Cours : Dénombrements

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Définition

Définition

• *Soit E un ensemble. Si il existe un entier $n \geqslant 1$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans E, on dit que l'ensemble E est fini et de cardinal n. On note $\mathrm{Card}\ E = n$ ou $\mathrm{Card}(E) = n$.*

• *Par convention $\mathrm{Card}\ \varnothing = 0$.*

Remarques. – Ainsi $\mathrm{Card}\ E = 0$ si et seulement si $E = \varnothing$.

– Si une ensemble E n'est pas fini, il est dit infini.
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont infinis. (Admis).

– Lorsque E est un ensemble fini de cardinal $n > 0$, on pourra noter ses éléments explicitement : $E = \left\{e_1, e_2, \ldots, e_n\right\}$
(par exemple en notant $e_i = f(i)$ pour une bijection $f : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$.)

– Il ne peut pas exister deux bijections, l'une $f : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$, et l'autre $g : [\![1, m]\!] \longrightarrow E$ lorsque $n \neq m$ car autrement $g^{-1} \circ f$ serait une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, m]\!]$; chacun des m éléments de $[\![1, m]\!]$ auraient exactement un antécédent parmi les n éléments de $[\![1, n]\!]$, d'où $n = m$. Ainsi la notion de cardinal est bien définie.

Remarque. Soient $p \leqslant q$, deux entiers relatifs. L'ensemble $[\![p, q]\!]$ a pour cardinal :

$$\boxed{\mathrm{Card}\ [\![p, q]\!] = q - p + 1}$$

car l'application :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [\![1, q - p + 1]\!] & \longrightarrow & [\![p, q]\!] \\ n & \longmapsto & n + p - 1 \end{array}$$

est bijective : en effet soit $y \in [\![p, q]\!]$:

$$y = \varphi(x) \iff y = x + p - 1 \iff x = y + 1 - p$$

et $y \in [\![p, q]\!] \iff x = y + 1 - p \in \mathbb{Z}$ et $1 \leqslant x \leqslant q - p + 1 \iff x \in [\![1, q - p + 1]\!]$.
Donc l'équation $y = \varphi(x)$ de paramètre $y \in [\![p, q]\!]$ a une unique solution $x = y + 1 - p$ dans $[\![1, q - p + 1]\!]$.

Théorème fondamental

Théorème

Deux ensembles finis non vides E et F ont même cardinal si et seulement si il existe une bijection de E dans F.

Démonstration. On prouve deux implications :

$\boxed{\Rightarrow}$ Si E et F ont même cardinal $n \geqslant 1$ alors par définition il existe deux bijections :

$$\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E \quad \text{et} \quad \psi : [\![1, n]\!] \longrightarrow F$$

Alors l'application

$$\psi \circ \varphi^{-1} : E \longrightarrow F$$

est bien définie (car $\varphi^{-1} : E \longrightarrow [\![1, n]\!]$ est bien définie puisque φ est bijective) et bijective comme composée d'applications bijectives.
Ainsi il existe une bijection de E dans F.

Théorème fondamental

$\boxed{\Leftarrow}$ Si E et F sont finis et non vides et si il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$.
Soit n le cardinal de E et soit $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ une bijection.

Alors $f \circ \varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow F$ est bien définie et bijective comme composée d'applications bijectives.

Ainsi, par définition $\mathrm{Card}\ F = n = \mathrm{Card}\ E$. ∎

Cardinal d'une partie

Propriété

Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Alors A est un ensemble fini et

$$\boxed{\mathrm{Card}\ A \leqslant \mathrm{Card}\ E}.$$

De plus :

$$\boxed{\mathrm{Card}\ A = \mathrm{Card}\ E \implies A = E}.$$

Démonstration. On distingue deux cas :

• Si $A = \varnothing$ alors $\mathrm{Card}\ A = 0 \leqslant \mathrm{Card}\ E$. De plus si $\mathrm{Card}\ A = \mathrm{Card}\ E$ alors $\mathrm{Card}\ E = 0$ et donc $E = \varnothing = A$.

• Si $A \neq \varnothing$. On numérote les élément de $E = \left\{e_1, e_2, \dots, e_n\right\}$ de sorte que les éléments de A soient en premiers : $A = \left\{e_1, e_2, \dots, e_p\right\}$ avec $p \leqslant n$. Alors $\mathrm{Card}\ A = p \leqslant n = \mathrm{Card}\ E$. De plus si $\mathrm{Card}\ A = \mathrm{Card}\ E = n$ alors $A = E$. ∎

Injections, surjections et cardinaux

Propriété

Soient E et F deux ensembles finis.

