Cours : Développements limités

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Négligeabilité ; notation de Landau

Développements limités ; définition et propriétés
- Définitions et premières propriétés
- Liens avec la continuité et la dérivabilité
- Existence de DL
- Opérations sur les DLs
- Formulaire des $DL_n(0)$ usuels à connaitre

Applications
- Calcul d'équivalent
- Étude des branches infinies

Négligeabilité

Dans ce chapitre toutes les applications sont réelles. On désignera par I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Définition

Soit $a = 0$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un voisinage de a. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note :

$$\boxed{f(x) \underset{a}{=} o(x^n)} \quad \textit{si} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

On lit :

<u>"f est un petit 'o' de x^n au voisinage de a"</u>

ou

<u>"f est négligeable devant x^n au voisinage de a".</u>

Exemples. Au voisinage de $+\infty$:

$$x \underset{+\infty}{=} o(x^2) \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$$p < q \implies x^p \underset{+\infty}{=} o(x^q) \text{ car } \lim_{x\to+\infty} x^{p-q} = 0$$

$$\ln x \underset{+\infty}{=} o(x) \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Au voisinage de 0 :

$$x^2 \underset{0}{=} o(x) \text{ car } \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$p < q \implies x^q \underset{0}{=} o(x^p) \text{ car } \lim_{x\to0} x^{q-p} = 0$$

$$\ln x \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ car } \lim_{x\to0^+} x \ln x = 0$$

Remarque. On a $f(x) \underset{a}{=} o(x^n)$ si et seulement si $f(x) = x^n \times \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$; en effet il suffit de poser $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{x^n} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
En particulier : $f(x) \underset{a}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Propriété

$$f(x) \underset{a}{=} o(x^n) \text{ et } x^n \underset{a}{=} o(x^m) \implies f(x) \underset{a}{=} o(x^m)$$
$$\forall p \in \mathbb{Z}, f(x) \underset{a}{=} o(x^n) \implies f(x) \times x^p \underset{a}{=} o(x^{n+p})$$
$$f(x) \underset{a}{=} o(x^n) \text{ et } g(x) \underset{a}{=} o(x^n) \implies \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda.f(x) + \mu.g(x) \underset{a}{=} o(x^n)$$

Démonstration.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x\to a} \frac{x^n}{x^m} = 0 \underset{\text{produit}}{\implies} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x^m} = 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \underset{\text{produit}}{\implies} \lim_{x\to a} \frac{f(x) \times x^p}{x^{n+p}} = 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{x^n} = 0 \underset{\substack{\text{combinaison}\\ \text{linéaire}}}{\implies} \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{x\to a} \frac{\lambda f(x) + \mu g(x)}{x^n} = 0 \quad \blacksquare$$

Propriété

$$f(x) \underset{0}{=} o(x^n) \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad f(\alpha x) \underset{0}{=} o(x^n)$$
$$f(x) \underset{\pm\infty}{=} o(x^n) \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(\alpha x) \underset{\pm\infty}{=} o(x^n)$$

Démonstration. Soit $a = 0, +\infty$ ou $-\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}_*$ avec $\alpha > 0$ si $a = \pm\infty$. Alors :

$$f(x) \underset{a}{=} o(x^n) \Longrightarrow \frac{f(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \underset{\text{composition}}{\Longrightarrow} \frac{f(\alpha x)}{(\alpha x)^n} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \Longrightarrow \frac{f(\alpha x)}{x^n} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \times \alpha^n = 0$$

■

Développements limités au voisinage de 0

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 si il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k \underset{0}{=} o(x^n).$$

Dans ce cas on écrit le développement limité de $f(x)$, noté $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k + o(x^n).$$

La partie régulière du développement limité est $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$; c'est un polynôme de degré au plus n.

Remarque. Un développement limité d'ordre n de $f(x)$ donne une approximation par un polynôme de degré au plus n de $f(x)$ au voisinage de 0. Plus l'ordre n est élevé, plus l'approximation est fine.

C'est par exemple, comme nous le verrons plus loin, ce qui justifie l'approximation habituelle aux physiciens de $\sin(x) \approx x$ lorsque x est proche de 0, qui s'écrit mathématiquement $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$.

Parfois les physiciens sont contraints d'aller plus loin dans l'approximation : $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$ (mathématiquement : $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$)...

Exemples.

• Développement limité d'ordre n en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - x^{n+1} = 1^{n+1} - x^{n+1} = (1-x) \times \sum_{k=0}^{n} 1^{n-k} \times x^k = (1-x) \times \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k \iff \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Or :

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{0}{=} o(x^n) \quad \text{puisque} \quad \frac{x^{n+1}}{x^n(1-x)} = \frac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)}$$

• Développement limité d'ordre n en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.

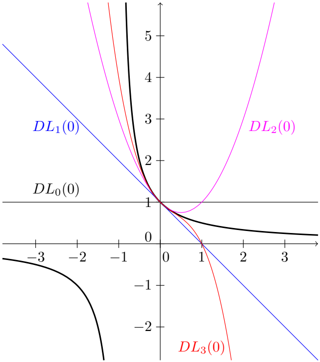
En appliquant le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$ à $-x$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \underset{0}{=} o(x^n)$$

Soit :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

On a tracé les courbes représentatives de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ ainsi que des parties régulières (polynômes) de ses développements limités aux ordres 0, 1, 2 et 3.



Plus l'ordre du DL est élevé, meilleure est l'approximation au voisinage du point d'abscisse 0.
Par contre ces approximations ne sont valables qu'au voisinage de ce point : la limite de f en $+\infty$ est nulle, tandis que toutes les parties régulières de ses DL auront une limite non nulle en $+\infty$ (infinie si $n > 0$).

Développements limités au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Il est intéressant d'obtenir aussi des approximations d'une fonction par des polynômes au voisinage d'un réel quelconque dans son domaine de définition.

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a (ou $DL_n(a)$) si $h \longmapsto f(a+h)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0.
Dans ce cas le $DL_n(0)$ de $f(a+h)$:

$$f(a+h) \underset{0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 \times h + \lambda_2 \times h^2 + \cdots \lambda_n \times h^n + o(h^n)$$

donne le $DL_n(a)$ de f :

$$f(x) \underset{a}{=} \lambda_0 + \lambda_1 \times (x-a) + \lambda_2 \times (x-a)^2 + \cdots \lambda_n \times (x-a)^n + o((x-a)^n)$$

où $o((x-a)^n) = (x-a)^n \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Exemple. $DL_n(1)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

En posant $x = 1 + h$, et en appliquant le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$ on obtient le $DL_n(1)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$:

$$\frac{1}{1+h} \underset{0}{=} 1 - h + h^2 - h^3 + \cdots + (-1)^n h^n + o(h^n)$$

que l'on écrit aussi :

$$\frac{1}{x} \underset{1}{=} 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots + (-1)^n (x-1)^n + o((x-1)^n).$$

où la notation $o((x-1)^n)$ signifie $(x-1)^n \times \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 1} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque. Dans la pratique on ramène un $DL_n(a)$ de $f(x)$ à un $DL_n(0)$ de $f(a+h)$. Les propriétés du cours sont pour la plupart énoncées pour des $DL_n(0)$ mais s'appliquent aussi pour des $DL_n(a)$ en "se ramenant en 0", c'est à dire en considérant le $DL_n(0)$ de $f(a+h)$.

