Les nombres complexes

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

On renvoie au préambule pour la motivation historique et pour une esquisse de construction des nombres complexes.

Forme algébrique

Nous considérons l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \left\{ a + \mathrm{i}\, b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \qquad \text{avec } \mathrm{i}^2 = -1$$

muni des opérations + et × ; elles vérifient les mêmes propriétés que celles dans $\mathbb{R}$ données dans le chapitre 0.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$; $z = a + i\,b$ est la forme algébrique du nombre complexe z.

Sa partie réelle est $Re(z) = a$.

Sa partie imaginaire est $Im(z) = b$.

L'écriture sous forme algébrique est unique : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes partie réelle et partie imaginaire ; autrement dit :

$$a + i\,b = a' + i\,b' \iff \begin{cases} a = a' \\ \text{et} \\ b = b' \end{cases}$$

Un complexe z est réel ssi $Im(z) = 0$. Il est imaginaire pur ssi $Re(z) = 0$.

Remarques.

- L'ensemble des réels est une partie de $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- L'ensemble des imaginaires purs, noté $i\,\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$: $i\,\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

$$\mathbb{R} \cap i\,\mathbb{R} = \{0\}.$$

Propriété

$$Re(z+z') = Re(z) + Re(z')$$
$$Im(z+z') = Im(z) + Im(z')$$

Démonstration. Si $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$, alors $z + z' = (a + a') + i\,(b + b')$.$\blacksquare$

Exercice 1.

1) Écrire sous forme algébrique :

$$(1+2\mathrm{i})^2 \quad ; \quad (1-2\mathrm{i})\times(3+2\mathrm{i}) \quad ; \quad (1-2\mathrm{i})\times(1+2\mathrm{i})$$

2) Montrer que si $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$ alors :

$$\mathrm{Re}(z\times z') = aa' - bb'$$
$$\mathrm{Im}(z\times z') = ab' + a'b$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^2 = -1 \qquad ; \qquad z^2 = \mathrm{i}$$

1) Par le calcul :

$$(1+2\mathrm{i})^2 = 1^2 + 4\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2 = -3+4\mathrm{i}$$
$$(1-2\mathrm{i})\times(3+2\mathrm{i}) = 3+2\mathrm{i} - 6\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2 = 7-4\mathrm{i}$$
$$(1-2\mathrm{i})\times(1+2\mathrm{i}) = 1^2 - (2\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5$$

2) Calculons le produit $z \times z'$:

$$z\times z' = (a+\mathrm{i}\,b)\times(a'+\mathrm{i}\,b') = aa' + \mathrm{i}\,ab' + \mathrm{i}\,a'b + \mathrm{i}^2 bb' = aa' - bb' + \mathrm{i}\,(ab'+a'b)$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Re}(z\times z') = aa' - bb' \qquad \mathrm{Im}(z\times z') = ab' + a'b$$

3) Pour $z^2 = -1$:

$$z^2 = -1 \iff z^2+1 = 0 \iff z^2 - \mathrm{i}^2 = 0 \iff (z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i}) = 0$$

il y a donc deux solutions : $\pm\mathrm{i}$.

Pour $z^2 = \mathrm{i}$: d'après 2), $z = a + \mathrm{i}\, b$ est solution ssi :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \text{ et } a^2 = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ a = -b \text{ et } a^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{(impossible)} \end{cases}$$

$$\iff a = b \text{ et } a^2 = \frac{1}{2} \iff z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

On peut remarquer que les deux solutions de l'équation $z^2 = i$ s'écrivent :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle <u>conjugué</u> du complexe $z = a + ib$, le complexe :

$$\overline{z} = a - ib$$

Propriété

Lorsque bien définis :

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad ; \quad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ \overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

Démonstration. Soient $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$.

$$\overline{\overline{z}} = \overline{(a - \mathrm{i}\,b)} = a + \mathrm{i}\,b \quad ; \quad \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + \mathrm{i}\,b + a - \mathrm{i}\,b}{2} = \frac{2a}{2} = \mathrm{Re}(z)$$

$$\frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} = \frac{a + \mathrm{i}\,b - (a - \mathrm{i}\,b)}{2\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}\,b}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}(z)$$

$$\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + \mathrm{i}\,(b + b')} = (a + a') - \mathrm{i}\,(b + b') = a - \mathrm{i}\,b + a' - \mathrm{i}\,b' = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\left.\begin{array}{r} \overline{z \times z'} = \overline{(aa' - bb') + \mathrm{i}\,(ab' + a'b)} = (aa' - bb') - \mathrm{i}\,(ab' + a'b) \\ \overline{z} \times \overline{z'} = (a - \mathrm{i}\,b) \times (a' - \mathrm{i}\,b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}\,(-ab' - a'b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \times \overline{z} = \overline{\left(\frac{1}{z} \times z\right)} = \overline{1} = 1 \Longrightarrow \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ s'obtient par récurrence :

(I) Pour $n = 0$: $\overline{z^n} = \overline{1} = 1$ et $(\overline{z})^0 = 1$. L'assertion est vraie au rang $n = 0$.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé : montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$:

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} \underset{HR}{=} (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}$$

Et $\forall n \in \mathbb{Z}_-$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ s'en déduit :

Soit $n \in \mathbb{Z}_-$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$\overline{z^n} = \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)} = \frac{1}{\overline{z^{-n}}} = \frac{1}{(\overline{z})^{-n}} = (\overline{z})^n. \qquad \blacksquare$$

Exercice 2. Soit $Z = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}\right)^2$.