(i) *S'il existe une injection de E dans F, alors $\text{Card } E \leqslant \text{Card } F$.*

(ii) *S'il existe une surjection de E dans F, alors $\text{Card } E \geqslant \text{Card } F$.*

(iii) *Si $\text{Card } E = \text{Card } F$ alors toute injection de E dans F est bijective.*

(iv) *Si $\text{Card } E = \text{Card } F$ alors toute surjection de E dans F est bijective.*

Démonstration. On montre séparément les 4 assertions ; pour chacune on va appliquer la propriété 2 avec le théorème 1 en construisant pour une application injective (resp. surjective) de E dans F une bijection de E dans une partie de F (resp. d'une partie de E dans F).

Injections, surjections et cardinaux

• (i) S'il existe une injection f de E dans F alors f réalise une bijection de E dans $f(E)$. Ainsi avec le théorème 1 : $\mathrm{Card}\ E = \mathrm{Card}\ f(E)$. Or $f(E)$ est une partie de F (*i.e.* $f(E) \subset F$), donc d'après la propriété 2 :
$\mathrm{Card}\ E = \mathrm{Card}\ f(E) \leqslant \mathrm{Card}\ F$. Ainsi $\mathrm{Card}\ E \leqslant \mathrm{Card}\ F$.

• (iii) Pour une injection quelconque $f : E \longrightarrow F$, $\mathrm{Card}\ E = \mathrm{Card}\ f(E)$ ainsi, si de plus $\mathrm{Card}\ E = \mathrm{Card}\ F$ alors $\mathrm{Card}\ f(E) = \mathrm{Card}\ F$. Puisque $f(E) \subset F$, avec la propriété 2, $f(E) = F$. Donc f est aussi surjective, et donc bijective.

• (ii) Supposons l'existence d'une surjection f de E dans F. Chaque élément de F a au moins un antécédent dans E par f ; choisissons pour chaque élément de F un seul antécédent dans E ; soit A l'ensemble des éléments choisis. Alors A est une partie de E et l'application restreinte $f_{|A} : A \longrightarrow F$ est bijective puisque chaque élément de F a exactement un antécédent dans A par $f_{|A}$. D'après le théorème 1 $\mathrm{Card}\ A = \mathrm{Card}\ F$ et d'après la propriété 2
$\mathrm{Card}\ A \leqslant \mathrm{Card}\ E$. Ainsi $\mathrm{Card}\ E \geqslant \mathrm{Card}\ F$.

• (iv) Soit f une surjection de E dans F et comme ci-dessus $A \subset E$ tel que $f_{|A} : A \longrightarrow F$ soit bijective ; ainsi $\mathrm{Card}\ A = \mathrm{Card}\ F$. Mais si $\mathrm{Card}\ E = \mathrm{Card}\ F$ alors $\mathrm{Card}\ A = \mathrm{Card}\ E$. Or A est une partie de E, et donc d'après la propriété 2, $A = E$. Ainsi $f_{|A} = f$ et donc f est bijective.

Entre deux ensembles finis de même cardinal une application injective ou surjective est aussi bijective. Ainsi :

Corollaire

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application entre deux ensembles finis E et F ayant <u>même cardinal</u>. Alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Remarque. C'est un résultat remarquable : entre ensembles finis de même cardinal les notions d'injection, surjection, bijection sont identiques. En particulier si E est fini, $f : E \longrightarrow E$ est injective, ou surjective, si et seulement si elle est bijective.
Ce n'est pas le cas par exemple pour une application de E dans E lorsque E est infini (il et facile d'en trouver des contre-exemples lorsque $E = \mathbb{R}$, par exemple $x \mapsto \exp(x)$ (injective non surjective) ou $x \mapsto x(x-1)(x-2)$ (surjective non injective)).

Exemple.

Exemple. Soit A un groupe constitué de n personnes. Montrer qu'il existe au moins deux personnes dans A ayant le même nombre d'amis dans A.
(*Remarque : être ami est une relation symétrique et non réflexive.*)

Résolution. Soit $n = \mathrm{Card}\ A$. On distingue deux cas :
• *Premier cas :* Chaque élément de A a au moins un ami. Alors l'application :

$$f : A \longrightarrow [\![1, n-1]\!]$$

qui a un élément de A associe son nombre d'amis dans A est bien définie. Or $\mathrm{Card}\ A = n > \mathrm{Card}\ [\![1, n-1]\!] = n-1$. Donc d'après la propriété 3, f est non injective. Il existe donc deux personnes dans A ayant même image par f, c'est-à-dire le même nombre d'ami.

Exemple.

• *Deuxième cas :* Un élément de A n'a aucun ami dans A. Alors par symétrie personne n'est avec lui, et donc chaque personne a entre 0 et $n-2$ amis dans A. L'application :

$$f : A \longrightarrow [\![0, n-2]\!]$$

qui a un élément de A associe son nombre d'amis dans A est bien définie. Or $\mathrm{Card}\ A = n > \mathrm{Card}\ [\![0, n-2]\!] = n-1$. Donc d'après la propriété 3, f est non injective. Il existe donc deux personnes dans A ayant même image par f, c'est-à-dire le même nombre d'ami.