Unicité du $DL_n(a)$

Propriété

Si f admet un le $DL_n(a)$:

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \times (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont uniques.

La partie régulière du $DL_n(a)$ de $f(x)$ est le polynôme de degré $\leqslant n$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \times (x-a)^k.$$

La partie régulière d'un $DL_n(a)$ de $f(x)$, si elle existe, est unique.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $a = 0$. Procédons par l'absurde en supposant qu'il existe deux polynômes différents $P_n, Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$f(x) - P_n(x) \underset{0}{=} o(x^n) = x^n \times \varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$f(x) - Q_n(x) \underset{0}{=} o(x^n) = x^n \times \varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

En soustrayant la première inégalité à la deuxième on obtient :

$$P_n(x) - Q_n(x) = x^n \times \underbrace{(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x))}_{\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0} \implies \lim_{x \to 0} \frac{P_n(x) - Q_n(x)}{x^n} = 0 \qquad (*)$$

Or par hypothèse $P_n - Q_n$ est un polynôme non nul. Soit ℓ le degré de son monôme non-nul de plus bas degré :

$$P_n(x) - Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_\ell x^\ell + \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k x^k$$

Or un polynôme non nul, est équivalent en 0 à son monôme de plus bas degré (cf. Chapitre "Limites de fonctions"). En particulier, on a l'équivalent : $P_n(x) - Q_n(x) \underset{0}{\sim} a_\ell x^\ell$ avec $a_\ell \neq 0$ et $0 \leqslant \ell \leqslant n$.

Ainsi par quotient d'équivalents :

$$\frac{P_n(x) - Q_n(x)}{x^n} \underset{0}{\sim} a_\ell x^{\ell - n} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} a_\ell \neq 0 & \text{si } \ell = n \\ \pm\infty & \text{si } \ell < n \end{cases}$$

Cela contredit $(*)$; donc $P_n = Q_n$. ■

Troncature

Propriété

Si f admet pour $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)$$

alors pour tout entier naturel $p \leqslant n$, f admet pour $DL_p(0)$:

$$f(x) \underset{0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p + o(x^p)$$

Sa partie régulière est appelée troncature à l'ordre p de celle du $DL_n(0)$. On note pour tout entier naturel $p \leqslant n$:

$$Tronc_p\left(\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n\right) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p$$

Démonstration. Soit f admettant le $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)$$

alors il existe $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&= \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p + \lambda_{p+1} x^{p+1} + \cdots + \lambda_n x^n + x^n \times \varepsilon(x) \\
&= \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p + x^p \times \underbrace{\left(\lambda_{p+1} x + \cdots + \lambda_n x^{n-p} + x^{n-p} \times \varepsilon(x)\right)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\ 0 \text{ car } n-p \geqslant 0 \text{ et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} \\
&\underset{0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_p x^p + o(x^p)
\end{aligned}$$

■

Un DL d'ordre plus élevé donne une approximation polynomiale plus fine de $f(x)$ au voisinage d'un réel. Les développements limités constituent l'outil ultime pour étudier localement une application réelle au voisinage d'un point. Selon nécessité on sera amené pousser le développement limité à un ordre suffisamment grand. Les DLs ne donnent par contre aucune information globale sur l'application.

Liens avec la continuité et la dérivabilité

Propriété

On a les équivalences :

- *f est continue en $a \iff f$ admet un $DL_0(a)$; dans ce cas :*

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$$

- *f est dérivable en $a \iff f$ admet un $DL_1(a)$; dans ce cas :*

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a) \times (x-a) + o(x-a).$$

Démonstration. L'application f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) \underset{a}{=} \lambda_0 + o(1) \iff \lim_{x\to a} f(x) - \lambda_0 = 0 \iff \lim_{x\to a} f(x) = \lambda_0$$

et donc si et seulement si f est continue en a ; on a alors $\lambda_0 = f(a)$.

Si f est dérivable en a alors $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell = f'(a) \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0$$
$$\implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \underset{a}{=} o(1) \implies f(x)-f(a)-f'(a)\times(x-a) \underset{a}{=} o(x-a)$$
$$\implies f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)\times(x-a) + o(x-a)$$

et donc f admet un $DL_1(a)$. Réciproquement si f admet un $DL_1(a)$, alors d'après la propriété 4 f est continue en a et :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{a}{=} f(a) + \lambda_1 \times (x-a) + o(x-a) \\ &\underset{a}{=} f(a) + \lambda_1 \times (x-a) + (x-a)\times o(1) \end{aligned}$$
$$\implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lambda_1 \underset{a}{=} o(1) \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda_1$$

et donc f est dérivable en a, de nombre dérivée $f'(a) = \lambda_1$. ∎

Remarques.

• Avec la propriété 4 on retrouve que f dérivable en a implique f continue en a.

• La fonction $x \longmapsto |x|$ n'admet aucun $DL_n(0)$ pour $n \geqslant 1$ puisqu'elle n'est pas dérivable en 0. La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ n'admet aucun $DL_n(0)$ puisqu'elle n'y est pas continue.

• Lorsque f est dérivable en a, la partie régulière de son $DL_1(a)$ donne l'équation de la droite tangente à sa courbe au point d'abscisse a.

Exercice. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$;

1. À l'aide d'un $DL_1(0)$ déterminer l'équation de la tangente Δ_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. À l'aide d'un $DL_2(0)$ déterminer la position relative de la courbe et de Δ_0 localement autour du point d'abscisse 0.

Résolution. On a deja établi le $DL_n(0)$ de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

1) On en déduit par troncature à l'ordre 1 le $DL_1(0)$ de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + o(x)$$

ce qui donne l'équation de la tangente Δ_0 : $y = 1 - x$.

2) La troncature à l'ordre 2 donne le $DL_2(0)$ de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente, c'est déterminer si elle se trouve dessus, dessous, et où. Cela revient donc à déterminer le signe de $f(x) - (1 - x)$ lorsque x est suffisamment proche de 0.

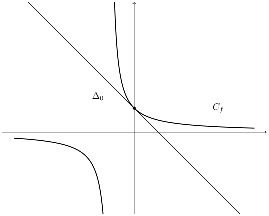
$$f(x) - (1-x) \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2) - (1-x) \underset{0}{=} x^2 + o(x^2)$$

Or par définition il existe $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ tel que :

$$x^2 + o(x^2) = x^2 + x^2 \times \varepsilon(x) = \underbrace{x^2}_{\geqslant 0} \times \underbrace{(1 + \varepsilon(x))}_{\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1}$$

puisque $1 + \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$, $1 + \varepsilon(x) \geqslant 0$ lorsque x est suffisamment proche de 0. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ reste au-dessus de sa tangente au voisinage du point de tangence.