Exprimer $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ en fonction de z et $\overline{z}$.

On exprime d'abord $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$:

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}\right)^2} = \left(\frac{\overline{1+\mathrm{i}\,z}}{\overline{1-\mathrm{i}\,z}}\right)^2 = \left(\frac{1-\mathrm{i}\,\overline{z}}{1+\mathrm{i}\,\overline{z}}\right)^2$$

puis on applique :

$$\mathrm{Re}(Z) = \frac{Z+\overline{Z}}{2} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}\right)^2 + \frac{1}{2}\times\left(\frac{1-\mathrm{i}\,\overline{z}}{1+\mathrm{i}\,\overline{z}}\right)^2$$

$$\mathrm{Im}(Z) = \frac{Z-\overline{Z}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\times\left(\frac{1+\mathrm{i}\,z}{1-\mathrm{i}\,z}\right)^2 - \frac{1}{2\mathrm{i}}\times\left(\frac{1-\mathrm{i}\,\overline{z}}{1+\mathrm{i}\,\overline{z}}\right)^2$$

Propriété

Soit $z \in \mathbb{C}$; alors :

- *z est réel si et seulement si $z - \overline{z} = 0$.*
- *z est imaginaire pur si et seulement si $z + \overline{z} = 0$.*

Démonstration.

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} = 0 \iff z - \overline{z} = 0$$

$$z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff \frac{z + \overline{z}}{2} = 0 \iff z + \overline{z} = 0$$

$\blacksquare$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$z + \mathrm{i}\,z \text{ est un imaginaire pur.}$$

$$\begin{aligned}
z + \mathrm{i}\,z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} &\iff (z + \mathrm{i}\,z) + \overline{(z + \mathrm{i}\,z)} = 0 \\
&\iff z + \mathrm{i}\,z + \overline{z} - \mathrm{i}\,\overline{z} = 0 \\
&\iff z + \overline{z} + \mathrm{i}\,(z - \overline{z}) = 0 \\
&\iff 2\mathrm{Re}(z) + \mathrm{i} \times 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) = 0 \\
&\iff 2\mathrm{Re}(z) - 2\mathrm{Im}(z) = 0 \\
&\iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z + \mathrm{i}\,z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}\} = \{x + \mathrm{i}\,x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Module d'un complexe

Définition

Le module d'un complexe $z = a + ib$ est le réel positif :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque. Lorsque z est un réel, $z = a$, son module coincide avec sa valeur absolue puisque :

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$$

Le module généralise pour les complexes la valeur absolue d'un réel ; c'est pourquoi on emploie la même notation.

Propriété

Lorsque bien définis :

$$|\overline{z}| = |z| \quad ; \quad |z| = 0 \iff z = 0$$

$$|Re(z)| \leq |z| \quad ; \quad |Im(z)| \leq |z|$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| \quad ; \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ |z^n| = |z|^n$$

$$z \times \overline{z} = |z|^2 \quad ; \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Démonstration. Soient $z = a + \mathrm{i}\, b$, $z' = a + \mathrm{i}\, b'$:

$$|\overline{z}| = |a - \mathrm{i}\, b| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$|z| = 0 \iff \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \begin{cases} \sqrt{a^2} = |a| = |\mathrm{Re}(z)| \\ \sqrt{b^2} = |b| = |\mathrm{Im}(z)| \end{cases}$$

$$z \times \overline{z} = (a + \mathrm{i}\, b) \times (a - \mathrm{i}\, b) = a^2 - (\mathrm{i}\, b)^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2+b^2}^2 = |z|^2$$

$$z \times \overline{z} = |z|^2 \implies \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad (\text{si } z \neq 0)$$

$$|z \times z'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = z\overline{z} \times z'\overline{z}' = |z|^2 \times |z'|^2 \underset{|\,.\,|\geq 0}{\implies} |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| \times |z'| = \left|\frac{z}{z'} \times z'\right| = |z| \implies \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ |z^n| = |z|^n$ se montre par récurrence :
(I) Pour $n = 0$: $|z^n| = |1| = 1$ et $|z|^n = 1$; l'assertion est vérifiée.
(H) Supposons l'assertion vraie à un rang $n \geq 0$ fixé. Alors :

$$|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z| \underset{HR}{=} |z|^n \times |z| = |z|^{n+1}$$

et donc l'assertion reste vraie au rang $n+1$.
Et $\forall n \in \mathbb{Z}_-,\ |z^n| = |z|^n$ s'en déduit : soit $n \in \mathbb{Z}_-$ alors $-n \in \mathbb{N}$ et :

$$|z^n| = \left|\frac{1}{z^{-n}}\right| = \frac{1}{|z^{-n}|} \underset{-n\in\mathbb{N}}{=} \frac{1}{|z|^{-n}} = |z|^n.$$

■

Remarque. La propriété $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ est habituellement utilisée pour obtenir l'écriture algébrique de l'inverse ou du quotient de complexes écrit sous forme algébrique : on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur ; au dénominateur cela fait apparaitre le module au carré.

