Bases mathématiques : Logique, raisonnement, ensembles
Partie 3 : Les ensembles

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Ensembles, sous-ensembles, éléments

Définition

Soit E un ensemble, et x un élément de E ; on note $x \in E$ et on lit :

"x appartient à E".

Un ensemble est défini à partir de ses éléments : deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont mêmes éléments.

L'ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ peut s'écrire à l'aide de ses éléments entre accolades (et dans n'importe quel ordre) :

$$\left\{a_1, a_2, \ldots, a_n\right\}$$

Le singleton $\left\{a\right\}$ est l'ensemble contenant pour seul élément a.

L'ensemble ne contenant aucun élément est l'ensemble vide ; on le note $\varnothing$.

Remarques. $\varnothing$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont des ensembles.

- $x \notin A$ est la négation de $x \in A$; il signifie x n'est pas un élément de A.
- $A \ni x$ est équivalent à $x \in A$ et se lit "A contient l'élément x".

Définition

Si A et E sont deux ensembles, et si tout élément de A est aussi élément de E, autrement dit :

$$x \in A \implies x \in E$$

on dit que A est un sous-ensemble de E, ou une partie de E, ou que A est inclus dans E.
On note :

$$A \subset E.$$

L'ensemble vide $\varnothing$ est inclus dans tout autre ensemble :

$$\varnothing \subset E$$

Remarque. $\varnothing \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Propriété

Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$. (Transitivité).

$A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Démonstration. Découle immédiatement des définitions.

Méthode. Pour montrer que deux ensembles sont égaux : $A = B$:
Dans les cas simples on procède par équivalence en montrant que :

$$x \in A \iff x \in B.$$

Dans tous les autres cas on montre les deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

Définition

Si E est un ensemble, et si $P(x)$ est une assertion portant sur $x \in E$, alors :

$$A = \left\{x \in E \mid P(x)\right\}$$

est le sous-ensemble de E dont les éléments sont tous les éléments de E pour lesquels $P(x)$ est vraie.

Exemples.

$$\mathbb{R}_+ = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\right\} \qquad \mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}^*, x = \frac{p}{q}\right\}.$$

– Si a et b sont deux réels, on note :

$$[a, b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\right\} \qquad [a, b[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\right\}$$

$$]a, b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\right\} \qquad]a, b[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\right\}$$

– Si $a \leq b$ sont deux entiers relatifs, on note :

$$[\![a, b]\!] = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\right\} = \left\{a, (a+1), \ldots, (b-1), b\right\}$$

Définition

Lorsque f est une fonction définie sur E, on peut aussi définir :

$$\left\{f(x) \mid x \in E\right\}$$

C'est l'ensemble des images par f des éléments de E.

On peut aussi définir certaines parties de $\mathbb{R}$ à l'aide des opérations usuelles :

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$; alors :

$$aA = \left\{a \times z \mid z \in A\right\} \qquad ; \qquad a + A = \left\{a + z \mid z \in A\right\}$$

Exemple. En guise d'exemples très fréquents :

$$\pi\mathbb{Z} = \left\{k \times \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad ; \qquad \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{2} + k \times \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ensemble des parties

L'ensemble des parties est une notion très importante, notamment en probabiltés.

Définition

Soit E un ensemble ; $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble dont les éléments sont les parties de E.

Remarque. $\mathscr{P}(E)$ n'est pas une partie de E ; il contient toujours $\varnothing$ et E comme éléments.

Il découle immédiatement :

Propriété

$$A \subset E \iff A \in \mathscr{P}(E)$$

Exemples. $\mathscr{P}(\varnothing) = \left\{\varnothing\right\}$. Si $E = \left\{0,1\right\}$, alors :

$$\mathscr{P}(E) = \left\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\right\}$$

Remarque. Attention : $\left\{\varnothing\right\} \neq \varnothing$; en effet le premier contient un élément, le second aucun.

Exercice 19. Soit $E = \left\{0, 1, 2\right\}$; donner $\mathscr{P}(E)$.

$$\mathscr{P}(E) = \left\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\right\}$$

Complémentaire

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. Le complémentaire de A dans E est :

$$\complement_E(A) = \left\{x \in E \mid x \notin A\right\}$$

S'il n'y a pas d'ambiguité on le note aussi $\overline{A}$.

Propriété

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Démonstration. Soit $x \in E$; $x \in \overline{\overline{A}} \iff \neg(x \in \overline{A}) \iff \neg\neg(x \in A) \iff x \in A.$

■

Exercice 20. Montrer que $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.

Notons E tels que $A \subset E$, $B \subset E$, $\overline{A} = \complement_E(A)$ et $\overline{B} = \complement_E(B)$. Alors :

$$A \subset B \iff (\forall x \in E, x \in A \implies x \in B)$$

En passant à la contraposée de cette l'implication :

$$\begin{aligned} &\iff (\forall x \in E, x \notin B \implies x \notin A) \\ &\iff \overline{B} \subset \overline{A} \end{aligned}$$

Réunion

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. La réunion de A et B est l'ensemble :

$$A \cup B = \left\{ x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B \right\}$$

C'est une partie de E.