On ne peut pas à l'aide du DL donner plus de précision, et notamment pas leur position relative hors d'un voisinage du point de tangence.



Ici il s'avère (graphiquement) que $\mathscr{C}_f$ reste au-dessus pour $x > -1$ et au-dessous pour $x < -1$.

Ainsi si un $DL_1(a)$ donne l'équation de la tangente en a, un $DL(a)$ à un ordre suffisant ayant une partie régulière non-nulle permet d'obtenir la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage du point de tangence.
Si dans le DL le premier monôme non nul de degré $\geqslant 2$ est celui de degré 2, le DL_2 suffit, et la position est dessus ou dessous.
Si par contre c'est celui de degré 3, dans ce cas la position relative change au point de tangence dessus-dessous ou l'inverse, etc.
Il faut pousser l'ordre du DL jusqu'à obtenir le premier monôme de degré $\geqslant 2$ non nul ; le type de position relative dépendra alors de la parité de ce monôme et ne pourra être que de deux types : constant ou qui change au point de tangence (du moins lorsqu'un $DL_{\geqslant 2}$ à une partie régulière non-nulle).

Remarque. La propriété 5 ne se généralise par aux ordre supérieurs : par exemple pour $n = 2$, avoir un $DL_2(a)$ n'est pas équivalent à être 2 fois dérivable en a. Voir l'exemple qui suit.

Exemple. Soit :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrons que $f(x)$ admet le $DL_2(0)$: $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$ mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Le quotient $\frac{f(x)}{x^2}$ n'est pas défini en 0 et ailleurs vaut $\frac{f(x)}{x^2} = x \sin \frac{1}{x}$; d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. Ainsi par définition $f(x)$ admet pour $DL_2(0)$:

$$f(x) \underset{0}{=} o(x^2).$$

Etudions la dérivabilité de f : f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de composées d'applications dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} + x^3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \cos \frac{1}{x} = x \times \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$$

En $x = 0$:

$$T_0 f(x) = \frac{x^3 \sin \dfrac{1}{x} - 0}{x - 0} = x^2 \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

d'après le théorème des gendarmes.

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$f'(x) = \begin{cases} x \times \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrons que f' n'est pas dérivable en 0 :

$$T_0 f'(x) = \frac{x \times \left(3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \underbrace{3x \sin \frac{1}{x}}_{\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0} - \cos \frac{1}{x}$$

qui n'a pas de limite en 0, car autrement $g(x) = \cos \frac{1}{x}$ aurait une limite en 0, ce qui est faux puisque avec $u_n = \frac{1}{n\pi} \longrightarrow 0$, $g(u_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Ainsi f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Formule de Taylor-Young

L'existence d'un $DL_n(a)$ pour une application f est assuré lorsque f est suffisamment régulière au voisinage de a ; de plus sa partie régulière s'exprime à l'aide des dérivées successives de f. C'est la formule de Taylor-Young :

Théorème

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $a \in I$. Alors f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$
\begin{aligned}
f(x) &\underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{[n]}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \\
&\underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(a)}{k!}(x-a)^k \quad + o((x-a)^n)
\end{aligned}
$$

Sa partie régulière s'appelle le polynôme de Taylor de f à l'ordre n.

Remarque. D'après cette formule une application de classe $\mathscr{C}^n$ admet un $DL_n(a)$ en tout point $a \in I$. C'est une condition suffisante mais non nécessaire. En effet, par exemple, d'après la propriété 5, admettre un $DL_1(a)$ est équivalent à être dérivable en a ; et nous savons qu'il existe des applications dérivables qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$ (vois un exemple dans le chapitre "Dérivabilité"). Nous avons vu aussi dans l'exemple précédent une application admettant un $DL_2(0)$ qui n'est pas deux fois dérivable en 0 et donc à fortiori qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Démonstration. Admis.

Exemple. $DL_n(0)$ d'un polynôme de degré $\leqslant n$.

Soit le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; P est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$; d'après la formule de Taylor-Young il admet donc le $DL_n(0)$:

$$P(x) \underset{0}{=} P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{P^{[n]}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Mais puisque $P(x)$ et la partie régulière du $DL_n(0)$ sont deux polynômes de degrés $\leqslant n$, par soustraction le terme $o(x^n) = x^n\varepsilon(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$, et il est donc soit nul soit équivalent en 0 à son monôme de plus bas degré $a_d x^d$ avec $d \leqslant n$ et $a_d \neq 0$.

Supposons que $x^n\varepsilon(x)$ n'est pas le polynôme identiquement nul, alors :

$$\frac{x^n\varepsilon(x)}{x^n} \underset{0}{\sim} \frac{a_d x^d}{x^n} \underset{0}{\sim} a_d x^{d-n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Mais c'est impossible puisque $d-n \leqslant 0$ et $a_d \neq 0$. Ainsi $x^n\varepsilon(x)$ est le polynôme identiquement nul. Ainsi, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{P^{[n]}(0)}{n!}x^n$$

Ainsi :

Le coefficient d'ordre k, a_k, du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ vérifie :

$$a_k = \frac{P^{[k]}(0)}{k!}$$

Le raisonnement se généralise au $DL_n(a)$ de P : d'après la formule de Taylor-Young :

$$P(x) \underset{a}{=} P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{[n]}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

$$\iff P(a+h) \underset{0}{=} P(a) + P'(a)h + \frac{P''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{P^{[n]}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$

Mais $P(a+h)$ est un polynôme en h de même degré que P, soit au plus n, tout comme la partie régulière du $DL_n(0)$, ainsi le $o(h^n) = o((x-a)^n)$ est le polynôme identiquement nul. On obtient la formule de Taylor-Young pour un polynôme :

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg P \leqslant n$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{[n]}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exemple. Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$; donner les $DL_n(1)$ de P pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

On calcule les dérivées successives de P :

$P' = 3X^2 + 2X + 1$

$P'' = 6X + 2$

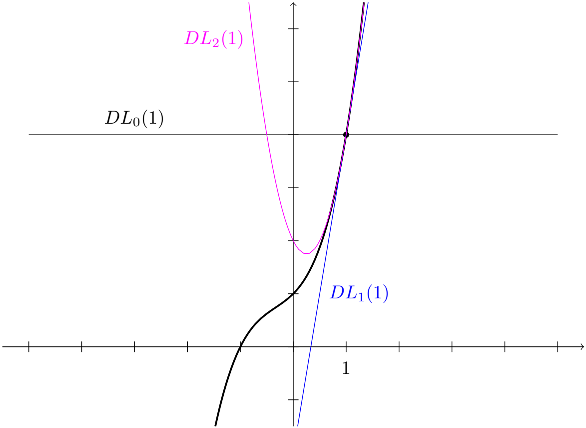
$P''' = 6$

$P^{[n]} = \mathbb{O}_{\mathbb{R}[X]}$ si $n \geqslant 4$

Ainsi on a les $DL_n(1)$ de P :

$$
\begin{aligned}
P(x) &\underset{1}{=} 4 + o(1) && \text{pour } n = 0 \\
P(x) &\underset{1}{=} 4 + 6 \times (x-1) + o(x-1) && \text{pour } n = 1 \\
P(x) &\underset{1}{=} 4 + 6 \times (x-1) + 4 \times (x-1)^2 + o((x-1)^2) && \text{pour } n = 2 \\
P(x) &\underset{1}{=} 4 + 6 \times (x-1) + 4 \times (x-1)^2 + (x-1)^3 && \text{pour } n \geqslant 3
\end{aligned}
$$