Exercice 4. Obtenir la forme algébrique de $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

$$\frac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \times \frac{\overline{1-\mathrm{i}}}{\overline{1-\mathrm{i}}} = \frac{(1+2\mathrm{i}) \times (1+\mathrm{i})}{|1-\mathrm{i}|^2} = \frac{(1-2)+\mathrm{i}\,(1+2)}{1^2+(-1)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \mathrm{i}$$

Inégalité triangulaire

Remarque. Le module d'une somme n'est pas la somme des modules, comme le montre l'exemple :

$$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2} \quad ; \quad |1-\mathrm{i}| = \sqrt{2} \quad ; \quad |1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}| = |2| = 2 \neq \sqrt{2}+\sqrt{2}$$

Cependant, l'inégalité triangulaire des modules, qui généralise l'inégalité triangulaire des valeurs absolues, montre que le module d'une somme est comprise entre la différence et la somme des modules.

Propriété

(Inégalité triangulaire.)

Pour tous complexes z, z',

$$\big||z|-|z'|\big| \leq |z+z'| \leq |z|+|z'|$$
$$\big||z|-|z'|\big| \leq |z-z'| \leq |z|+|z'|$$

Démonstration. On démontre la première, la deuxième en découle en appliquant la première à z et $-z'$ puisque :

$$\big||z| - |-z'|\big| \leq |z + (-z')| \leq |z| + |-z'|$$

or $|-z'| = |(-1) \times z'| = |-1| \times |z'| = 1 \times |z'| = |z'|$, ainsi :

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|.$$

Soient z et z' deux complexes quelconques ; à montrer :
$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$. Cette inégalité porte sur des termes tous positifs, elle est donc équivalente à celle obtenue en élevant chaque terme au carré :

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| \iff \big||z| - |z'|\big|^2 \leq |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$$

$$(\underbrace{|z| + |z'|}_{\in\mathbb{R}})^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2 \times |z| \times |z'|$$

$$\Big|\underbrace{|z| - |z'|}_{\in\mathbb{R}}\Big|^2 = (|z| - |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2 \times |z| \times |z'|$$

$$|\underbrace{z + z'}_{\in\mathbb{C}}|^2 = (z + z') \times \overline{(z + z')} = (z + z') \times (\overline{z} + \overline{z'}) = z\overline{z} + z'\overline{z} + z\overline{z'} + z\overline{z'}$$

Or :

$$z\overline{z} = |z|^2 \qquad ; \qquad z'\overline{z'} = |z'|^2 \qquad ; \qquad z'\overline{z} + z\overline{z'} = z'\overline{z} + \overline{z'\overline{z}} = 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$$

Ainsi :

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z'\overline{z})$$

et donc :

$$\begin{aligned}
& \big||z| - |z'|\big| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'| \\
\iff & |z|^2 + |z'|^2 - 2 \times |z| \times |z'| \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z'\overline{z}) \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2 \times |z| \times |z'| \\
\iff & -|z| \times |z'| \leq \mathrm{Re}(z'\overline{z}) \leq |z| \times |z'| \\
\iff & -|\overline{z}| \times |z'| \leq \mathrm{Re}(z'\overline{z}) \leq |\overline{z}| \times |z'| \\
\iff & -|z'\overline{z}| \leq \mathrm{Re}(z'\overline{z}) \leq |z'\overline{z}|
\end{aligned}$$

ce qui découle de $|\mathrm{Re}(Z)| \leq |Z|$ en prenant $Z = z'\overline{z}$. ■

Exercice 5. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|.$$

Écrivons $z = a + \mathrm{i}\, b$ et appliquons la majoration donnée par l'inégalité triangulaire :

$$|z| = |a + \mathrm{i}\, b| \leq |a| + |\mathrm{i}\, b| = |a| + \underbrace{|\mathrm{i}\,| \times |b|}_{|\mathrm{i}\,|=1} = |a| + |b| = |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$$

d'où :

$$|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|.$$

(De même, on aurait : $\big||\mathrm{Re}(z)| - |\mathrm{Im}(z)|\big| \leq |z|$.)