Cardinal d'un union disjointe

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis disjoints (i.e. $E \cap F = \varnothing$). Alors leur réunion $E \cup F$ est un ensemble fini et :

$$\boxed{\mathrm{Card}\ E \cup F = \mathrm{Card}\ E + \mathrm{Card}\ F.}$$

Démonstration. Supposons que E soit de cardinal n et F de cardinal m ; soient :

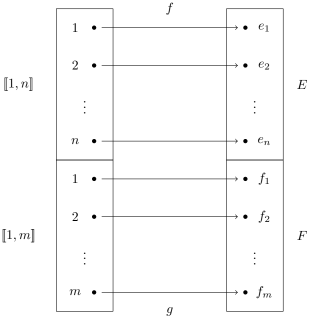
$$f : [\![1, n]\!] \longrightarrow E \quad \text{et} \quad g : [\![1, m]\!] \longrightarrow F$$

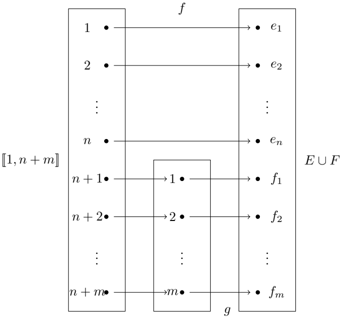
des bijections. Notons $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ en posant $e_i = f(i)$ et $f_j = g(j)$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$.

On construit une bijection ψ de $[\![1, n+m]\!]$ vers $E \cup F$ de la façon suivante :

$$\psi : [\![1, n+m]\!] \longrightarrow E \cup F$$
$$i \longmapsto \begin{cases} f(i) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \\ g(i-n) & \text{si } n+1 \leqslant i \leqslant n+m \end{cases}$$

Le schéma suivant illustre la construction de ψ :





D'une part ψ est surjective : $e_i \in E$ a pour antécédent i et $f_j \in F$ a pour antécédent $j+n$.
D'autre part montrons que puisque E et F sont disjoints, ψ est injective. Soit deux éléments $(i,j) \in [\![1, n+m]\!]^2$ vérifiant $\psi(i) = \psi(j)$.

• Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ alors $\psi(i) = f(i)$ et $\psi(j) = f(j)$ et par injectivité de f, $i=j$.

• Si $(i,j) \in [\![n+1, n+m]\!]^2$ alors $\psi(i) = g(i-n)$ et $\psi(j) = g(j-n)$ et par injectivité de g, $i-n = j-n$ soit $i=j$.

• Si $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![n+1, n+m]\!]$ alors $\psi(i) \in f([\![1,n]\!]) = E$ et $\psi(j) \in g([\![1,m]\!]) = F$. Puisque $E \cap F = \varnothing$, ce cas est impossible.

D'où l'injectivité de ψ ainsi que sa bijectivité. Ainsi par définition, $\mathrm{Card}\ E \cup F = n + m = \mathrm{Card}\ E + \mathrm{Card}\ F$. ∎

Corollaire

Si $A \subset E$ et E est fini : $\boxed{\mathrm{Card}\ \overline{A} = \mathrm{Card}\ E - \mathrm{Card}\ A}$.

Démonstration. E est réunion disjointe de A et $\overline{A}$ qui sont finis d'après la propriété 2. ∎

Réunion disjointe de n ensembles

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints (i.e. $i \neq j \implies E_i \cap E_j = \varnothing$) alors $\bigcup_{i=1}^n E_i$ est un ensemble fini et

$$\boxed{\mathrm{Card}\ \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\ E_i}$$

Démonstration. Par récurrence sur n.

Initialisation. Si $n = 1$: $\mathrm{Card}\ \bigcup_{i=1}^1 E_i = \mathrm{Card}\ E_i = \sum_{k=1}^1 \mathrm{Card}\ E_i$.

Hérédité. supposons l'assertion vraie au rang n. Soit $E_1, \dots, E_n, E_{n+1}$ $(n+1)$ ensembles finis deux à deux disjoints. Alors :

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup E_{n+1}.$$

Or $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ et E_{n+1} sont deux ensembles finis (HR) et sont disjoints ; en effet par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap E_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap E_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^{n} \varnothing = \varnothing.$$

D'après le théorème 5 :

$$\mathrm{Card} \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i = \mathrm{Card} \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup E_{n+1}\right] = \mathrm{Card} \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) + \mathrm{Card}\ E_{n+1}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card} \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i &= \operatorname{Card} \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) + \operatorname{Card} E_{n+1} \\
&\underset{(HR)}{=} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card} E_i + \operatorname{Card} E_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{Card} E_i
\end{aligned}$$

L'assertion reste donc vraie au rang $(n+1)$.
On conclut à l'aide du principe de récurrence. ∎

Exemple

Exemple. On pose $E = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j \leqslant 5\right\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_k = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j = k\right\}$.

a) Montrer que $E = \bigcup_{k=0}^{5} E_k$.

b) Montrer que pour tout entiers naturels $i \neq j$, E_i et E_j sont disjoints.

c) Quel est le cardinal de E_k ?

d) Montrer que E est un ensemble fini et calculer son cardinal.

e) Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé tous les points de coordonnées dans E_5.