On a tracé dans le plan la courbe de P ainsi que celles des parties régulières de tous ses $DL_n(1)$:



Exemple : obtention des $DL_n(0)$ de exp cos et sin, $(1+x)^\alpha$

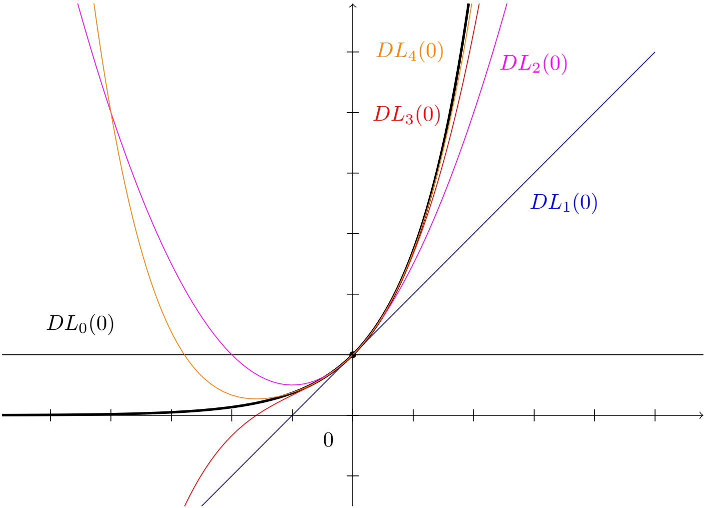
La formule de Taylor-Young permet l'obtention de DL_n pour une application de classe $\mathscr{C}^n$; mais au prix du calcul des dérivées n-ièmes (du moins au point a du développement) ce qui n'est pas toujours simple.
Nous l'utilisons ici, pour établir les $DL_n(0)$ usuels des fonctions exp, cos, sin et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ dont les dérivées n-ièmes s'obtiennent assez facilement.

- $DL_n(0)$ de exp.

L'application exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et donc $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle admet pour tout $n \in \mathbb{N}$ un $DL_n(0)$; sa dérivée n-ème est elle-même : $\exp^{[n]} = \exp$, et $\exp^{[n]}(0) = 1$, donc d'après le formule de Taylor-Young :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$


$DL_4(0)$
$DL_2(0)$
$DL_3(0)$
$DL_1(0)$
$DL_0(0)$
0

• $DL_n(0)$ de cos.

L'application cos est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et donc admet un $DL_n(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Calculons ses dérivées successives :

$\cos'(x) = -\sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

$\cos''(x) = -\cos(x) = \cos(x + \pi)$

$\cos^{[3]}(x) = \sin(x) = \cos(x + \frac{3\pi}{2})$

$\cos^{[4]}(x) = \cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.

Vérifions par récurrence que $\cos^{[n]}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$. L'initialisation est claire, passons à l'hérédité :

$\cos^{[n+1]}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})' = -sin(x + \frac{n\pi}{2}) = \cos(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{(n+1)\pi}{2})$

en appliquant la formule : $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$. Ce qui conclut la récurrence.

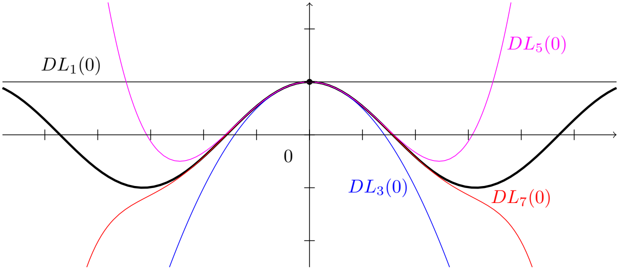
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \cos^{[n]}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})}$$

En particulier, pour $x = 0$:

$$\cos^{[n]}(0) = \cos(0 + \frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

Donc pour $n = 2p + 1$, on a avec la formule de Taylor-Young :

$$\boxed{\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})}$$



- $DL_n(0)$ de sin.

L'application sin est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et donc admet un $DL_n(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Calculons ses dérivées successives :

$\sin'(x) = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$\sin''(x) = -\sin(x) = \sin(x + \pi)$

$\sin^{[3]}(x) = -\cos(x) = \sin(x + \frac{3\pi}{2})$

$\sin^{[4]}(x) = \sin(x) = \sin(x + 2\pi)$.

Vérifions par récurrence que $\sin^{[n]}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. L'initialisation est claire, passons à l'hérédité :

$\sin^{[n+1]}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})' = \cos(x + \frac{n\pi}{2}) = \sin(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{(n+1)\pi}{2})$

en appliquant la formule : $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$. Ce qui conclut la récurrence.

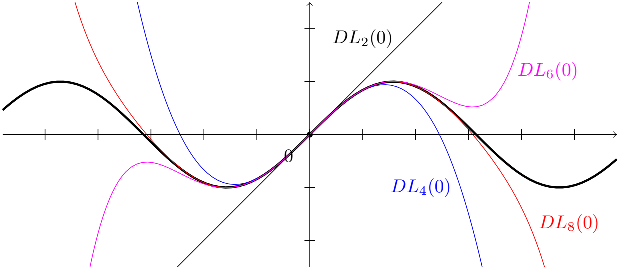
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sin^{[n]}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})}$$

En particulier, pour $x = 0$:

$$\sin^{[n]}(0) = \sin(0 + \frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

Donc pour $n = 2p + 2$, on a avec la formule de Taylor-Young :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$



Remarque. On voit apparaitre sur les développements de cos et sin un phénomène : la partie régulière d'un $DL_n(0)$ a même parité que la fonction.

Propriété

Soit f admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière P_n. Alors :

Si f est paire alors P_n est paire ; P_n ne comporte que des monômes d'exposants pairs.

Si f est impaire alors P_n est impaire ; P_n ne comporte que des monômes d'exposants impairs.

Démonstration. En appliquant le $DL_n(0)$ à $-x$

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

$$f(-x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + o(x^n)$$

Si f est paire, $f(-x) = f(x)$ et donc :

$$f(x) - f(-x) = 0 \implies \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(1 - (-1)^k\right)}_{\neq 0 \iff k \text{ impair}} a_k x^k \underset{0}{=} o(x^n)$$

Puisque lorsque $k \leqslant n$, $\dfrac{x^k}{x^n} = x^{k-n}$ n'a pas limite 0 en 0, nécessairement pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $(1 - (-1)^k)a_k = 0 \implies a_k = 0$ lorsque k est impair.

Ainsi P_n n'a que des monômes de degrés pairs.

