# Équations différentielles linéaires
# Partie A. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

## Équations différentielles du 1er ordre



## Équations différentielles linéaires du second ordre

# Équations différentielles du 1er ordre

## Définition

*on appelle* *équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants* *une équation de la forme :*

$$y' + ay = b \qquad (E)$$

*où $a$ et $b$ sont des constantes réelles et $y$ est l'inconnue.*

*Résoudre $(E)$ revient à déterminer toutes les fonctions $y$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; y'(x) + a \times y(x) = b$$

**Exemple.** La fonction $f : x \longmapsto \exp(x) - 1$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y' - y = 1$$

En effet, $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = \exp(x)$, et donc pour tout réel $x$ :

$$f'(x) - f(x) = \exp(x) - (\exp(x) - 1) = 1$$

# Équation homogène associée

## Définition

*L'équation différentielle :*

$$y' + ay = 0 \qquad (H)$$

*est appelée l'équation homogène associée à $(E)$.*

**Exemple.** L'équation $y' - y = 0$ est l'équation homogène associée à $y' - y = 1$. La fonction exp en est une solution.

## Propriété

*Soit l'équation différentielle :*

$$y' + ay = b \qquad (E)$$

*et son équation homogène associée :*

$$y' + ay = 0 \qquad (H)$$

*Notons $y_p$ une solution de l'équation $(E)$ . Alors $y$ est solution de $E$ si et seulement si $(y - y_p)$ est solution de l'équation homogène associée $(H)$.*

**Démonstration.** Soit $y_p$ une solution de l'équation $(E)$. Alors $y_p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$y_p'(x) + ay_p(x) = b \qquad (1)$$

Soit $y$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} & y'(x) + ay(x) = b \\ \underset{-(1)}{\iff} & y'(x) + ay(x) - y_p'(x) - ay_p(x) = b - b \\ \iff & (y - y_p)'(x) + a(y - y_p)(x) = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire si et seulement si $(y - y_p)$ est solution de $(H)$. ■

## Théorème

*On considère l'équation homogène :*

$$y' + ay = 0 \qquad (H)$$

*Les solutions de* $(H)$ *sont toutes les fonctions de la forme :*

$$y(x) = ke^{-ax}$$

*avec* $k \in \mathbb{R}$ *une constante quelconque.*

**Démonstration.**

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que $y(x) = ke^{-ax}$ est une solution de $(H)$ ; elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$y'(x) = -ake^{-ax}$$

et donc :

$$y'(x) + ay(x) = -ake^{-ax} + ake^{-ax} = 0$$

Donc $y$ est solution de $H$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Montrons que toute solution de $(H)$ est de la forme $ke^{-ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Soit $y$ une solution, considérons $f(x) = y(x)e^{ax}$. Alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et :

$$f'(x) = y'(x)e^{ax} + y(x) \times ae^{ax} = -ay(x)e^{ax} + ay(x)e^{ax} = 0$$

Donc $f$ est constante sur $\mathbb{R}$ : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = y(x)e^{ax} = k \implies \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{k}{e^{ax}} = ke^{-ax}$$

Ainsi tout solution de $(H)$ est de la forme $y(x) = ke^{-ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$. ■

**Exercice 1.** Résoudre les équations homogènes suivantes :

$$y' = y \qquad ; \qquad y' - 2y = 0$$

- $y' - y = 0$ : $y$ est solution $\iff \exists k \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{x}$.
- $y' - 2y = 0$ : $y$ est solution $\iff \exists k \in \mathbb{R},\ y(x) = ke^{2x}$.

**Exemple.** En cinétique chimique, notons $[A]$ la concentration d'un réactif $A$ en fonction du temps ; la vitesse de la réaction est définie :

$$v = -\frac{d[A]}{dt}.$$

On dit que la réaction est d'ordre 1 si la vitesse est proportionnelle à la concentration, autrement dit :

$$\exists a \in \mathbb{R},\ v = a \times [A]$$

c'est-à-dire si :

$$\frac{d[A]}{dt} + a[A] = 0$$
$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ [A] = \alpha e^{-at}$$