Exemple.

Résolution.

a) Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Alors $i+j \geqslant 0$ et $(i,j) \in E \iff i+j \leqslant 5$
$\iff \exists k \in [\![0,5]\!]$ tel que $i+j=k$
$\iff \exists k \in [\![0,5]\!]$ tel que $(i,j) \in E_k$
$\iff (i,j) \in \bigcup_{k=0}^{5} E_k$.

b) Soit $(i,j) \in E_a \cap E_b$ avec $(a,b) \in [\![0,5]\!]$ et $a \neq b$. Alors $i+j=a$ et $i+j=b$. c'est impossible. Donc $E_a \cap E_b = \varnothing$.

c) Soit $E_k = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j=k\right\}$; par exemple :

$$E_0 = \{(0,0)\}, \quad E_1 = \{(0,1),(1,0)\}, \quad E_2 = \{(0,2),(1,1),(2,0)\}$$

On conjecture $\mathrm{Card}\ E_k = k+1$. Montrons-le ; soit :

$$\begin{array}{rccc} \phi : [\![0,k]\!] & \longrightarrow & E_k \\ i & \longmapsto & (i,k-i) \end{array}$$

D'abord ϕ est bien définie car si $i \in [\![0,k]\!]$ alors $\phi(i)$ est un couple d'entiers (relatifs)

Exemple.

et :

$$0 \leqslant i \leqslant k \implies \begin{cases} 0 \leqslant i \\ -k \leqslant -i \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \leqslant i \\ 0 \leqslant k-i \end{cases}$$

donc $\phi(i) \in \mathbb{N}^2$. De plus $i + (k-i) = k$, donc $\phi(i) \in E_k$.
Montrons que ϕ est bijective. Soit $(a,b) \in E_k$; $a + b = k$. Résolvons :

$$\phi(i) = (a,b) \iff \begin{cases} i = a \\ k-i = b \end{cases} \iff \begin{cases} i = a \\ i = k-b \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} i = a \\ i = k-(k-a) \end{cases} \iff i = a$$

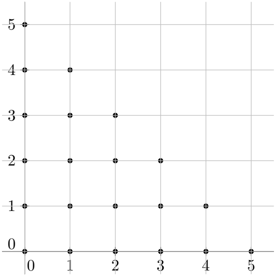
De plus puisque $0 \leqslant a \leqslant k$ on a $i = a \in [\![0,k]\!]$. Ainsi l'équation admet une unique solution dans $[\![0,k]\!]$; l'application ϕ est donc bijective. Or $\mathrm{Card}\ [\![0,k]\!] = k - 0 + 1 = k+1$.
Ainsi d'après le théorème 1 : $\mathrm{Card}\ E_k = k+1$.

Exemple.

d) L'ensemble E est réunion deux à deux disjointe de $E_0, E_1, \dots, E_5$. Ainsi d'après le théorème 7 :

$$\mathrm{Card}\ E = \sum_{k=0}^{5} \mathrm{Card}\ E_k = \sum_{k=0}^{5} (k+1) = \sum_{k=1}^{6} k = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$

e) Voici le graphique :



Exercice.

Exercice. Quel est le cardinal de $F = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i+j \leqslant 100\right\}$?

Par le même raisonnement, $F = \bigcup_{k=0}^{100} E_k$ et

$$\mathrm{Card}\ F = \sum_{k=0}^{100} \mathrm{Card}\, E_k = \sum_{k=0}^{100}(k+1) = \sum_{k=1}^{101} k = \frac{101 \times 102}{2} = 5151$$

Cardinal d'une réunion quelconque

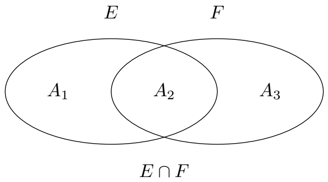
Théorème

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et :

$$\boxed{\mathrm{Card}\ E \cup F = \mathrm{Card}\ E + \mathrm{Card}\ F - \mathrm{Card}\ E \cap F}.$$

Démonstration. Considérons les 3 ensembles :

$$A_1 = E \setminus (E \cap F) \quad ; \quad A_2 = E \cap F \quad ; \quad A_3 = F \setminus (E \cap F)$$



Cardinal d'une réunion quelconque

Alors $E \cup F = A_1 \cup A_2 \cup A_3$; en effet :