Si f est impaire, $f(-x) = -f(x)$ et donc :

$$f(x) + f(-x) = 0 \implies \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(1 + (-1)^k\right)}_{\neq 0 \iff k \text{ pair}} a_k x^k \underset{0}{=} o(x^n)$$

Nécessairement pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $(1 + (-1)^k)a_k = 0 \implies a_k = 0$ lorsque k est pair.

Ainsi P_n n'a que des monômes de degrés impairs. ■

• $DL_n(0)$ de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$).

L'application $f(x) = (1+x)^\alpha$ est définie sur $]-1;+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ par composition puisque :
$f(x) = \exp(\alpha \ln(1+x))$. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$f^{[k]}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \times (1+x)^{\alpha-k} = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)\right) \times (1+x)^{\alpha-k}$$

(I) Pour $k=0$: $\left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)\right) \times (1+x)^{\alpha-k} = (1+x)^\alpha = f(x)$. L'hypothèse est vérifiée.

(H) Supposons l'hypothèse vérifiée au rang $k \in \mathbb{N}$;

$$\begin{aligned} f^{[k+1]}(x) &\underset{HR}{=} \left(\left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)\right) \times (1+x)^{\alpha-k}\right)' \\ &= \left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)\right) \times (\alpha-k) \times (1+x)^{\alpha-k-1} \\ &= \left(\prod_{j=0}^{(k+1)-1}(\alpha-j)\right) \times (1+x)^{\alpha-(k+1)} \end{aligned}$$

et donc elle reste vraie au rang $k+1$. On conclut par principe de récurrence.

En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$f^{[k]}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \times 1^{\alpha-k} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

Ainsi, avec la formule de Taylor-Young :

$$(1+x)^{\alpha} \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Cette formule s'appelle la formule du binôme généralisé ; en effet :

– lorsque α est un entier naturel, pour tout $k \in [[0, n]]$:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\times(\alpha-k)!}{k!(\alpha-k)!} = \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!} = \binom{\alpha}{k}$$

et on retrouve le développement par la formule du binôme de $(1+x)^{\alpha}$ comme partie régulière du $DL_{\alpha}(0)$ (et dans ce cas il y a égalité puisque f est un polynôme de degré α).

Exercice. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ et en déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \times \left(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right)$$

Résolution.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} &\underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} + o(x^3)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \underset{0}{=} \frac{3x^3}{48} + o(x^3)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x^3} \times \left(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right) \underset{0}{=} \frac{3}{48} + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

Combinaison linéaire

Tous les énoncés sont donnés pour des développements limités en 0, mais restent vrais en un réel *a* quelconque.

Propriété

Si f et g admettent des $DL_n(0)$ alors $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $(\lambda f+\mu g)$ admet un $DL_n(0)$ et si P_n, Q_n sont les parties régulières des DLs de f et g :

$$\left.\begin{array}{r}f(x)\underset{0}{=}P_n(x)+o(x^n)\\ g(x)\underset{0}{=}Q_n(x)+o(x^n)\end{array}\right\}\Longrightarrow \lambda f(x)+\mu g(x)\underset{0}{=}\lambda P_n(x)+\mu Q_n(x)+o(x^n)$$

Remarque. En particulier sous ces hypothèses λf admet pour $DL_n(0)$:
$\lambda f(x)\underset{0}{=}\lambda P_n(x)+o(x^n)$ et $f+g$ admet pour $DL_n(0)$:
$(f+g)(x)\underset{0}{=}P_n(x)+Q_n(x)+o(x^n)$.

Démonstration. Par définition :

$$\left.\begin{array}{r} f(x) - P_n(x) \underset{0}{=} o(x^n) \\ g(x) - Q_n(x) \underset{0}{=} o(x^n) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda \times \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} + \mu \times \frac{g(x) - Q_n(x)}{x^n} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\Longrightarrow \lambda f(x) + \mu g(x) - (\lambda P_n(x) + \mu Q_n(x)) \underset{0}{=} o(x^n)$$

ce qui donne, puisque $\lambda P_n(x) + \mu Q_n(x)$ est un polynôme de degré au plus n, le $DL_n(0)$: $\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{0}{=} \lambda P_n(x) + \mu Q_n(x) + o(x^n)$. ∎

Produit

Propriété

Si f et g admettent des $DL_n(0)$ alors $f \times g$ admet un $DL_n(0)$ et si P_n, Q_n sont les parties régulières des DLs de f et g :

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \underset{0}{=} P_n(x) + o(x^n) \\ g(x) \underset{0}{=} Q_n(x) + o(x^n) \end{array}\right\} \implies f(x) \times g(x) \underset{0}{=} Tronc_n\left(P_n(x) \times Q_n(x)\right) + o(x^n)$$

Démonstration. On a par définition :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + x^n \times \varepsilon_1(x) \\ g(x) &= Q_n(x) + x^n \times \varepsilon_2(x) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et P_n, Q_n sont des polynômes de degrés $\leqslant n$.

Ainsi :

$$f(x)\times g(x)=\underbrace{P_n(x)\times Q_n(x)}_{\text{polynôme de degré } \leqslant 2n}+\underbrace{x^nP_n(x)\varepsilon_2(x)+x^nQ_n(x)\times\varepsilon_1(x)+x^{2n}\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)}_{=o(x^n)}$$

$$\underset{0}{=}\underbrace{Tronc_n(P_n(x)\times Q_n(x))}_{\text{polynôme de degré } \leqslant n}+\sum_{k=n+1}^{2n}a_kx^k+o(x^n)$$

or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}a_kx^k=x^n\times\sum_{k=n+1}^{2n}a_kx^{k-n}\underset{0}{=}o(x^n)$ car $k-n\geqslant 1$

$$f(x)\times g(x)\underset{0}{=}Tronc_n(P_n(x)\times Q_n(x))+o(x^n)+o(x^n)$$

$$\underset{0}{=}\underbrace{Tronc_n(P_n(x)\times Q_n(x))}_{\text{partie régulière}}+o(x^n)$$

■

Exemple. $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$:

On a $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{1+x}$ et :

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$
$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2} &\underset{0}{=} Tronc_3\Big((1+x+x^2+x^3) \times (1-x+x^2-x^3)\Big) + o(x^3) \\
&\underset{0}{=} 1 \times 1 + (-1+1)x + (1-1+1)x^2 + (1-1+1-1)x^3 + o(x^3) \\
&\underset{0}{=} 1 + x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

La fonction étant paire, sa partie régulière n'a que des monômes de degrés pairs.

Composition

Propriété

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$ de sorte que la composée $g \circ f$ est définie sur I. Si f et g admettent un $DL_n(0)$ et si $f(0) = 0$ alors $g \circ f$ admet aussi un $DL_n(0)$ et :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{0}{=} P_n(x) + o(x^n) \\ g(x) \underset{0}{=} Q_n(x) + o(x^n) \end{array}\right\} \Longrightarrow (g \circ f)(x) \underset{0}{=} Tronc_n(Q \circ P(x)) + o(x^n)$$

Démonstration. On a par définition :

$$f(x) = P(x) + x^n \times \varepsilon_1(x)$$
$$g(x) = Q(x) + x^n \times \varepsilon_2(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et P, Q sont des polynômes de degrés au plus n.

