Équations différentielles linéaires
Partie B. Équations différentielles linéaires

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Équations différentielles linéaires du 1er ordre

Dans tout le chapitre I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

Définition

Soient I un intervalle et $x \longmapsto a(x)$, $x \longmapsto b(x)$ deux fonctions continues sur I. L'équation :

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

est appelé équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre ; ses solutions sont toutes les fonctions $x \longmapsto y(x)$ dérivables sur I et vérifiant :

$$\forall x \in I, \ y'(x) + a(x) \times y(x) = b(x)$$

Exemple. La fonction $y : x \longmapsto e^{x^2} - \frac{1}{2}$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' - 2xy = x$$

En effet : y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y'(x) = 2xe^{x^2}$, ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2xy(x) = 2xe^{x^2} - 2x\left(e^{x^2} - \frac{1}{2}\right) = -2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) = x$$

Remarque. Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants est une cas particulier où les fonctions $x \longmapsto a(x)$ et $x \longmapsto b(x)$ sont constantes.

Définition

L'équation homogène associée à l'équation (E) est l'équation homogène :

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (H)$$

Le résultats établis lorsque les coefficients sont constants, se généralisent ici.

Propriété

Sous les mêmes hypothèses, en notant y_p une solution particulière de (E), toutes les solutions de (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution particulière y_p est des solutions générales de l'équation homogène associée (H).

$$\mathscr{S} = \left\{ y = y_p + y_H \mid y_H \text{ est une solution de } (H) \right\}$$

Démonstration. Elle est quasiment identique à celle effectuée dans le cas de coefficients constants : soit y_p une solution particulière de (E) :

$$y_p' + a(x)y_p = b(x) \tag{1}$$

alors y est solution de (E) si et seulement si :

$$y' + a(x)y = b(x) \underset{-(1)}{\iff} y' - y_p' + a(x)(y - y_p) = 0 \iff (y - y_p) \text{ est solution de } (H)$$

■

Il s'agit donc pour résoudre l'équation de déterminer toutes les solutions de l'équation homogène associée (H) et une solution particulière de l'équation (E).

Solution de l'équation homogène

Théorème

Les solutions de l'équation (H) :

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (H)$$

sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = k\,e^{-A(x)}$$

où k est une constante réelle et $x \longmapsto A(x)$ est une primitive (quelconque) de $x \longmapsto a(x)$

Remarque. On peut écrire :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto k\,e^{-\int a(x)dx} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

Démonstration. Puisque $x \longmapsto a(x)$ est continue sur I, elle admet des primitives sur I. Soit $A(x)$ une primitive de $a(x)$; cherchons les solutions de (H) sous la forme $y(x) = f(x)e^{-A(x)}$ avec $x \longmapsto f(x)$ une fonction dérivable sur I ; c'est toujours possible en posant $f(x) = y(x) \times e^{A(x)}$.

Alors :

$$
\begin{aligned}
& y'(x) = f'(x)e^{-A(x)} - a(x)f(x)e^{-A(x)} \\
\Longrightarrow\ & y \text{ est solution de } (H) \text{ si et seulement si :} \\
& y'(x) + a(x)y(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \underbrace{f'(x)e^{-A(x)} - a(x)f(x)e^{-A(x)}}_{=y'(x)} + \underbrace{a(x)f(x)e^{-A(x)}}_{=a(x)y(x)} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & f'(x)e^{-A(x)} = 0 \\
\underset{\times e^{A(x)}}{\Longleftrightarrow}\ & f'(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = k
\end{aligned}
$$

Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto ke^{-A(x)}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \qquad (H)$$

La fonction définie par $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet pour primitive $A(x) = -\ln(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi les solutions de (H) sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \longmapsto ke^{-(-\ln(x))} = kx$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière

• **Méthode de variation de la constante**

On cherche une solution particulière de l'équation :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad (E)$$

sous la forme :

$$y(x) = k(x)e^{-A(x)}$$

avec $x \longmapsto A(x)$ une primitive de $x \longmapsto a(x)$ sur I et $x \longmapsto k(x)$ une fonction dérivable sur I.

Remarque. C'est à dire de la forme d'une solution de (H) où on aurait remplacé la constante par une fonction dérivable sur I ; d'où le nom de méthode de variation de la constante.