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup A_3 &= (E \setminus (E \cap F)) \cup (E \cap F) \cup (F \setminus (E \cap F)) \\ &= ((E \setminus (E \cap F)) \cup (E \cap F)) \cup ((E \cap F) \cup (F \setminus (E \cap F))) \\ &= E \cup F \end{aligned}$$

et A_1, A_2, A_3 sont deux à deux disjoints puisque :

$$A_1 \cap A_2 = (E \setminus (E \cap F)) \cap (E \cap F) = \varnothing$$
$$A_2 \cap A_3 = (E \cap F) \cap (F \setminus (E \cap F)) = \varnothing$$
$$A_1 \cap A_3 = (E \setminus (E \cap F)) \cap (F \setminus (E \cap F)) = (E \cap F) \setminus (E \cap F) = \varnothing$$

Ainsi d'après le théorème 7 :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\ E \cup F = \mathrm{Card}\ A_1 \cup A_2 \cup A_3 &= \mathrm{Card}\ A_1 + \mathrm{Card}\ A_2 + \mathrm{Card}\ A_3 \\ &= (\mathrm{Card}\ A_1 + \mathrm{Card}\ A_2) \\ &\qquad + (\mathrm{Card}\ A_2 + \mathrm{Card}\ A_3) \\ &\qquad - \mathrm{Card}\ A_2 \\ &= \mathrm{Card}\ E + \mathrm{Card}\ F - \mathrm{Card}\ E \cap F \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice.

Exercice.

a) Montrer que si E, F, G sont 3 ensembles finis :

$$\begin{aligned}\text{Card } E \cup F \cup G = {} & \text{Card } E + \text{Card } F + \text{Card } G \\ & - \text{Card } E \cap F - \text{Card } E \cap G - \text{Card } F \cap G \\ & + \text{Card } E \cap F \cap G\end{aligned}$$

b) Dans une classe :
– 10 élèves pratiquent le tennis
– 20 élèves pratiquent l'équitation,
– 5 élèves pratiquent l'équitation et le tennis,
– 15 élèves ne pratiquent ni équitation ni tennis.
Combien d'élèves y-a-t-il dans la classe ?

Exercice.

Résolution.

a) On applique deux fois le théorème 8 :

$$\begin{aligned}
\text{Card } E \cup F \cup G &= \text{Card } E \cup (F \cup G) \\
&= \text{Card } E + \text{Card } (F \cup G) - \text{Card } E \cap (F \cup G) \\
&= \text{Card } E + \text{Card } (F \cup G) - \text{Card } (E \cap F) \cup (E \cap G) \\
&= \text{Card } E + \text{Card } F + \text{Card } G - \text{Card } F \cap G \\
&- (\text{Card } E \cap F + \text{Card } E \cap G - \text{Card } E \cap F \cap E \cap G) \\
&= \text{Card } E + \text{Card } F + \text{Card } G \\
&- \text{Card } E \cap F - \text{Card } E \cap G - \text{Card } F \cap G \\
&+ \text{Card } E \cap F \cap G
\end{aligned}$$

Exercice.

b) Soit les ensembles constitués :
– E_0 : des élèves ne pratiquant ni équitation ni tennis,
– E_1 : des élèves pratiquant le tennis,
– E_2 : des élèves pratiquant l'équitation.

On a :

$$\text{Card } E_0 = 15 \quad ; \quad \text{Card } E_1 = 10 \quad ; \quad \text{Card } E_2 = 20$$

$$\text{Card } E_1 \cap E_2 = 5 \quad ; \quad \text{Card } E_0 \cap E_1 = \text{Card } E_0 \cap E_2 = \text{Card } E_0 \cap E_1 \cap E_2 = 0$$

En appliquant a), le nombres d'élèves dans la classe est :

$$\begin{aligned}\text{Card } E_0 \cup E_1 \cup E_2 &= \text{Card } E_0 + \text{Card } E_1 + \text{Card } E_2 - \text{Card } E_1 \cap E_2 \\ &= 15 + 10 + 20 - 5 = 40\end{aligned}$$

Cardinal d'un produit cartésien

Propriété

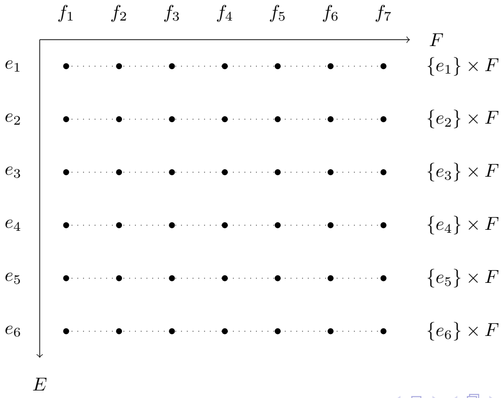
Soient E et F deux ensembles finis.
Alors le produit cartésien $E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}$ est fini et :

$$\boxed{\mathrm{Card}\ E \times F = \mathrm{Card}\ E \times \mathrm{Card}\ F}.$$

Démonstration. Posons :
$n = \mathrm{Card}\ E$, $\quad E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$,
$m = \mathrm{Card}\ F$ $\quad$ et $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$.