Construction - affixe d'un point

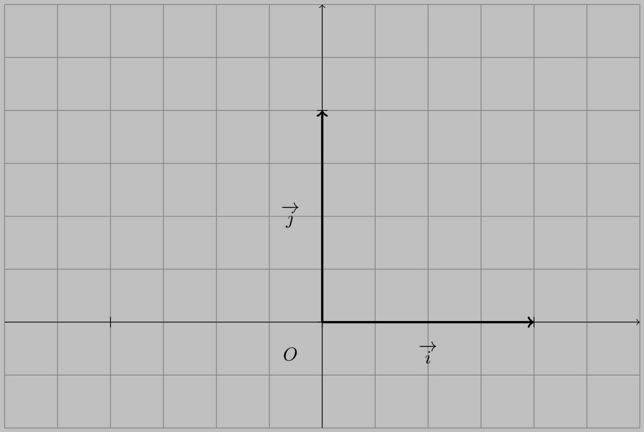
On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout point $M \in \mathscr{P}$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}.$$

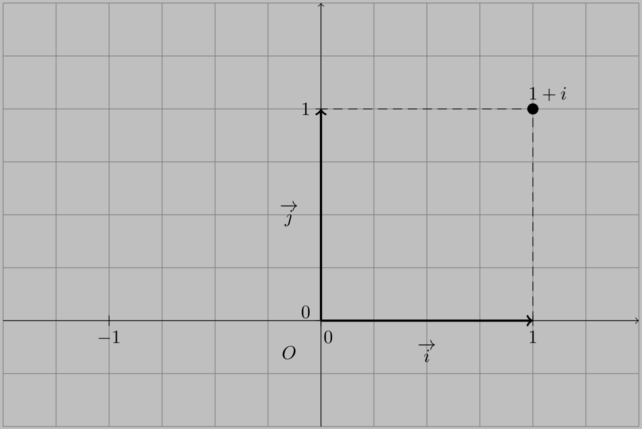
Le nombre complexe $z = x + i\,y$ est appelé affixe du point M.

Le plan $\mathscr{P}$ muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où chaque point est repéré par son affixe, est appelé le plan complexe.

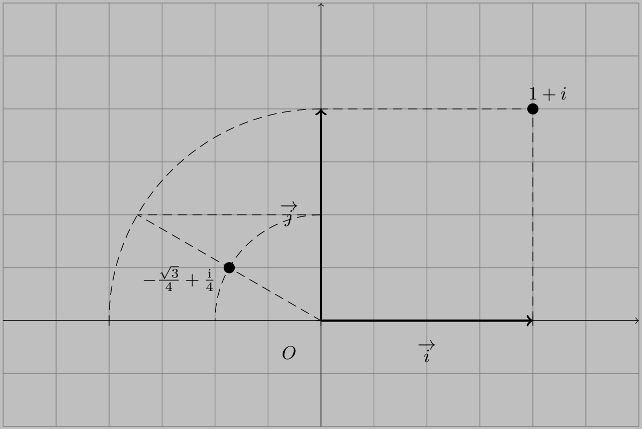
Exercice 6. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes $1 + \mathrm{i}$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$.



Exercice 6. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes $1 + \mathrm{i}$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$.



Exercice 7. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes $1 + \mathrm{i}$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$.



Affixe d'un vecteur ; distance et module

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives $z_A = x_A + \mathrm{i}\, y_A$ et $z_B = x_B + \mathrm{i}\, y_B$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ *est le complexe :*

$$z_B - z_A = (x_B - x_A) + i\,(y_B - y_A).$$

Puisque la longueur AB est :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |z_A - z_B|.$$

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *est égale au module de son affixe.*

En particulier, puisque le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a même affixe que le point M :

Le module $|z|$ *de l'affixe* z *d'un point* M *est égale à la distance du point* M *à l'origine* O *du repère.*

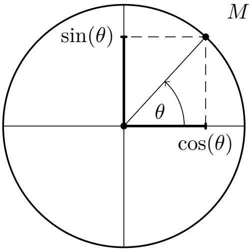
Argument d'un complexe non nul ; forme trigonométrique

Le cercle trigonométrique est inclus dans le plan complexe. Il s'identifie via l'affixe de ses points à l'ensemble :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \right\}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ et M le point d'affixe z ; M est sur le cercle trigonométrique et donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{j}$$
$$z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)$$



Argument de $z \in \mathbb{C}^*$

Le réel θ est bien défini modulo 2π. On l'appelle l'argument de z.

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \implies \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ un complexe non nul. Alors $\dfrac{z}{|z|}$ est un complexe de module 1 :

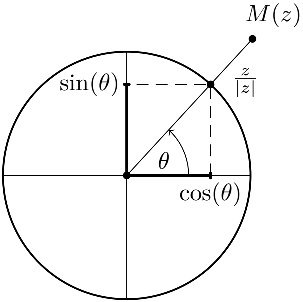
$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{\big||z|\big|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

On appelle argument de z, l'argument de $\dfrac{z}{|z|}$; alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists \theta \in \mathbb{R}, \frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Le réel θ est bien défini modulo 2π ; on l'appelle l'argument de z noté :

$$\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi]$$



Alors :

L'argument de z est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}\,,\overrightarrow{OM}})$, où M a pour affixe z.