Puisque $f(0)=0$, par passage à la limite $f(0)=0=P(0)$ (puisque f est nécessairement continue en 0 d'après la propriété 5) ; ainsi 0 est racine de P et donc $P(x)=x\times R(x)$ avec R un polynôme de degré $\leqslant n-1$.

Notons $Q=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$;

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g\Big(P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big)\\ &\underset{0}{=} Q\Big(P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big)+\Big(P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big)^n\times\varepsilon_2\Big(P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big)\\ &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\Big(P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big)^k+\Big(xR(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big)^n\times\varepsilon_2\Big(xR(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big) \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned} \Big(P(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big)^k &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}P(x)^{k-j}\left(x^n\varepsilon_1(x)\right)^j\\ &= P(x)^k+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}P(x)^{k-j}\left(x^n\varepsilon_1(x)\right)^j \end{aligned}$$

$$= P(x)^k + x^n\varepsilon_1(x) \times \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} P(x)^{k-j} \left(x^n\varepsilon_1(x)\right)^{j-1}}_{=\alpha_k \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \binom{k}{1}P(0)^{k-1}=0}$$

$$= P(x)^k + x^n\varepsilon_1(x)\alpha_k(x)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &\underset{0}{=} a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\Big(P(x)^k + x^n\varepsilon_1(x)\alpha_k(x)\Big) \\ &\qquad + x^n \times \left(R(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x)\right)^n \times \varepsilon_2\Big(xR(x) + x^n\varepsilon_1(x)\Big) \\ &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k P(x)^k + x^n \times \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_1(x)\alpha_k(x) \\ &\qquad + x^n \times \left(R(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x)\right)^n \times \varepsilon_2\Big(xR(x) + x^n\varepsilon_1(x)\Big) \\ &\underset{0}{=} Q\circ P(x) + x^n \times \varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

avec :

$$\varepsilon_3(x) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\varepsilon_1(x)\alpha_k(x)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} + \left(R(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x)\right)^n \times \underbrace{\varepsilon_2\left(xR(x) + x^n\varepsilon_1(x)\right)}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi :

$$g \circ f(x) \underset{0}{=} Q \circ P(x) + o(x^n)$$

où $Q \circ P$ est un polynôme (de degré au plus $n \times n = n^2$). Donc par définition il existe un polynôme $\delta(x)$ tel que :

$$Q \circ P(x) = Tronc_n\left(Q \circ P(x)\right) + \underbrace{x^{n+1} \times \delta(x)}_{=o(x^n)}$$

Ainsi on a le $DL_n(0)$ de $(g \circ f)(x)$:

$$g \circ f(x) \underset{0}{=} Tronc_n\left(Q \circ P(x)\right) + o(x^n)$$

■

Remarque. Attention à l'hypothèse $f(0) = 0$; si $f(0) = a \neq 0$ le résultat reste vrai en changeant le $DL_n(0)$ de g par un $DL_n(a)$.

Exemples.

- $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$.

On considère la composée : $x \longrightarrow x^2 \xrightarrow{\frac{1}{1-X}} \dfrac{1}{1-x^2}$. On a les $DL_3(0)$:

$$x^2 \underset{0}{=} x^2 + o(x^3) \qquad ; \qquad \frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

et pour $x = 0$, $x^2 = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &\underset{0}{=} Tronc_3\Big(1 + (x^2) + (x^2)^2 + (x^2)^3\Big) + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} 1 + x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

- $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{2+x^2}$.

On ne peut pas considérer la composée : $x \longrightarrow 1+x^2 \overset{\frac{1}{1+X}}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2+x^2}$ car en $x=0$, $1+x^2 = 1 \neq 0$, ou alors il faudrait le DL_3 en 1 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.
Plutôt on transforme l'expression :

$$\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{2}}$$

pour considérer la composition : $x \longrightarrow \frac{x^2}{2} \overset{\frac{1}{2}\frac{1}{1+X}}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2+x^2}$
On a les $DL_3(0)$:

$$\frac{x^2}{2} \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad ; \qquad \frac{1}{2\times(1+x)} \underset{0}{=} \frac{1}{2} \times \left(1 - x + x^2 - x^3\right) + o(x^3)$$

et pour $x=0$, $\dfrac{x^2}{2} = 0$.

Ainsi :

$$\frac{1}{2+x^2} \underset{0}{=} \frac{1}{2} \times Tronc_3\left(1 - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^3\right) + o(x^3)$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$$

- $DL_3(0)$ de tan :

On a $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et les $DL_3(0)$:

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Déterminons un $DL_3(0)$ de $\frac{1}{\cos(x)}$ par composition pour en déduire par produit un $DL_3(0)$ de tan.

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 + \underbrace{(\cos(x) - 1)}_{=0 \text{ si } x=0}}$$

Donc par composition : $x \longrightarrow \cos(x) - 1 \xrightarrow{\frac{1}{1+X}} \dfrac{1}{\cos(x)}$:

$$\cos(x) - 1 \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad ; \qquad \frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &\underset{0}{=} Tronc_3\left(1 - \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 - \left(-\frac{x^2}{2}\right)^3\right) + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

Ainsi par produit :

$$\begin{aligned}\tan(x) &\underset{0}{=} Tronc_3\left(\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right) + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} x \times 1 + x \times \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \times 1 + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} x + \frac{3-1}{6} \times x^3 + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

La fonction tan étant impaire on obtient une partie régulière impaire.

Remarque. Méthode : Si $f(0) = a \neq 0$ comment composer ?

• On transforme pour se ramener à un $DL(0)$ usuel, à l'aide d'une des formules :

$$\frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1+\frac{h}{a}} \quad ; \quad \exp(a+h) = e^a \times \exp(h) \quad ; \quad \ln(a+h) = \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)$$

• Sinon, il faut un $DL(a)$ de g pour obtenir le $DL(0)$ de $g \circ f$.

Primitivation

Propriété

Si f' est continue sur un voisinage I de 0 et admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ et :

$$f'(x) \underset{0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)$$

$$\Longrightarrow f(x) \underset{0}{=} f(0) + \lambda_0 x + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + \lambda_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Démonstration. Puisque f' admet un $DL_n(0)$:

$$f'(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n + t^n \eta(t)$$

avec $\lim_{t \to 0} \eta(t) = 0$.
Puisque f' et la partie régulière du $DL_n(0)$ sont continue sur I, par combinaison linéaire $t^n \eta(t)$ est aussi continue sur I.

