4 \times (13^n - 4^n)}_{\text{divisible par 9 (HR)}} \end{aligned}$$

La somme de nombres divisibles par 9 étant aussi divisible par 9, $13^{n+1} - 4^{n+1}$ est divisible par 9. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 4^n$ est divisible par 9.

Pour prouver certains résultats, il est pratique d'utiliser certaines variantes du principe de récurrence. Nous voyons ainsi dans les parties suivantes :

– La récurrence à deux pas.

– La récurrence forte.

Récurrence à deux pas

Lorsqu'on a besoin des deux hypothèses $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ pour établir $\mathscr{P}(n+2)$, on formule de la façon suivante :

Propriété

– *Si* $\mathscr{P}(n_0)$ *et* $\mathscr{P}(n_0+1)$ *sont vraies, et*

– *Si pour tout entier* $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$ *et* $\mathscr{P}(n+1)$ *implique* $\mathscr{P}(n+2)$

Alors pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$ *est vraie.*

Démonstration. Notons $P(n) \equiv (\mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{P}(n+1))$. Sous ces hypothèses on a $P(n_0)$ et pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$. D'après le principe de récurrence $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$, et donc $\mathscr{P}(n)$ aussi. ■

Méthode. Rédaction d'une récurrence à deux pas :

" Montrons par récurrence à deux pas que pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$.

Initialisation. $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraies car ...

Hérédité. Soit $n \geq n_0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ et montrons $\mathscr{P}(n+2)$.

...

D'après le principe de récurrence à deux pas, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $\mathscr{P}(n)$. "

Exemple. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.

On procède par une récurrence à deux pas avec pour assertion de récurrence :

– $\mathscr{P}(n) \equiv (u_n = 2^n)$.

Initialisation. On a :

$$u_0 = 1 = 2^0 \quad \text{donc } \mathscr{P}(0) \text{ est vraie}$$
$$u_1 = 2 = 2^1 \quad \text{donc } \mathscr{P}(1) \text{ est vraie}$$

Hérédité. Soit $n \geq 0$; supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. Ainsi $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n \\ &= 2^{n+1} + 2 \times 2^n \\ &= 2^{n+1} + 2^{n+1} \\ &= 2 \times 2^{n+1} \\ &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence à deux pas, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

Récurrence forte

Lorsqu'on a besoin de $\mathscr{P}(n_0)$, $\mathscr{P}(n_0+1)$, ..., $\mathscr{P}(n)$ pour établir $\mathscr{P}(n+1)$, on peut appliquer le principe de récurrence forte :

Propriété

– *Si* $\mathscr{P}(n_0)$ *est vraie, et*

– *si* $(\mathscr{P}(n_0) \wedge \mathscr{P}(n_0+1) \wedge \cdots \wedge \mathscr{P}(n)) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$,

alors pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$ *est vraie.*

Démonstration. Notons $P(n) \equiv \mathscr{P}(n_0) \wedge \mathscr{P}(n_0+1) \wedge \cdots \wedge \mathscr{P}(n)$. Sous ces hypothèses on a $P(n_0)$ et pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$. Donc d'après le principe de récurrence pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie. Il en est donc de même de $\mathscr{P}(n)$. ■

Méthode. Rédaction d'une récurrence forte :

" Montrons par récurrence forte que pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$.

Initialisation. $\mathscr{P}(n_0)$ car ...

Hérédité. Soit $n \geq n_0$. Supposons que $\mathscr{P}(n_0)$, $\mathscr{P}(n_0+1)$, ..., $\mathscr{P}(n)$ soient toutes vraies et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

...

D'après le principe de récurrence forte, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $\mathscr{P}(n)$. "

Exemple. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, \ n = 2^k \times (2q+1)$$

(autrement dit, tout entier ≥ 1 est produit d'une puissance de 2 et d'un nombre impair.)

Prouvons-le par récurrence forte. Soit :

– $\mathscr{P}(n) \ \equiv \ (\exists k \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, \ n = 2^k \times (2q+1))$.

Initialisation. $\mathscr{P}(1)$ est vraie car $1 = 2^0 \times (2 \times 0 + 1)$ (donc en prenant $k = q = 0$).

Hérédité. Soit $n \geq 1$. Supposons que pour tout entier m entre 1 et n, $\mathscr{P}(m)$ soit vraie, et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

Considérons 2 cas selon la parité de $n+1$:

Premier cas : si $n+1$ est impair. Alors il existe $q \in \mathbb{N}$, tel que $n+1 = 2q+1$ et donc

$$n+1 = 2^0 \times (2q+1)$$

Dans ce cas, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie (en prenant $k = 0$).

Deuxième cas : si $n+1$ est pair. Alors $\frac{n+1}{2}$ est un entier et puisque $n \geq 1$, $1 \leq \frac{n+1}{2} < n+1$. Ainsi par hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ est vraie :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{2} = 2^k \times (2q+1)$$
$$\Longrightarrow\ n+1 = 2^{k+1} \times (2q+1)$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence forte, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Quand utiliser une récurrence ?

Toutes les conditions suivantes doivent être réunies :

– On démontre une proposition portant sur des entiers.

– La proposition à démontrer est donnée par l'énoncé.

– Pour établir $\mathscr{P}(n+1)$ il faut supposer $\mathscr{P}(m)$ vraie (avec $m \leq n$). (Sinon il faut effectuer une preuve sans récurrence.)

En général lorsque la proposition s'applique à des choses elles-mêmes définies par récurrence. Exemple : puissances a^n, suites définies par une relation de récurrence, etc...

Exemples.

– Récurrence simple ; cas fréquent :

Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \cdots \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n =$"expression de n".

– Récurrence double ; cas fréquent :

Soit (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \cdots \\ u_1 = \cdots \\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n =$"expression de n".

– Récurrence forte : lorsque pour établir $\mathscr{P}(n+1)$ on a besoin de $\mathscr{P}(m)$ pour $m < n+1$.

Lorsqu'une récurrence forte est nécessaire l'énoncé l'indiquera, souvent en stipulant :

"Montrer par récurrence en prenant pour assertion de récurrence :

$\mathscr{P}(n) \equiv \ (\forall m \in \mathbb{N}, n_0 \leq m \leq n \implies P(n))$. "

On pourra alors soit procéder par récurrence simple avec l'assertion de récurrence $\mathscr{P}(n)$ donnée, soit par un récurrence forte sur l'assertion de récurrence $P(n)$.