Exemple.

$$\mathbb{R}_+^* = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \equiv 0 \quad [2\pi] \right\} \qquad ; \qquad \mathbb{R}_-^* = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \equiv \pi \quad [2\pi] \right\}$$

Pour déterminer un argument d'un complexe non nul, on utilise :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ *et* $\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi]$. *Alors :*

$$\cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|} \qquad ; \qquad \sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

Exercice 7. Déterminer un argument de :

$$1 + \mathrm{i} \qquad ; \qquad \sqrt{3} - \mathrm{i} \qquad ; \qquad -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2} \Longrightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$|\sqrt{3} - \mathrm{i}| = 2 \Longrightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

$$\left|-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\mathrm{i}}{4}\right| = \frac{1}{2} \Longrightarrow \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \arg(z) \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$$

Forme trigonométrique

Ceci nous amène à l'écriture sous forme trigonométrique d'un complexe non nul :

Proposition-Définition

Pour tout complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = |z| \times \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right).$$

C'est l'écriture de z sous forme trigonométrique.

Le réel θ n'est pas unique ; il l'est modulo 2π ; c'est un argument de z :

$$\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi].$$

Exercice 8. Donner une écriture sous forme trigonométrique de :

$$1+\mathrm{i} \qquad ; \qquad \sqrt{3}-\mathrm{i} \qquad ; \qquad -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4} = \frac{1}{2}\times\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

Les propriétés de l'argument d'un complexe seront établies dans une prochaine partie.

Notation $e^{i\theta}$

Définition

On définit pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Avec cette notation, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ de module $|z|$ et d'argument $\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi]$ *:*

$$z = \underbrace{|z| \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta))}_{\text{forme trigonométrique}} = \underbrace{|z| \times e^{i\theta}}_{\text{forme exponentielle}}$$

$|z| \times e^{i\theta}$ *est une écriture sous forme exponentielle de $z \in \mathbb{C}^*$.*

Remarque. Pour tous réels θ_1, θ_2 et tous réels strictement positifs ρ_1, ρ_2,

$$\rho_1 \times e^{i\theta_1} = \rho_2 \times e^{i\theta_2} \iff \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 \equiv \theta_2 \quad [2\pi] \end{cases}$$

Exercice 9. Donner une écriture sous forme exponentielle de :

$$1+\mathrm{i} \qquad ; \qquad \sqrt{3}-\mathrm{i} \qquad ; \qquad -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\times e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \qquad ; \qquad \sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\times e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} \qquad ; \qquad -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4} = \frac{1}{2}\times e^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}}$$

On a pour valeurs remarquables et premières propriétés :

Propriété

$$e^0 = 1 \quad ; \quad e^{i\pi} = -1 \quad ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Pour tout réel θ :

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad ; \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$$

$$-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

Démonstration.

$$e^0 = \cos(0) + \mathrm{i}\sin(0) = 1 \ ; \ e^{\mathrm{i}\,\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1 \ ; \ e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}$$

$$|e^{\mathrm{i}\,\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\overline{e^{\mathrm{i}\,\theta}} = \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta) = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) = e^{-\mathrm{i}\,\theta}$$

$$e^{\mathrm{i}\,(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta+2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\theta+2k\pi) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = e^{\mathrm{i}\,\theta}$$

$$e^{\mathrm{i}\,(\theta+\pi)} = \cos(\theta+\pi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\pi) = -\cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta) = -e^{\mathrm{i}\,\theta} \qquad \blacksquare$$

Propriété

Pour tous réels θ, θ' :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad ; \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad ; \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Démonstration. Pour la première on applique les formules de trigonométrie $\cos(\theta+\theta')$, $\sin(\theta+\theta')$:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \times e^{i\theta'} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \times (\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i \times (\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i \times \sin(\theta+\theta') \\ &= e^{i(\theta+\theta')} \end{aligned}$$

Pour la seconde, on applique $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ avec $|e^{i\theta}| = 1$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$:

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{|e^{i\theta}|^2} = e^{-i\theta}$$

La dernière se déduit des deux premières :

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times \frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$$

■

Exercice 10.

1) Écrire sous forme exponentielle $a = 1 + i$, $b = \sqrt{3} - i$ et $a \times b$.

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1) Puisque $|a| = \sqrt{2}$ et $|b| = 2$:

$$a = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} \times e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$$

$$b = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = 2 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2 \times e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}$$

On en déduit la forme exponentielle de $a \times b$:

$$a \times b = 2\sqrt{2} \times e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} \times e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2} \times e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi - 2\pi}{12}} = 2\sqrt{2} \times e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{12}}.$$

2) Obtenons d'autre part la forme algébrique de $a \times b$:

$$a \times b = (1 + \mathrm{i}\,) \times (\sqrt{3} - \mathrm{i}\,) = (\sqrt{3} + 1) + \mathrm{i}\, \times (\sqrt{3} - 1)$$

Puisque $|a \times b| = 2\sqrt{2}$, on en déduit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \qquad ; \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

On en déduit la célèbre formule de Moivre :

Propriété

(Formule de Moivre.)

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Autrement dit :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Démonstration. On procède en deux cas selon que $n \geq 0$ ou $n \leq 0$.

Montrons d'abord par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

(I) Pour $n = 0$, $\left(e^{i\theta}\right)^0 = 1$ et $e^{in\theta} = e^0 = 1$.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = \left(e^{i\theta}\right)^n \times e^{i\theta} \underset{HR}{=} e^{in\theta} \times e^{i\theta} = e^{i(n\theta+\theta)} = e^{i(n+1)\theta}$$

Donc l'assertion reste vraie au rang $n+1$.