On intègre l'égalité entre 0 et x :

$$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x (\lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n)\, dt + \int_0^x t^n \eta(t) dt$$

$$\Longrightarrow\ f(x) - f(0) = \lambda_0 x + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + \lambda_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x t^n \eta(t) dt$$

Il suffit donc de montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \eta(t) dt = 0$. On se ramène à la définition : soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$:

$$|x| \leqslant \alpha \implies \left| \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \eta(t) dt \right| \leqslant \varepsilon$$

Puisque $\lim\limits_{t\to 0} \eta(t) = 0$, pour cet $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in I$:

$$|t| \leqslant \alpha \implies |\eta(t)| \leqslant \varepsilon$$

Alors soit $x \in I$ tel que $|x| \leqslant \alpha$:

$$\left| \int_0^x t^n \eta(t) dt \right| \leqslant |x| \times \max |t^n \eta(t)| \qquad \text{maximum dans } \begin{cases} [0,x] & \text{si } x > 0 \\ [x,0] & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\leqslant |x| \times |x|^n \times \varepsilon = \varepsilon \times |x|^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \eta(t) dt \right| \leqslant \varepsilon$$

■

Exemples.

• $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

qui est continue sur $]-1,1[$ (par exemple). Puisque $\ln(1-x)' = -\dfrac{1}{1-x}$:

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &\underset{0}{=} \ln(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \\ &\underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})\end{aligned}$$

En l'appliquant en $-x$:

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

- $DL_5(0)$ de arctan. On a $\arctan(x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$; de plus :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &\underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4) \\
\Longrightarrow \arctan(x) &\underset{0}{=} \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \\
&\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)
\end{aligned}$$

arctan étant impaire, la partie régulière est impaire.

Remarque. Il est par contre prohibé de dériver un DL : si f admet un $DL_n(0)$, on ne peut pas en général en conclure que f' admet un $DL_{n-1}(0)$.
Contre-exemple : $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$ est dérivable mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ (cf. Chapitre "Dérivabilité"). Ainsi d'après la propriété 5, f étant dérivable admet un $DL_1(0)$, mais f' n'étant pas continue en 0 n'admet aucun DL en 0.

Formulaire des DLs usuels

$\dfrac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$-x-\dfrac{x^2}{2}-\cdots-\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\times\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

Formulaire des DLs usuels (suite et fin)

$\exp(x)$	$1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin(x)$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$
$\cos(x)$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$

Application : calcul d'équivalent

Les développements limités facilitent le calcul d'équivalents de fonctions :

Propriété

Soit f une application admettant un $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{0}{=} \underbrace{\lambda_p x^p}_{1^{er}\ terme\ \neq 0} + \lambda_{p+1} x^{p+1} + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)$$

avec $\lambda_p \neq 0$ alors :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \lambda_p x^p.$$

Démonstration. Sous ces hypothèses :

$$f(x) \underset{0}{=} \lambda_p x^p + \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k x^k + o(x^n)$$

$$\underset{\lambda_p \neq 0}{\Longrightarrow} \frac{f(x)}{\lambda_p x^p} \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_p} \times \underbrace{x^{k-p}}_{\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{o(x^{n-p})}_{\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0} \quad \underset{0}{\longrightarrow} 1$$

$$\Longrightarrow f(x) \underset{0}{\sim} \lambda_p x^p$$

■

Remarques.

- Ainsi on retrouve à partir des *DL* usuels, tous les équivalents usuels en 0 :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x) \implies \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$
$$\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x^2) \implies \sin(x) \underset{0}{\sim} x$$
$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \implies \cos(x) \underset{0}{\sim} 1$$
$$\implies 1-\cos(x) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^3) \implies 1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$
$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x) \implies e^x \underset{0}{\sim} 1$$
$$\implies e^x - 1 \underset{0}{=} x + o(x) \implies e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$
$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x) \implies (1+x)^\alpha \underset{0}{\sim} 1$$
$$\implies (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{=} \alpha x + o(x) \implies (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$$

- La propriété reste vraie au voisinage d'un réel a :

Si f admet un $DL(a)$:

$$f(x) \underset{a}{=} \lambda_p (x-a)^p + o((x-a)^p) \qquad \text{avec } \lambda_p \neq 0$$

alors :

$$f(x) \underset{a}{\sim} \lambda_p (x-a)^p.$$

Exemple : équivalent de ln en 1 :

$$\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h + o(h) \implies \ln(x) \underset{1}{\sim} (x-1) + o(x-1) \implies \ln(x) \underset{1}{\sim} (x-1)$$

Exemples. Le gain pour le calcul d'équivalent est important : alors qu'on n'a le droit ni de composer ni d'ajouter des équivalents, on a le droit de composer ou d'ajouter des *DL*. Cela simplifie le calcul d'équivalents, notamment en présence de sommes :

- Équivalent en 0 de $e^x - \sqrt{1+x}$.

Il faut pousser le *DL* à l'ordre 1 pour obtenir le premier terme non nul :

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

$$\Longrightarrow e^x - \sqrt{1+x} \underset{0}{=} \frac{x}{2} + o(x) \qquad \Longrightarrow e^x - \sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$$

• Équivalent et limite en 0 de $\dfrac{\sin(x)-x}{\ln(1+x^3)}$.

Il faut pousser le $DL(0)$ de $\sin(x)$ à l'ordre 3 :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\Longrightarrow \sin(x) - x \underset{0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \Longrightarrow \sin(x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

$$\ln(1+x^3) \underset{0}{=} x^3 + o(x^3) \Longrightarrow \ln(1+x^3) \underset{0}{\sim} x^3$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin(x)-x}{\ln(1+x^3)} \underset{0}{\sim} \frac{-x^3}{6x^3} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}$$

Plan d'étude d'une fonction ; branches infinies

Le plan d'étude d'une fonction procède dans l'ordre :

– Domaine de définition.

– Réduction du domaine d'étude : périodicité, parité.

– Dérivabilité ; étude des variations.

– Limites aux bornes.

– Tableau de variation.

– **Branches infinies en $\pm\infty$, et position relative avec la courbe.**

Les branches infinies peuvent être, au voisinage de $\pm\infty$:

Une droite asymptôte :

– horizontale ; d'équation $y = \ell$ si : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

– oblique ; d'équation $y = ax + b$ si :

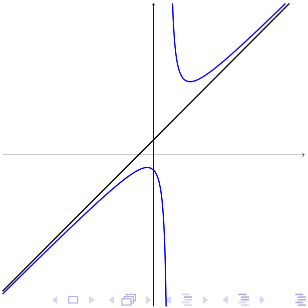
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad ; \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b$$

• La courbe représentative de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ admet pour asymptôte oblique aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$ la droite d'équation $y = x + 1$.

En effet :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+1}{x^2-x} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

$$f(x) - x = \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$



ou encore :

Une branche parabolique :

– dans la direction de l'axe (Oy) si :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

– dans la direction de l'axe (Ox) si :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

– dans la direction de l'axe $y = ax$ si :

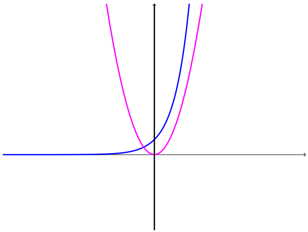
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$$

Dans les deux derniers cas, le signe de $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$ donne la position relative de la courbe et de l'axe au voisinage de $\pm\infty$.

Exemples.