Connaissant la concentration initiale $[A]_0$ au temps $t = 0$ :

$$\alpha e^{-a\times 0} = [A]_0 \implies \alpha = [A]_0$$

ce qui donne l'évolution de la concentration en réactif $A$ au cours du temps :

$$[A] = [A]_0 \times e^{-at}$$

# Résolution de l'équation complète

## Théorème

*Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et l'équation différentielle à résoudre :*

$$y' + ay = b \qquad (E)$$

*On considère l'équation homogène associée :*

$$y' + ay = 0 \qquad (H)$$

*Les solutions de $(H)$ sont toutes les fonctions de la forme :*

$$x \longmapsto ke^{-ax} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

*Soit $y_p$ une solution quelconque de $E$, que l'on appelle solution particulière de $(E)$.*

*Toutes les solutions de $(E)$ sont somme de la solution particulière $y_p$ et d'une solution générale de l'équation homogène associée. Autrement dit, l'ensemble des solutions de $E$ est :*

$$\mathscr{S}_E = \left\{ x \longmapsto y_p(x) + ke^{-ax} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

**Démonstration.** Soit $y_p$ une solution particulière de l'équation $(E)$. Alors d'après la propriété 4, $y$ est solution de $E$ si et seulement si $y - y_p$ est solution de l'équation homogène associée $(H)$, donc d'après le théorème 2 si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (y - y_p)(x) = ke^{-ax}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = y_p(x) + ke^{-ax}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de $(E)$ est :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto y_p(x) + ke^{-ax} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

autrement dit toute solution de $(E)$ est somme de la fonction particulière et d'une solution générale (c'est à dire quelconque) de l'équation homogène associée. ∎

**Méthode.** Pour résoudre l'équation différentielle :

$$y' + ay = b \qquad (E)$$

On détermine toutes les solutions de l'équation homogène associée :

$$y' + ay = 0 \qquad (H)$$

Ce sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto ke^{-ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Puis on détermine une solution particulière de l'équation $(E)$ :

- Si $a \neq 0$ : $y_p(x) = \dfrac{b}{a}$ convient. En effet :

$$y_p'(x) + ay_p(x) = 0 + a \times \frac{b}{a} = b$$

- Si $a = 0$ : $y_p(x) = bx$ convient. En effet :

$$y_p'(x) + ay_p(x) = b + 0 \times bx = b$$

**Exemple.** Résolution de : $y' - y = 2$.

L'équation homogène associée $y' - y = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions $x \longmapsto ke^x$ avec $k \in \mathbb{R}$.

L'équation $y' - y = 2$ admet pour solution particulière la fonction constante égale à 2 : $x \longmapsto 2$. Ainsi l'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S}_E = \left\{ x \longmapsto 2 + ke^x \mid k \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Exercice 2.** Résoudre :

$$(E_1) : \qquad y' - 3y = 1 \qquad ; \qquad (E_2) : \qquad 3y' = 2$$

- Pour $(E_1)$ :

$$\mathscr{S}_{E_1} = \left\{ x \longmapsto -\frac{1}{3} + ke^{3x} \mid k \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Pour $(E_2)$ :

$$\mathscr{S}_{E_2} = \left\{ x \longmapsto \frac{2}{3}x + k \mid k \in \mathbb{R} \right\}.$$

# Équations différentielles linéaires du second ordre

## Définition

*On appelle <u>équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants</u>, toute équation de la forme :*

$$y'' + ay' + by = c \qquad (E)$$

*où $(a, b, c)$ sont des constantes réelles et $y$ est l'inconnue.*

*Résoudre $(E)$ revient à déterminer toutes les fonctions $y$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = c$$

# Équation homogène associée

Comme pour le premier ordre, on associe à une équation différentielle linéaire du second ordre une équation homogène :

**Définition**

*L'équation différentielle :*

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

*est appelée l'équation homogène associée à* $(E)$.