Alors :

$$y'(x) = k'(x)e^{-A(x)} - a(x)k(x)e^{-A(x)}$$

Ainsi y est solution de E sur I si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\overbrace{k'(x)e^{-A(x)} - a(x)k(x)e^{-A(x)}}^{=y'(x)} + \overbrace{a(x)k(x)e^{-A(x)}}^{=a(x)y(x)} = b(x) \\
\iff\ & k'(x)e^{-A(x)} = b(x) \\
\underset{\times e^{A(x)}}{\iff}\ & k'(x) = b(x)e^{A(x)} \\
\iff\ & k(x) \text{ est une primitive de } b(x)e^{A(x)}
\end{aligned}$$

Or $x \longmapsto b(x)e^{A(x)}$ est continue sur I, comme produit de composées de fonctions continues sur I, et donc elle admet bien une primitive sur I.

Ainsi :

Méthode de variation de la constante.

l'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (E)$$

admet pour solution particulière toute fonction de la forme :

$$y_p : x \longmapsto k(x)e^{-A(x)} \quad \text{avec} \quad k(x) = \int b(x)e^{+A(x)}dx.$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

La recherche d'une solution particulière se ramène alors à un calcul de primitive, ce qui est deja plus simple.

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$y' + xy = x$$

L'équation homogène associée (H) : $y' + xy = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto k \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière de (E), par la méthode de variation de la constante. Soit : $y_p(x) = k(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ avec :

$$k(x) = \int x \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Ainsi :

$$y_p(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1$$

Les solutions de (E) sont donc toutes les fonctions dans l'ensemble :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto 1 + ke^{-\frac{x^2}{2}} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

• **Principe de superposition des solutions**

Lorsque le second membre de l'équation se décompose en somme, la recherche d'une solution particulière peut se faire en sommant (superposant) les solutions particulières d'équations plus simples :

Propriété

Si (E) est de la forme :

$$y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_n(x) \qquad (E)$$

avec a, b_1, b_2, $\ldots b_n$ des fonctions continues sur I, alors en notant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$y' + a(x)y = b_i(x) \qquad (E_i)$$

et f_i une solution particulière de (E_i), la fonction :

$$y_p = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

est une solution particulière de (E).

Démonstration. Elle découle de la linéarité de la dérivation :

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$$

et de la linéarité de l'équation :

$$\left.\begin{array}{c} f_1'(x) + a(x)f_1(x) = b_1(x) \\ f_2'(x) + a(x)f_2(x) = b_2(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) + a(x)f_n(x) = b_n(x) \end{array}\right\} \underset{\Sigma}{\Longrightarrow} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)'(x) + a(x)\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)$$

$$\Longrightarrow y_p'(x) + a(x)y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)$$

ainsi y_p est solution particulière de (E). ■

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$y' - y = x + \cos(x) \qquad (E)$$

L'équation homogène associée (H) : $y' - y = 0$ a pour solutions toutes les fonctions $x \longmapsto ke^x$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière en appliquant le principe de superposition des solutions :

– L'équation (E_1) : $y' - y = x$ a pour solution particulière :

$$y_1 = k(x)e^x \quad \text{avec} \quad k(x) = \int xe^{-x}dx$$

Par une intégration par partie :

$$k(x) = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} \qquad \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{array} \right.$$

donc $y_1(x) = (-x-1) \times e^{-x} \times e^x = -x - 1$.

– L'équation (E_2) : $y' - y = \cos(x)$ a pour solution particulière :

$$y_2 = k(x)e^x \quad \text{avec} \quad k(x) = \int \cos(x)e^{-x}dx$$

Par intégration par partie :

$$k(x) = -\cos(x)e^{-x} - \int \sin(x)e^{-x}dx \qquad \left| \begin{array}{ll} u = \cos(x) & u' = -\sin(x) \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{array} \right.$$

$$= -\cos(x)e^{-x} - \left(-\sin(x)e^{-x} - \int -\cos(x)e^{-x}dx\right) \quad \left| \begin{array}{ll} u = \sin(x) & u' = \cos(x) \\ v = -e^{-x} & v' = e^{-x} \end{array} \right.$$

$$= (\sin(x) - \cos(x))e^{-x} - k(x)$$

$$\Longrightarrow 2k(x) = (\sin(x) - \cos(x))e^{-x}$$

$$\Longrightarrow k(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))e^{-x}$$

donc

$y_2(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) \times e^{-x} \times e^{x} = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Ainsi (E) a pour solution particulière :

$$y_p(x) = -1 - x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

et l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto -1 - x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + ke^{x} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice Résoudre :

$$y' - 3x^2 y = x^5 e^{x^3} \qquad (E)$$

$$y' + \tan(x) \times y = \sin(2x) \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad (E')$$

$$y' + \tan(x) \times y = \sin(2x) + \cos(x) \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad (E'')$$