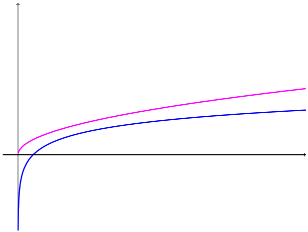
• Les courbes de $x \longmapsto x^2$ et exp admettent en $+\infty$ une branche parabolique dans la direction (Oy).

La courbe de exp admet en $-\infty$ la droite asymptôte horizontale $y = 0$.



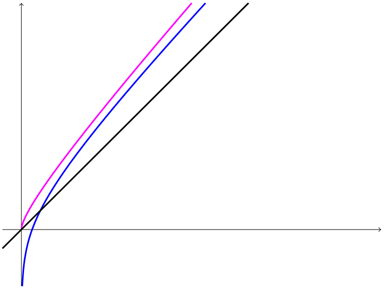
• Les courbes de $x \longmapsto \sqrt{x}$ et ln admettent en $+\infty$ une branche parabolique dans la direction (Ox).

La courbe de ln admet en 0^+ l'asymptôte verticale $x = 0$.



• Les courbes de $x \longmapsto x+\sqrt{x}$ et $x \longmapsto x+\ln x$ admettent en $+\infty$ une branche parabolique dans la direction $y = x$.

La courbe de $x \longmapsto x + \ln x$ admet en 0^+ l'asymptôte verticale $x = 0$.



Dans le cas d'une branche parabolique infinie dans la direction (Oy), parfois on peut avoir pour asymptôte la courbe d'une fonction polynomiale, lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$f(x) - Q(x) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Dans le cas d'une droite asymptôte, le polynôme Q est de degré au plus 1 ; il donne l'équation de la droite.

Développement limité généralisé en $\pm\infty$

Définition

Soit $f :]a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$; on dit que f admet un <u>développement limité d'ordre n en $+\infty$</u> (ou $DL_n(+\infty)$) si il existe deux polynômes $\mathbb{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$f(x) - Q(x) - P_n\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{+\infty}{=} Q(x) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \underbrace{a_p x^p + \cdots + a_1 x + a_0}_{\text{donne la courbe asymptôte en } +\infty} + \underbrace{\frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_n}{x^n}}_{\substack{\text{le premier terme } \neq 0 \text{ donne la position} \\ \text{relative de la courbe et de l'asymptôte}}} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \end{aligned}$$

La définition d'un <u>D.L. d'ordre n en $-\infty$</u> (ou $DL_n(-\infty)$) est analogue en $-\infty$.

Remarque. Méthode : dans la pratique un $DL_n(\pm\infty)$ de $f(x)$ s'obtient en posant $h = \frac{1}{x} \longrightarrow 0^{\pm}$ et en cherchant un $DL_n(0^{\pm})$ de $f\left(\frac{1}{h}\right)$; mais en plus de la partie régulière on conserve la partie polynomiale en $\frac{1}{h}$ qui donne la courbe asymptôte.

Exemples.

• À l'aide d'un $DL(+\infty)$ et un $DL(-\infty)$ à des ordres suffisants, déterminer les asymptôtes de :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

et leur position relative avec $\mathscr{C}_f$ aux voisinages de $\pm\infty$.

– $DL(+\infty)$; on pose $h = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$:

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{1}{h^2}+1}{\frac{1}{h^2}-1} = \frac{1+h^2}{1-h^2}$$

On applique le $DL_2(0)$ de $\dfrac{1}{1-h} \underset{0}{=} 1 + h + h^2 + o(h^2)$; par composition :

$$\frac{1}{1-h^2} \underset{0}{=} 1 + h^2 + o(h^2)$$

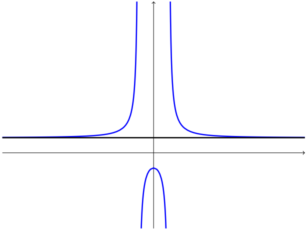
$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1+h^2}{1-h^2} \underset{0}{=} Tronc_2\left((1+h^2)^2\right) + o(h^2)$$
$$\underset{0}{=} 1 + 2h^2 + o(h^2)$$
$$\Longrightarrow f(x) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Ainsi $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptôte la droite horizontale $y = 1$ et reste au-dessus de son asymptôte au voisinage de $+\infty$.

– Le même argument donne le $DL_2(-\infty)$:

$$f(x) \underset{-\infty}{=} 1 + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptôte la droite horizontale $y = 1$ et reste au-dessus de son asymptôte au voisinage de $-\infty$.



• À l'aide d'un $DL(+\infty)$ et un $DL(-\infty)$ à des ordres suffisants, déterminer les asymptôtes de :

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

et leur position relative avec $\mathscr{C}_f$ aux voisinages de $\pm\infty$.

– $DL(+\infty)$; on pose $h = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$:

$$g\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{1}{h^2}+1}{\frac{1}{h}-1} = \frac{h}{h^2} \times \frac{1+h^2}{1-h} = \frac{1}{h} \times \frac{1+h^2}{1-h}$$

On applique le $DL_2(0)$ de $\dfrac{1}{1-h}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-h} &\underset{0}{=} 1 + h + h^2 + o(h^2) \\ \Longrightarrow \frac{1+h^2}{1-h} &\underset{0}{=} Tronc_2\left((1+h^2) \times (1+h+h^2)\right) + o(h^2) \\ &\underset{0}{=} 1 + h + 2h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

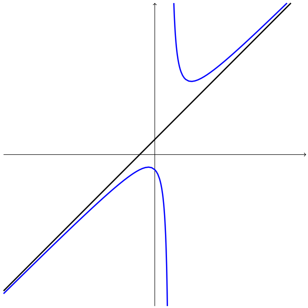
$$\Longrightarrow \frac{1}{h} \times \frac{1+h^2}{1-h} \underset{0}{=} \frac{1}{h} + 1 + 2h + o(h)$$
$$\Longrightarrow g(x) \underset{+\infty}{=} x + 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi $\mathscr{C}_g$ admet pour asymptôte la droite oblique $y = x + 1$ et reste au-dessus de son asymptôte au voisinage de $+\infty$.

– Le même argument donne le $DL_1(-\infty)$:

$$g(x) \underset{-\infty}{=} x + 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et $\mathscr{C}_g$ admet pour asymptôte la droite oblique $y = x + 1$ et reste au-dessous de son asymptôte au voisinage de $-\infty$.



Remarque. Un $DL(\pm\infty)$ de $f(x)$ permet souvent l'obtention d'un équivalent au voisinage de $\pm\infty$:

Si $f(x) \underset{\pm\infty}{=} \underbrace{a_p x^p}_{\neq 0} + \cdots + a_1 x + a_0 + \dfrac{b_1}{x} + \cdots + \dfrac{b_n}{x^n} + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ avec $a_p \neq 0$ alors :

$$f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_p x^p.$$

Si $f(x) \underset{\pm\infty}{=} \underbrace{\dfrac{b_q}{x^q}}_{\neq 0} + \cdots + \dfrac{b_n}{x^n} + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ avec $b_q \neq 0$ alors :

$$f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{b_q}{x^q}.$$