De même que pour le premier ordre, les solutions de l'équation de $(E)$ se décomposent en la somme d'une solution particulière de $(E)$ et d'une solution générale de $(H)$ :

## Propriété

*Soit l'équation différentielle :*

$$y'' + ay' + by = c \qquad (E)$$

*et son équation homogène associée :*

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

*Notons $y_p$ une solution de l'équation $(E)$. Alors $y$ est solution de $E$ si et seulement si $(y - y_p)$ est solution de l'équation homogène associée $(H)$.*

*En particulier toutes les solutions de $(E)$ s'obtiennent comme somme d'une solution particulière $y_p$ de $(E)$ et d'une solution générale de $(H)$.*

**Démonstration.** Soit $y_p$ une solution de l'équation $(E)$. Alors $y_p$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x) = c \qquad (1)$$

Soit $y$ une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} & y''(x) + ay'(x) + by(x) = c \\ \underset{-(1)}{\iff} & y''(x) + ay'(x) + by(x) - y_p''(x) - ay_p'(x) - by_p(x) = c - c \\ \iff & (y - y_p)''(x) + a(y - y_p)'(x) + b(y - y_p)(x) = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire si et seulement si $(y - y_p)$ est solution de $(H)$. ■

Encore une fois pour résoudre $(E)$ il suffit de savoir déterminer une seule solution (particulière) de l'équation $(E)$ et toutes les solutions (générales) de l'équation homogène associée.

**Méthode.** Pour déterminer une solution particulière de :

$$y'' + ay' + by = c \tag{E}$$

- Si $b \neq 0$, $y_p(x) = \dfrac{c}{b}$ convient.

En effet : $y_p' = y_p'' = 0 \Longrightarrow y_p'' + ay_p' + by_p = b \times \dfrac{c}{b} = c$.

- Si $b = 0$ et $a \neq 0$, $y_p(x) = \dfrac{c}{a}x$ convient.

En effet : $y_p' = \dfrac{c}{a}$, $y_p'' = 0 \Longrightarrow y_p'' + ay_p' + by_p = 0 + a \times \dfrac{c}{a} + 0 = c$.

- Si $a = b = 0$, $y_p(x) = \dfrac{c}{2}x^2$ convient.

En effet : $y_p'' = c \Longrightarrow y_p'' + ay_p' + by_p = c + 0 + 0 = c$.

# Résolution de l'équation homogène

Soit l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

On commence par chercher les solutions de $(H)$ sous la forme $f : x \longmapsto e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{R}$. Alors $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = re^{rx} \qquad ; \qquad f''(x) = r^2 e^{rx}$$

Ainsi $f$ est solution de $(H)$ si et seulement si :

$$r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$$

$$\underset{e^{rx} \neq 0}{\Longleftrightarrow} r^2 + ar + b = 0$$

On appelle équation caractéristique l'équation :

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (EC)$$

d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. C'est une équation du second degré dont le discriminant est : $\Delta = a^2 - 4b$.

La fonction $f$ est solution de $(H)$ si et seulement si $r$ est solution de $(EC)$.

On considère 3 cas selon que $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$.

- Si $\Delta > 0$. L'équation $(EC)$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2} \qquad ; \qquad r_2 = \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$$

et la fonction $x \longmapsto e^{r_1 x}$ est une solution de $(H)$. Cherchons les autres solutions de $(H)$ sous la forme : $y(x) = e^{r_1 x} \times z(x)$ avec $z$ deux fois dérivable (il suffit de prendre $z(x) = y(x)e^{-r_1 x}$). Ainsi, puisque :

$$\begin{aligned}
(e^{r_1 x} \times z(x))' &= r_1 e^{r_1 x} \times z(x) + e^{r_1 x} \times z'(x) \\
(e^{r_1 x} \times z(x))'' &= r_1^2 e^{r_1 x} \times z(x) + 2r_1 e^{r_1 x} \times z'(x) + e^{r_1 x} \times z''(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y(x) = e^{r_1 x} \times z(x) \text{ est solution de } (H) \\
\iff & r_1^2 e^{r_1 x} \times z(x) + 2r_1 e^{r_1 x} \times z'(x) + e^{r_1 x} \times z''(x) + a\left(r_1 e^{r_1 x} \times z(x) + e^{r_1 x} \times z'(x)\right) \\
& \qquad + be^{r_1 x} \times z(x) = 0 \\
\underset{e^{r_1 x} \neq 0}{\iff} & r_1^2 \times z(x) + 2r_1 \times z'(x) + z''(x) + a\left(r_1 \times z(x) + z'(x)\right) + b \times z(x) = 0 \\
\iff & z''(x) + (2r_1 + a) \times z'(x) + \underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}_{=0} \times z(x) = 0
\end{aligned}$$