Propriété

La réunion vérifie les propriétés suivantes :

- $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité).*
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativité).*
- $A \cup \varnothing = A$
- *Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.*
- $A \subset A \cup B$ *et* $B \subset A \cup B$.
- $(A \subset C \text{ et } B \subset C) \implies A \cup B \subset C$.

Démonstration. Elles découlent toutes des propriétés du ou logique. Par exemple la commutativité découle de la commutativité du ou :

$$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B) \iff (x \in B) \vee (x \in A) \iff x \in B \cup A.$$

L'associativité découle de l'associativité du ou. Toutes les autres s'obtiennent facilement à partir de la table de vérité du ou. ■

Exercice 21. Écrire plus simplement :

$$\pi\mathbb{Z} \cup 2\pi\mathbb{Z} = \pi\mathbb{Z} \quad \text{car } 2\pi\mathbb{Z} \subset \pi\mathbb{Z}.$$

Définition

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des parties de E :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \in E \mid \exists i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\right\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

Plus généralement : soit $I \subset \mathbb{Z}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E ; alors :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \left\{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\right\}$$

Intersection

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. L'intersection de A et B est l'ensemble :

$$A \cap B = \left\{ x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B \right\}$$

C'est une partie de E, mais aussi de A et de B.

Propriété

L'intersection vérifie les propriétés suivantes :

- $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité).*
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(associativité).*
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- *Si* $A \subset B$ *alors* $A \cap B = A$.
- $A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$.
- $(C \subset A \text{ et } C \subset B) \implies C \subset A \cap B$.

Démonstration. Elles découlent toutes des propriétés du et logique. Par exemple la commutativité découle de la commutativité du et :

$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B) \iff (x \in B) \wedge (x \in A) \iff x \in B \cap A.$$

L'associativité découle de l'associativité du et. Toutes les autres s'obtiennent facilement à partir de la table de vérité du et. ■

Exercice 22. Écrire plus simplement :

$$\pi\mathbb{Z} \cap 2\pi\mathbb{Z} = 2\pi\mathbb{Z} \qquad \text{car } 2\pi\mathbb{Z} \subset \pi\mathbb{Z}.$$

Définition

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des parties de E :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \in E \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\right\} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Plus généralement : soit $I \subset \mathbb{Z}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E ; alors :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \left\{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\right\}$$

Propriétés des opérateurs ensemblistes

Propriété

Distributivité

- *de* $\cap$ *sur* $\cup$ *:*
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
- *de* $\cup$ *sur* $\cap$ *:*
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Démonstration. Elles découlent de la distributivité du et sur le ou et du ou sur le et. Par exemple pour la première : Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C)) \\ &\iff ((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C)) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

■

Propriété

Soient A et B deux parties de E.

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Démonstration. Elles découlent des lois de de Morgan. Soit $x \in E$,

$$x \in \overline{A \cap B} \iff \neg(x \in A \wedge x \in B) \iff (x \notin A) \vee (x \notin B) \iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$x \in \overline{A \cup B} \iff \neg(x \in A \vee x \in B) \iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

■

Autres définitions

Définition

Soient A et B deux parties de E ; on note :

$$A \setminus B = \left\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\right\} = A \cap \complement_E B = A \cap \overline{B}$$

c'est une partie de E qui se lit A privé de B.

Exercice 23. Soit :

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

Écrire E sous la forme $A \setminus B$; on ne demande pas de justifier.

$$E = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$$

Définition

Soient $A_1, A_2, \ldots A_n$ des parties de E ; ils forment une partition de E si :

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$, *et*
- $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

Exemple. Soit $A \subset E$; A et $\overline{A}$ forment toujours une partition de E :

$$A \cup \overline{A} = E \qquad ; \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Produit cartésien

C'est une construction d'ensemble à partir de 2 ou plusieurs ensembles, qui est très importante.

Définition

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F est l'ensemble :

$$E \times F = \left\{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\right\}$$

des couples d'éléments de E et de F.

Exemple.

$$[\![0, 1]\!] \times [\![1, 2]\!] = \left\{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\right\}$$

Remarque. Ce nom de produit cartésien provient du fait que depuis Descartes, on représente des points du plan à l'aide d'un repère orthonormé par des couples de réels, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 24. Donner tous les éléments de :

$$[\![1,2]\!] \times \{0\} = \left\{(1,0),(2,0)\right\}$$

$$[\![1,2]\!] \times \{0,3\} = \left\{(1,0),(2,0),(1,3),(2,3)\right\}$$

$$[\![1,2]\!] \times [\![0,2]\!] = \left\{(1,0),(2,0),(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\right\}$$

Plus généralement :

Définition

Soient E_1, E_2, ..., E_n, n ensembles. Le produit cartésien de E_1, E_2, ..., E_n est :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1,n]\!], x_i \in E_i\right\}$$

Ses élément sont appelés des n-uplets.

Un cas particulier important survient lorsque $E_1 = E_2 = \cdots = E_n$:

Définition

Soit E un ensemble, et $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} = \Big\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E\Big\}$$

Ses éléments sont appelés des n-listes d'éléments de E.

Exercice 25. Donner tous les éléments de :

$$[\![0, 1]\!]^3 = \Big\{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\Big\}$$