Cardinal d'un produit cartésien

Les ensembles $\{e_1\} \times F$, $\{e_2\} \times F$, $\ldots$, $\{e_n\} \times F$ sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{i=1}^{n} \{e_i\} \times F = E \times F$.
(Ce sont les lignes de la figure suivante où on a représenté les éléments de $E \times F$ dans un tableau.)



Cardinal d'un produit cartésien

Chaque partie $\{e_i\} \times F$ a même cardinal que F puisque trivialement l'application de F dans $\{e_i\} \times F$ qui à f_j associe (e_i, f_j) est bijective.
D'après le théorème 7 : $E \times F$ est fini et

$$\mathrm{Card}\ E \times F = \mathrm{Card}\ \bigcup_{i=1}^{n} \{e_i\} \times F = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\ \{e_i\} \times F = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\ F = n \times m$$

Ainsi $\mathrm{Card}\ E \times F = \mathrm{Card}\ E \times \mathrm{Card}\ F$. ∎

Exemple. Dans une classe constituée de 11 garçons et 28 filles il y a $11 \times 28 = 308$ couples garçon/fille possibles.

Produit cartésien de n ensembles

Propriété

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des ensembles finis.
Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est un ensemble fini et

$$\boxed{\mathrm{Card}\ E_1 \times E_2 \times \cdots E_n = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{Card}\ E_k}$$

C'est le nombre de n-uplets dans $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Démonstration. (Esquisse). S'obtient facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en appliquant pour l'hérédité la propriété 9, après avoir remarqué que le produit cartésien $(E_1 \times E_2 \times \cdots E_n) \times E_{n+1}$ de $(E_1 \times E_2 \times \cdots E_n)$ et de E_{n+1} a même cardinal que le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots E_n \times E_{n+1}$ de $E_1, E_2, \dots E_{n+1}$.

Produit cartésien de n ensembles

En effet l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} (E_1 \times E_2 \times \cdots E_n) \times E_{n+1} & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \times \cdots E_n \times E_{n+1} \\ ((x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \end{array}$$

est clairement bijective. ■

Remarque. C'est le nombre de façons de choisir successivement un élément dans chaque ensemble $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Exercice.

Exercice. Combien d'identifiants peut-on créer en respectant le format suivant : 1 lettre, 2 chiffres, 2 lettres,

a) sans différencier la casse : a=A,

b) en respectant la casse : a$\neq$ A.

Résolution.

a) Soit $l = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ et $C = [\![0, 9]\!]$. Un identifiant est un 5-uplet dans $l \times C \times C \times l \times l$. Il y a $26 \times 10^2 \times 26^2 = 26^3 \times 10^2$ possibilités.

b) Soit $L = \{a, b, c, \dots, z, A, B, C, \dots Z\}$ et $C = [\![0, 9]\!]$. Un identifiant est un 5-uplet dans $L \times C \times C \times L \times L$. Il y a $52 \times 10^2 \times 52^2 = 52^3 \times 10^2$ possibilités.

Corollaire

Soient E un ensemble fini et $n \in \mathbb{N}^*$. Le produit cartésien E^n est fini et :

$$\boxed{\mathrm{Card}\ (E^n) = (\mathrm{Card}\ E)^n}.$$

C'est le nombre de n-listes de E.

Remarque. C'est le nombre de façons de choisir successivement n éléments dans E (l'ordre compte !)

Exercice. Combien y-a-t-il de numéros de téléphones possibles en 06 (sur 10 chiffres) ?

Résolution. Autant que de 8-listes de chiffres. Soit $10^8 = 100$ millions.

Nombre d'applications entre deux ensembles finis.

Propriété

Soient E et F deux ensembles finis. L'ensemble des applications de E dans F noté F^E, est fini et de cardinal :

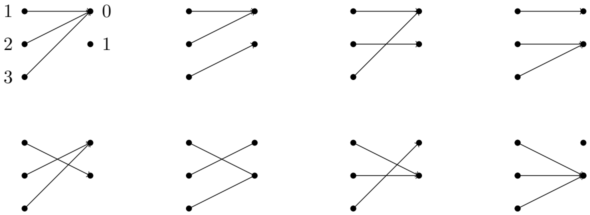
$$\boxed{\mathrm{Card}\ F^E = (\mathrm{Card}\ F)^{\mathrm{Card}\ E}}.$$

Démonstration. Notons $p = \mathrm{Card}\ E$ et $E = \{e_1, e_2, \dots e_p\}$.
Une application $f : E \longrightarrow F$ est uniquement déterminée par la donnée des images par f de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
Ainsi $f : E \longrightarrow F$ est définie par la donnée de la p-liste $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ de F.
D'après le corollaire 11, il y en a exactement $(\mathrm{Card}\ F)^p = (\mathrm{Card}\ F)^{\mathrm{Card}\ E}$. ■

Exemples.

• Il y a exactement 2^p applications de $[\![1,p]\!]$ dans $\{0,1\}$.