$$\iff z''(x) + (2r_1 + a) \times z'(x) = 0 \qquad z' \text{ est solution d'une E.D. du 1er ordre}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R},\ z'(x) = ke^{-(2r_1+a)x}$$

$$\iff \exists (k, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2,\ z(x) = \frac{k}{-(2r_1 + a)} \times e^{-(2r_1+a)x} + \lambda_1$$

$$\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ z(x) = \lambda_2 \times e^{-(2r_1+a)x} + \lambda_1 \qquad \text{en posant } \lambda_2 = \frac{k}{-(2r_1 + a)}$$

$$\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{(-2r_1-a+r_1)x} \qquad \text{car } y(x) = z(x)e^{r_1 x}$$

$$\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{(-r_1-a)x}$$

$$\text{or : } -r_1 - a = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2} - a = \frac{a + \sqrt{\Delta} - 2a}{2} = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} = r_2$$

$$\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

Ainsi les solutions de $(H)$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

avec $r_1, r_2$ les deux racines réelles de l'équation caractéristique $(EC)$, et $\lambda_1, \lambda_2$ deux constantes réelles quelconques.

• Si $\Delta = 0$.

L'équation caractéristique $(EC)$ admet une solution réelle :

$$r_0 = -\frac{a}{2}$$

et la fonction $x \longmapsto e^{r_0 x}$ est une solution de $(H)$. Cherchons les autres solutions de $(H)$ sous la forme : $y(x) = e^{r_0 x} \times z(x)$ avec $z$ deux fois dérivable.

Le même calcul que dans le cas $\Delta > 0$ montre que $y$ est solution de $(H)$ si et seulement si :

$$\underbrace{(r_0^2 + ar_0 + b)}_{=0} e^{r_0 x} \times z(x) + \underbrace{(2r_0 + a)}_{=0} e^{r_0 x} \times z'(x) + e^{r_0 x} \times z''(x) = 0$$

$$\iff e^{r_0 x} \times z''(x) = 0 \underset{e^{r_0 x} \neq 0}{\iff} z''(x) = 0 \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ z(x) = \lambda x + \mu$$

$$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ y(x) = (\lambda x + \mu) \times e^{r_0 x}$$

• Si $\Delta < 0$.

Dans ce cas l'équation caractéristique $(EC)$ admet deux solutions complexes conjugués :

$$r_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\beta \qquad ; \qquad r_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$$

Le même calcul que précédemment montre que les solutions de $(H)$ sont les fonctions à valeurs réelles pouvant s'écrire sous la forme :

$$y : x \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

**Dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.**

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une fonction de la forme :

$$f : x \longmapsto f_R(x) + \mathrm{i} \cdot f_I(x) \quad \text{avec } f_R \text{ et } f_I \text{ deux fonctions à valeurs réelles}$$

Elle est dite <u>dérivable</u> sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ si ses partie réelle $f_R$ et partie imaginaire $f_I$ sont des fonctions dérivables sur $I$, et dans ce cas sa fonction dérivée est :

$$f' : x \longmapsto f_R'(x) + \mathrm{i}\, f_I'(x)$$

C'est une fonction réelle à valeur dans $\mathbb{C}$, définie sur $I$.
Il est facile de vérifier que les propriétés algébriques de la dérivée restent vraies pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, notamment :

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (f \times g)' = f'g + fg' \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ (\lambda f)' = \lambda f'$$

et pour la composition, si $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Exemples :

– La fonction :

$$f : x \longmapsto e^{\mathrm{i}\,x} = \cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est :

$$f' : x \longmapsto -\sin(x) + \mathrm{i}\,\cos(x)$$

Or :

$$-\sin(x) + \mathrm{i}\,\cos(x) = \cos(x + \pi/2) + \mathrm{i}\,\sin(x + \pi/2) = e^{\mathrm{i}\,(x+\frac{\pi}{2})} = e^{\mathrm{i}\,x} \times e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,x}$$

Ainsi :

$$\boxed{\left(e^{\mathrm{i}\,x}\right)' = \mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,x}}$$