On conclut à l'aide du principe de récurrence.

Déduisons-en maintenant que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}_-$: $\left(e^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}\,n\theta}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}_-$; alors $(-n) \in \mathbb{N}$, et :

$$\left(e^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \frac{1}{\left(e^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^{-n}} = \frac{1}{e^{-\mathrm{i}\,n\theta}} = e^{\mathrm{i}\,n\theta} \qquad \blacksquare$$

Exercice 11. Donner la forme exponentielle de

$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5 \qquad \text{et de} \qquad \frac{(1-\mathrm{i})^3}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}$$

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2 \times \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times e^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}$$

$$\Longrightarrow (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^5 = 2^5 \times e^{\frac{5\mathrm{i}\,\pi}{3}} = \boxed{32 \times e^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}}$$

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin -\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times e^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}}$$

$$\Longrightarrow (1 - i)^3 = 2\sqrt{2} \times e^{-\frac{3\mathrm{i}\,\pi}{4}}$$

$$\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = 2 \times e^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{6}}$$

$$\Longrightarrow (\sqrt{3} + \mathrm{i})^2 = 2^2 \times e^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}$$

$$\Longrightarrow \frac{(1 - \mathrm{i})^3}{(\sqrt{3} + \mathrm{i})^2} = \frac{2\sqrt{2} \times e^{-\frac{3\mathrm{i}\,\pi}{4}}}{4 \times e^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times e^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times e^{-\mathrm{i}\,\frac{13\pi}{12}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \times e^{\mathrm{i}\,\frac{11\pi}{12}}}$$

Exponentielle complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ avec x, y deux réels. On définit :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = e^x \times (\cos(y) + i\sin(y))$$

où e^x désigne l'exponentielle réelle.

Cela étend la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$; elle préserve les mêmes propriétés algébriques :

Propriété

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'} \quad ; \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z} \quad ; \quad \frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^z)^n = e^{nz}.$$

Démonstration. Elles découlent facilement des mêmes propriétés vérifiées par l'exponentielle réelle et $e^{i\theta}$ et des propriété de la multiplication, inverse et puissance. En guise d'exemple : soient $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$:

$$\begin{aligned} e^z \times e^{z'} &= e^{x+iy} \times e^{x'+iy'} \\ &= e^x \times e^{iy} \times e^{x'} \times e^{iy'} \\ &= (e^x \times e^{x'}) \times (e^{iy} \times e^{iy'}) \\ &= e^{x+x'} \times e^{i(y+y')} \\ &= e^{z+z'} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^x \times e^{iy}} = \frac{1}{e^x} \times \frac{1}{e^{iy}} = e^{-x} \times e^{-iy} = e^{-x-iy} = e^{-z}. \qquad \blacksquare$$

Propriétés de l'argument

L'argument d'un complexe vérifie les propriétés suivantes :

Propriété

Pour tous z, z' deux nombres complexes non nuls :

$$\begin{aligned}
& \arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi] \\
& \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi] \\
& \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi] \\
& \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi] \\
\forall n \in \mathbb{Z} \quad & \arg(z^n) \equiv n \times \arg(z) \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

Démonstration. On les établit dans l'ordre à l'aide des propriétés de l'exponentielle ; soient :

$$z = \rho e^{i\theta} \qquad ; \qquad z' = \rho' e^{i\theta'} \quad \text{avec} \quad (\rho, \rho') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2.$$

1) $z \times z' = \rho\rho' \times e^{i(\theta+\theta')} \Longrightarrow \arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ \ [2\pi].$

2) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho} \times e^{-i\theta} \Longrightarrow \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \ \ [2\pi].$

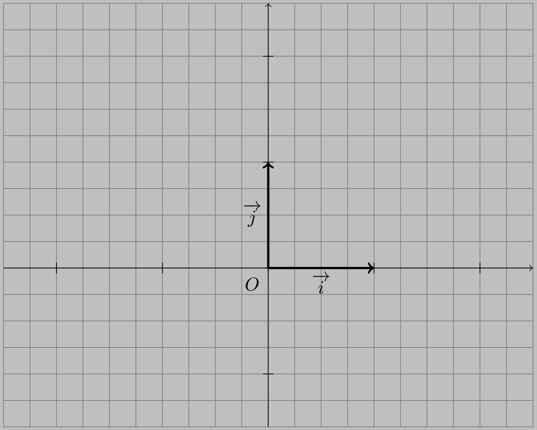
3) $\overline{z} = \rho \times e^{-i\theta} \Longrightarrow \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ \ [2\pi].$

4) $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'} \Longrightarrow \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ \ [2\pi].$