• Exemple pour $p=3$; il y a $2^3=8$ applications de $[\![1,3]\!]$ dans $[\![0,1]\!]$:



• Il y a exactement 2^p écritures binaires sur p bits. Ainsi, par exemple sur 8 bits, on peut représenter $2^8=256$ entiers en écriture binaire ; tous les entiers entre 0 et 255 inclus.

p-listes sans répétitions de E

Définition

Soit E un ensemble fini et $p \geqslant 1$ un entier.
On appelle p-liste sans répétition de E, toute p-liste de E, $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in E^p$ vérifiant : $i \neq j \implies x_i \neq x_j$.
On parle aussi d'arrangement de p éléments de E.

Exemple. Lorsque $E = [\![0, 3]\!]$:
$(0, 1, 2)$; $(2, 1, 0)$; $(3, 2, 1)$ sont des 3-listes sans répétition de E.
$(1, 1, 2)$ et $(1, 2, 1)$ n'en sont pas ! (mais ce sont quand même des 3-listes de E ; mais avec répétition.).

Remarque importante.

À une p-liste $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de E peut-être associée l'application de $[\![1, p]\!]$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} f : [\![1, p]\!] & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Pour une p-liste sans répétition, cette application est injective . En effet l'absence de répétition a pour conséquence que :

$$\underbrace{i \neq j \implies x_i \neq x_j}_{\text{car sans répétition}} \implies f(i) \neq f(j).$$

Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier avec $1 \leqslant p \leqslant n$.
Le nombre de p-listes sans répétitions de E (ou nombre d'arrangements de p éléments de E) est :

$$\boxed{\frac{n!}{(n-p)!}}.$$

Remarque. C'est le nombre de façons de choisir successivement p éléments différents dans E.

Exemple. Le nombre de façons de tirer successivement et sans remise 3 boules dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5 est égal à $\frac{5!}{2!} = 3 \times 4 \times 5 = 60$.

Exercice. Combien y-a-t-il de tiercés possibles dans une course de 11 chevaux ?

Résolution. Autant que de 3-listes sans répétition de 11 chevaux ; en effet un tiercé est une liste ordonnée et sans répétition de 3 chevaux. Il y en a donc : $\frac{11!}{(11-3)!} = \frac{11!}{8!} = 11 \times 10 \times 9 = 990$.

Démonstration. Posons $\mathrm{Card}\, E = n$. Pour définir une p-liste sans répétition de E, $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$:

– Il y a n choix possibles pour $x_1 \in E$.
– Il y a $n-1$ choix possibles pour $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$.
– Il y a $n-2$ choix possibles pour $x_3 \in E \setminus \{x_1, x_2\}$.

$\vdots$

– Il y a $n-(p-1)$ choix possibles pour $x_p \in E \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}\}$.

Ainsi le nombre de p-listes sans répétition de E est exactement :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(p-1))$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n-p)!} &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1)) \times \overbrace{(n-p) \times \cdots \times 1}^{=(n-p)!}}{(n-p)!} \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(p-1))\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis.

Corollaire

Soient E et F deux ensembles finis ; $\mathrm{Card}\ E = p$, $\mathrm{Card}\ F = n$.

Il y a exactement $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ *applications injectives de E dans F.*

Démonstration. Notons $E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$. On associe à une application de E dans F la p-liste $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ d'éléments de F, qui la caractérise. Il y a donc autant de telles applications que de p-listes de F.
De plus l'application f est injective si et seulement si la p-liste $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ est sans répétition. Il y a donc autant d'applications injectives de E dans F que de p-listes sans répétition de F. ∎

Permutations.

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in N^*$. On appelle permutation de E toute n-liste sans répétition de E.

Exemple. Les permutations de $[\![1,3]\!]$ sont :

$$(1,2,3) \quad ; \quad (1,3,2) \quad ; \quad (2,1,3) \quad ; \quad (2,3,1) \quad ; \quad (3,1,2) \quad ; \quad (3,2,1)$$

Il y a 6 permutations de $[\![1,3]\!]$.

Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration. Puisqu'un permutation de E est une n-liste sans répétition de E, il suffit d'appliquer le théorème 13 : il y en a $\dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$. ∎

Remarques.

• Le nombre de permutations de E est le nombre de façons de choisir successivement (et sans répétition) tous les éléments de E.

• C'est aussi le nombre de façons d'ordonner les éléments de E.

• À une permutation de $E = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ on peut associer naturellement une bijection de E dans E.

En effet considérons une permutation $(x_1, x_2, \dots x_n)$ de E. Associons-lui l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ e_i & \longmapsto & f(e_i) = x_i \end{array}$$

Puisque $(x_1, x_2, \dots x_n)$ est sans répétition, f est injective, et puisque ensembles de départ et d'arrivée de E ont même cardinal, f est bijective (corollaire 4).

Plus généralement :

Corollaire

Soient E et F deux ensembles de même cardinal non nul. Il existe $n!$ bijections de E dans F.