– Soit $r = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe :

$$f : x \longmapsto e^{rx} = e^{(a+\mathrm{i}\,b)x} = e^{ax} \times e^{\mathrm{i}\,bx}$$

est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$, et sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = ae^{ax} \times e^{\mathrm{i}\,bx} + e^{ax} \times \mathrm{i}\,be^{\mathrm{i}\,bx} = (a + \mathrm{i}\,b)e^{ax} \times e^{\mathrm{i}\,bx} = (a + \mathrm{i}\,b) \times e^{(a+\mathrm{i}\,b)x}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{C},\ (e^{rx})' = re^{rx}}.$$

Revenons à la démonstration, donc soit $y$ une solution de $(H)$ :

$$y : x \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

Mais $y$ étant à valeurs réelles :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \overline{y(x)}\\
&\Longleftrightarrow \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} = \overline{\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}\\
&\Longleftrightarrow \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} = \overline{\lambda_1}\,\overline{e^{r_1 x}} + \overline{\lambda_2}\,\overline{e^{r_2 x}}
\end{aligned}$$

Or : $\left\{\begin{array}{l} \overline{e^{r_1 x}} = \overline{e^{\alpha x}} \times \overline{e^{\mathrm{i}\,\beta x}} = e^{\alpha x} \times e^{-\mathrm{i}\,\beta x} = e^{(\alpha - \mathrm{i}\,\beta)x} = e^{r_2 x} \\ \overline{e^{r_2 x}} = \overline{e^{\alpha x}} \times \overline{e^{-\mathrm{i}\,\beta x}} = e^{\alpha x} \times e^{\mathrm{i}\,\beta x} = e^{(\alpha + \mathrm{i}\,\beta)x} = e^{r_1 x} \end{array}\right.$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} = \overline{\lambda_1} e^{r_2 x} + \overline{\lambda_2} e^{r_1 x}\\
&\Longleftrightarrow e^{r_1 x}\left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) = e^{r_2 x}\left(\overline{\lambda_1} - \lambda_2\right)\\
&\Longleftrightarrow \underbrace{e^{(r_1 - r_2)x}}_{\text{non constant}} \times \left(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}\right) = \underbrace{\left(\overline{\lambda_1} - \lambda_2\right)}_{\text{constant}}
\end{aligned}$$

Or le membre de droite étant constant, il en est de même du membre de gauche. Mais puisque $r_1 - r_2 \neq 0$, $e^{(r_1 - r_2)x}$ n'est pas constant ; la seule possibilité est alors :

$$\lambda_1 - \overline{\lambda_2} = \overline{\lambda_1} - \lambda_2 = 0 \Longrightarrow \overline{\lambda_1} = \lambda_2$$

Posons alors deux réels $A, B$ tels que :

$$\lambda_1 = A + \mathrm{i}\,B \qquad ; \qquad \lambda_2 = A - \mathrm{i}\,B$$

Alors :

$$\begin{aligned} y(x) &= (A+\mathrm{i}\,B)e^{(\alpha+\mathrm{i}\,\beta)x} + (A-\mathrm{i}\,B)e^{(\alpha-\mathrm{i}\,\beta)x} \\ &= e^{\alpha x} \times \left(A\left(e^{\mathrm{i}\,\beta x} + e^{-\mathrm{i}\,\beta x}\right) + \mathrm{i}\,B\left(e^{\mathrm{i}\,\beta x} - e^{-\mathrm{i}\,\beta x}\right)\right) \\ &= e^{\alpha x} \times (2A\cos(\beta x) - 2B\sin(\beta x)) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\lambda = 2A$ et $\mu = -2B$, les solutions de $(H)$ sont toutes les fonctions de la forme :

$$y : x \longmapsto e^{\alpha x} \times (\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x))$$

avec $\alpha + \mathrm{i}\,\beta$ une solution de $(EC)$ et $\lambda, \mu$ deux réels quelconques.

Finalement on vient de prouver :

**Théorème**

*Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène :*

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

*avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On lui associe l'équation caractéristique :*

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (EC)$$

*ayant pour discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.*

*Alors les solutions de $(H)$ sont toutes les fonctions $x \longmapsto y(x)$ de la forme :*

- *Si* $\Delta > 0$ *: $(EC)$ admet deux solutions réelles distinctes* $r_1$ *et* $r_2$ *et*

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \textit{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- *Si* $\Delta = 0$ *: $(EC)$ admet une solution réelle* $r_0$ *et*

$$y(x) = (\lambda + \mu x) e^{r_0 x} \quad \textit{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- *Si* $\Delta < 0$ *: $(EC)$ admet deux solutions complexes conjuguées et*

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right) \quad \textit{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

*où* $\alpha + i\beta$ *est une solution quelconque de* $(EC)$.