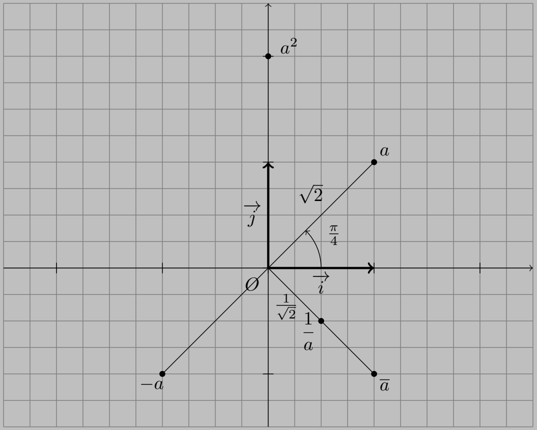
5) Soit $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = \rho^n \times e^{i n\theta} \Longrightarrow \arg(z^n) \equiv n \times \arg(z) \ \ [2\pi].$

■

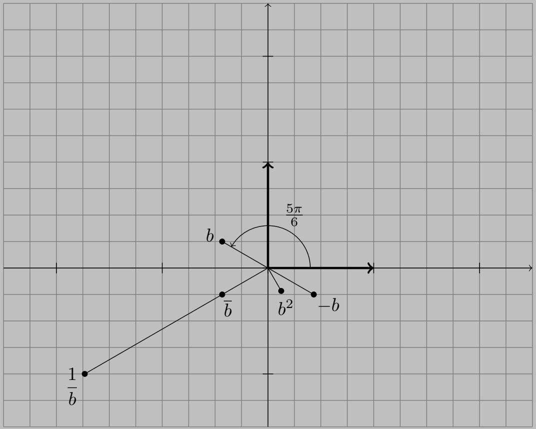
Exercice 12. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes $z, z^2, \overline{z}, -z, \dfrac{1}{z}$ pour $z = 1 + \mathrm{i}$ et $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$. On posera $a = 1 + \mathrm{i}$ et $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$.



Exercice 12. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes $z, z^2, \overline{z}, -z, \dfrac{1}{z}$ pour $z = 1 + \mathrm{i}$ et $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$. On posera $a = 1 + \mathrm{i}$ et $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$.



Exercice 12. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes $z, z^2, \overline{z}, -z, \dfrac{1}{z}$ pour $z = 1 + \mathrm{i}$ et $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$. On posera $a = 1 + \mathrm{i}$ et $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$.



Formules d'Euler

De :

$$e^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$$
$$e^{-\mathrm{i}\,\theta} = \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)$$

on déduit l'expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $e^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $e^{-\mathrm{i}\,\theta}$; ce sont les formules d'Euler.

Propriété

Pour tout réel θ :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad ; \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration.

$$e^{\mathrm{i}\,\theta} + e^{-\mathrm{i}\,\theta} = 2\cos(\theta) \implies \cos(\theta) = \frac{e^{\mathrm{i}\,\theta} + e^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2}$$
$$e^{\mathrm{i}\,\theta} - e^{-\mathrm{i}\,\theta} = 2\mathrm{i}\sin(\theta) \implies \sin(\theta) = \frac{e^{\mathrm{i}\,\theta} - e^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\mathrm{i}}$$

■

On les utilise pour établir des formules en trigonométrie, le calcul à l'aide d'exponentielle étant plus simple qu'avec des cos ou sin. En particulier elles sont utiles pour "linéariser" des expressions trigonométriques, c'est à dire transformer un produit en somme.

Exemple. Linéariser $\cos^2(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^2+\left(e^{-i\theta}\right)^2+2\times e^{i\theta}\times e^{-i\theta}}{4} \\
&= \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2}{4} \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta)+1\right)
\end{aligned}$$

En particulier on a redémontré le développement de $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

Exercice 13. Linéariser $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$.

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} \\
&= \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)}{8} \\
&= \frac{2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)}{8} \\
&= \frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} \\
&= \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)}{-8i} \\
&= \frac{2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta)}{-8i} \\
&= \frac{3}{4}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(3\theta)
\end{aligned}$$

Des formules d'Euler découlent immédiatement :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \qquad ; \qquad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$

Exercice 14. Développer puis simplifier :

$$(x + e^{i\theta})(x + e^{-i\theta}) \qquad \text{et} \qquad (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$$

$$\begin{aligned}(x + e^{i\theta})(x + e^{-i\theta}) &= x^2 + x\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + e^{i\theta} \times e^{-i\theta} \\ &= x^2 + 2x\cos(\theta) + 1 \\ (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) &= x^2 - x\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + e^{i\theta} \times e^{-i\theta} \\ &= x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\end{aligned}$$

Méthode de l'angle moitié

Plus généralement, en présence d'une somme ou différence de $e^{i a}$ et $e^{i b}$ une simplification s'obtient en factorisant par $e^{i \frac{a+b}{2}}$ (on utilise la moyenne $\frac{a+b}{2}$ des arguments a et b) ; en effet :

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{2a-a-b}{2} = \frac{a-b}{2} \qquad ; \qquad b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = -\frac{a-b}{2}$$

Ainsi :

$$e^{i a} + e^{i b} = e^{i \frac{a+b}{2}} \left(e^{i\left(a-\frac{a+b}{2}\right)} + e^{i\left(b-\frac{a+b}{2}\right)} \right) = e^{i \frac{a+b}{2}} \left(e^{i \frac{a-b}{2}} + e^{-i \frac{a-b}{2}} \right) = e^{i \frac{a+b}{2}} \times 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$e^{i a} - e^{i b} = e^{i \frac{a+b}{2}} \left(e^{i\left(a-\frac{a+b}{2}\right)} - e^{i\left(b-\frac{a+b}{2}\right)} \right) = e^{i \frac{a+b}{2}} \left(e^{i \frac{a-b}{2}} - e^{-i \frac{a-b}{2}} \right) = e^{i \frac{a+b}{2}} \times 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Cette méthode très utile s'appelle la méthode de l'angle moitié (parce qu'on décompose à la moitié des angles a et b) ; elle permet notamment d'obtenir la forme exponentielle de $e^{i a} \pm e^{i b}$.