Démonstration. . Comme dans la remarque ci-dessus, donné $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, à une permutation $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de F, on associe la bijection :

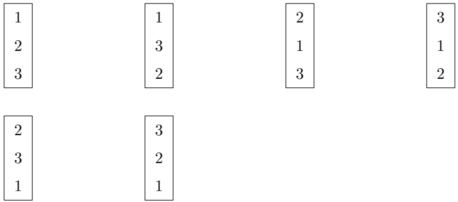
$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ e_i & \longmapsto & f(e_i) = f_i \end{array}$$

Réciproquement une bijection $f : E \longrightarrow F$ définit la permutation $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ de F, dont f est la bijection associée.
Ainsi il y a autant de bijections de E dans F que de permutations de F, soit $n!$.

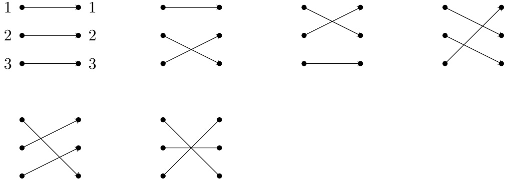
■

Exemple.

- Il y a $3! = 6$ façons de disposer 3 personnes sur un banc.



- Il y a $3! = 6$ bijections de $[\![1, 3]\!]$ dans $[\![1, 3]\!]$:



Combinaisons.

Définition

Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$.
On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie de E de cardinal p.

Exemple. Soit $E = \{0, 1, 2\}$; l'ensemble des parties de E est :

$$\mathscr{P}(E) = \Big\{ \underbrace{\varnothing}_{0-combinaison}, \underbrace{\{0\}, \{1\}, \{2\}}_{1-combinaisons}, \underbrace{\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}}_{2-combinaisons}, \underbrace{\{0,1,2\}}_{3-combinaison} \Big\}$$

Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont les combinaisons d'éléments de E.

Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit $p \in \mathbb{N}$.
Il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons de p éléments de E.

Démonstration. • Si $p > n$ il n'y a aucune combinaisons de p éléments de E (d'après la propriété 2). Or dans ce cas $\binom{n}{p} = 0$; la conclusion est donc vérifiée.

• Si $p = 0$ il y a une combinaison de 0 éléments de E : l'ensemble vide. La conclusion est alors vérifiée puisque $\binom{n}{0} = 1$.

• Supposons désormais que $0 < p \leqslant n$. A chaque p-liste sans répétition de E correspond une combinaisons de p élément de E et un ordre sur ces éléments. Or il y a exactement $p!$ ordres possibles sur p éléments (autant que de permutations de ces éléments). En notant C_n^p le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de cardinal n, on a donc :

$$C_n^p \times p! = \frac{n!}{(n-p)!} \implies C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

■

Remarques.

• Le nombre de combinaisons de p éléments de E est le nombre de façons de choisir simultanément p éléments de E.

• Il y a autant de façons de tirer simultanément p boules dans une urne contenant n boules, que de combinaisons de p éléments d'un ensemble de cardinal n.

Exemple. Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes possibles dans un jeu de 32 cartes ?

Réponse : $\binom{32}{5}$; autant que de combinaisons de 5 éléments dans un ensemble de cardinal 32.

Corollaire

Soit E un ensemble fini de cardinal n. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et de cardinal :

$$\boxed{\mathrm{Card}\ \mathscr{P}(E) = 2^n}$$

Démonstration. Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont toutes les combinaisons d'éléments de E. Soit $p \in [[0, n]]$ et E_p l'ensemble des combinaisons de p éléments de E. Alors les E_0, E_1,... E_n sont deux à deux disjoints et $\mathscr{P}(E) = \bigcup_{p=0}^{n} E_p$. Ainsi d'après les théorèmes 7 et 17 :

$$\mathrm{Card}\ \mathscr{P}(E) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{Card} E_p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^p 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n$$

d'après la formule du binôme. ∎

Exercice. Combien peut-on constituer de jus de fruits différents à partir de fraises, ananas, bananes ?

Résolution. Autant que de combinaisons de 1, 2 ou 3 éléments dans l'ensemble de cardinal 3 constitué des différents fruits. Soit : $\mathrm{Card}\ \mathscr{P}(E) - 1 = 2^3 - 1 = 7$ mélanges possibles.

Remarque. Preuve combinatoire de la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)}_{n \text{ facteurs}}$$

En développant on n'obtiendra que des monômes de la forme $a^k b^{n-k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Combien de fois $a^k b^{n-k}$ apparaitra-t-il pour un k fixé ? Autant de fois qu'il y a de façons de choisir les k facteurs où l'on développera selon a plutôt que selon b ; donc autant que de partie à k éléments dans un ensemble de cardinal n (constitué des n facteurs) ; soit $\binom{n}{k}$. Ainsi :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

C'est la preuve la plus courte de la formule du binôme.