**Exemples.**

- L'équation de l'oscillateur harmonique.

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et l'équation :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Cette équation différentielle est très utilisée en physique (mécanique, électricité,...) pour décrire certaines évolutions périodiques au voisinage d'un point d'équilibre et en l'absence de frottement, par exemple le mouvement d'un système masse-ressort, ou les oscillations libres d'un circuit LC.

Soit $(EC)$ l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

Alors $\Delta = -4\omega^2 = (2i\omega)^2$ et les solutions sont les complexes conjugués $r_1, r_2 = \pm i\omega$. Ainsi les solutions sont toutes les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} y(t) &= e^0 \times (\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t) \\ &= \lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t \\ &= \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \times \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

c'est une sinusoide d'amplitude $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, de pulsation $\omega$ et de déphasage $\phi$ dépendant de $\lambda$ et $\mu$ ($\lambda$ et $\mu$ sont déterminés à l'aide des conditions initiales du système).

• Résolution de l'équation :

$$y'' - 6y' + 13y = 5 \qquad (E)$$

L'équation homogène $(H)$ : $y'' - 6y' + 13y = 0$ a pour équation caractéristique :

$$r^2 - 6r + 13 = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 36 - 52 = -16 = (4\mathrm{i})^2$ et les solutions : $r_1, r_2 = 3 \pm 2\mathrm{i}$. Les solutions de $(H)$ sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$y_H : x \longmapsto e^{3x} \times (\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)) \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

D'autre part la fonction $y_p : x \longmapsto \dfrac{5}{13}$ est une solution particulière de l'équation $(E)$. Ainsi toutes les solutions de $(E)$ sont :

$$\mathscr{S}_E = \left\{ x \longmapsto \frac{5}{13} + e^{3x} \times (\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)) \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

**Exercice 3.** Résoudre les équations différentielles :

$$y'' - 3y' + 2y = 1 \quad (E_1) \qquad y'' - 4y' + 4y = 8 \quad (E_2) \qquad y'' - 2y' + 2y = 2 \quad (E_3)$$

• Pour $(E_1)$ : L'équation homogène associée $(H_1)$ : $y'' - 3y' + 2y = 0$ a pour équation caractéristique : $(EC_1)$ : $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 > 0$ et les solutions sont $r_1 = 1, r_2 = 2$.

Ainsi les solutions de $(H_1)$ sont : $\mathscr{S}_{H_1} = \left\{x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Puisqu'une solution particulière de $(E_1)$ est donnée par : $y_p(x) = \frac{1}{2}$, les solutions de $(E_1)$ sont :

$$\mathscr{S}_{E_1} = \left\{x \longmapsto \frac{1}{2} + \lambda e^x + \mu e^{2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

• Pour $(E_2)$ : L'équation homogène associée $(H_2)$ : $y'' - 4y' + 4y = 0$ a pour équation caractéristique : $(EC_2)$ : $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont le discriminant est nul et la solution est $r_0 = 2$.

Ainsi les solutions de $(H_2)$ sont : $\mathscr{S}_{H_2} = \left\{x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Puisqu'une solution particulière de $(E_2)$ est donnée par : $y_p(x) = 2$, les solutions de $(E_2)$ sont :

$$\mathscr{S}_{E_2} = \left\{x \longmapsto 2 + (\lambda x + \mu)e^{2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

• Pour $(E_3)$ : L'équation homogène associée $(H_3)$ : $y'' - 2y' + 2y = 0$ a pour équation caractéristique : $(EC_2)$ : $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4$ et les solutions : $r_1, r_2 = 1 \pm \mathrm{i}$. Une solution particulière de $(E_3)$ étant $y_p(x) = 1$, les solutions de $(E_3)$ sont :

$$\mathscr{S}_{E_3} = \left\{x \longmapsto 1 + e^{x}\left(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)\right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$