(Méthode de l'angle moitié.)

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2\cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right) \qquad ; \qquad e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \times 2i\sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right)$$

Exercice 15. Écrire sous forme exponentielle :

$$1 + e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad ; \qquad 1 - e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$1 + e^{i\frac{\pi}{2}} = e^0 + e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$1 - e^{i\frac{\pi}{2}} = e^0 - e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 2i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \times e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= -i\sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \times e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \times e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Résolution de $z^2 = a$ pour $a \in \mathbb{C}$

Résolvons l'équation

$$z^2 = a \qquad (E)$$

où $a \in \mathbb{C}$.

On distingue deux cas selon que $a = 0$ ou $a \neq 0$.

- Si $a = 0$. Alors :

$$z^2 = a \iff z^2 = 0 \iff z = 0$$

par intégrité de la multiplication. Il y a pour unique solution $z = 0$.

- Si $a \neq 0$.

Alors il existe $\rho_0 = |a| \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a = \rho_0 \times e^{i\theta_0}.$$

soit l'écriture sous forme exponentielle de a. Puisque $z = 0$ n'est pas solution de (E), une solution z peut aussi s'écrire sous forme exponentielle :

$$z = \rho \times e^{i\theta} \quad \text{avec } \rho \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

$$z^2 = a \iff \left(\rho \times e^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^2 = \rho_0 \times e^{\mathrm{i}\,\theta_0} \iff \rho^2 \times e^{2\mathrm{i}\,\theta} = \rho_0 \times e^{\mathrm{i}\,\theta_0}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^2 = \rho_0 \\ \text{et} \\ 2\theta \equiv \theta_0 \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{\rho_0} \quad \text{car } \rho > 0 \\ \text{et} \\ \theta \equiv \dfrac{\theta_0}{2} \quad [\pi] \end{cases}$$

$$\iff \rho = \sqrt{\rho_0} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \theta \equiv \dfrac{\theta_0}{2} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv \pi + \dfrac{\theta_0}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

Ainsi il y a deux solutions :

$$z = \sqrt{\rho_0} \times e^{\mathrm{i}\,\frac{\theta_0}{2}} \qquad \text{et} \qquad z = \sqrt{\rho_0} \times e^{\mathrm{i}\left(\pi + \frac{\theta_0}{2}\right)} = \sqrt{\rho_0} \times e^{\mathrm{i}\,\pi} \times e^{\mathrm{i}\,\frac{\theta_0}{2}} = -\sqrt{\rho_0} \times e^{\mathrm{i}\,\frac{\theta_0}{2}}$$

On vient de montrer :

L'équation : $z^2 = \rho_0 \times e^{i\theta_0}$ (où $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$) a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z = \pm\sqrt{\rho_0} \times e^{i\,\frac{\theta_0}{2}}.$$

Exercice 16.

1) Déterminer une "racine carrée" de i et de −i.

2) En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme $x^4 + 1$ en 4 facteurs de degré 1.

3) En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}$ du polynôme $x^4 + 1$ en 2 facteurs de degré 2.

1) On a :

$$\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \implies e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \text{ a pour carré i}$$

$$-\mathrm{i} = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \implies e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \text{ a pour carré } -\mathrm{i}$$

2) Factorisation dans $\mathbb{C}$; on utilise plusieurs fois $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned}
x^4 + 1 &= (x^2)^2 - \mathrm{i}^2 = (x^2 - \mathrm{i}) \times (x^2 + \mathrm{i}) = (x^2 - \mathrm{i}) \times (x^2 - (-\mathrm{i})) \\
&= \left(x^2 - \left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2\right) \times \left(x^2 - \left(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2\right) \\
&= \left(x - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(x + e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(x - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(x + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)
\end{aligned}$$

3) On applique l'exercice 14, en regroupant $(x+e^{i\frac{\pi}{4}})(x+e^{-i\frac{\pi}{4}})$ et $(x-e^{i\frac{\pi}{4}})(x-e^{-i\frac{\pi}{4}})$:

$$\begin{aligned} x^4+1 &= \underbrace{\left(x+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)}\underbrace{\left(x-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(x-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)} \\ &= (x^2+2x\cos\frac{\pi}{4}+1)\times(x^2-2x\cos\frac{\pi}{4}+1) \\ &= (x^2+x\sqrt{2}+1)\times(x^2-x\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

C'est la factorisation du polynôme x^4+1 dans $\mathbb{R}$.