• (E) a pour équation homogène associée (H) : $y' - 3x^2 y = 0$ qui admet pour solutions :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto ke^{x^3} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

Cherchons une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante :

$$y_p(x) = k(x)e^{x^3} \quad \text{avec} \quad k(x) = \int x^5 e^{x^3} e^{-x^3} dx = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto \left(\frac{x^6}{6} + k\right) \times e^{x^3} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

• (E') a pour équation homogène associée (H) : $y' + \tan(x) \times x = 0$ qui admet pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto k\exp(-(-\ln|\cos(x)|)) = k\exp\circ\ln|\cos(x)| = k|\cos(x)| = k\cos(x)$$

puisque sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$. Ainsi :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto k\cos(x) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

Cherchons une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante :

$$y_p(x) = k(x)\cos(x) \quad \text{avec} \quad k(x) = \int \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}dx$$

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}dx = \int 2\sin(x)dx = -2\cos(x)$$

$$\Longrightarrow y_p(x) = -2\cos^2(x)$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E') est :

$$\mathscr{S}_{E'} = \left\{x \longmapsto -2\cos^2(x) + k\cos(x) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

• (E") : après la résolution de (E') il suffit de trouver une solution particulière de $y' + \tan(x) \times y = \cos(x)$ et d'appliquer le principe de superposition des solutions. Par la méthode de variation de la constante on a la solution particulière :

$$y_p(x) = k(x)\cos(x) \quad \text{avec} \quad k(x) = \int \frac{\cos(x)}{\cos(x)} dx = x \implies y_p(x) = x\cos(x)$$

Ainsi l'ensemble des solutions de (E'') est :

$$\mathscr{S}_{E''} = \left\{ x \longmapsto x\cos(x) - 2\cos^2(x) + k\cos(x) \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

Équations du 2nd ordre à coefficients constants et second membre non constant

On s'intéresse dans cette partie à la résolution d'une équation différentielle de la forme :

$$y'' + ay' + by = c(x) \qquad (E)$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $x \longmapsto c(x)$ *une fonction continue sur un intervalle* I*.*

Une solution de (E)*, est une fonction définie et deux fois dérivable sur* I*, tel que :*

$$\forall x \in I,\ y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

Les solutions ont même structure que dans le cas où le second membre est constant :

Théorème

Avec les mêmes notations : on associe à (E) l'équation homogène :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{H}$$

Soit y_p une solution particulière de l'équation (E) ; les solutions de (E) sont toutes les fonctions y de la forme :

$$y = y_p + y_H \quad \text{avec} \begin{cases} y_p \text{ la solution particulière de } (E) \\ y_H \text{ une solution générale de } (H) \end{cases}$$

Démonstration. Soit y_p une solution de (E) ; ainsi :

$$\forall x \in I, \quad y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x) = c(x) \tag{1}$$

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. Alors y est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in I, \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x) \tag{2}$$

et donc en formant $(2) - (1)$, si et seulement si :

$$\begin{aligned} & y''(x) + ay'(x) + by(x) - \left(y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p(x)\right) = c(x) - c(x) \\ \iff & (y - y_p)''(x) + a(y - y_p)'(x) + b(y - y_p)(x) = 0 \qquad \text{par linéarité de la dérivation} \\ \iff & (y - y_p) \text{ est solution de } (H) \end{aligned}$$

Ainsi y est solution de (E) si et seulement si $y - y_p = y_H$ où y_H est une solution de (H), si et seulement si $y = y_p + y_H$ avec y_H une solution de l'équation homogène (H). ■

Propriété

Principe de superposition des solutions. *Soit l'équation :*

$$y'' + ay' + by = c_1(x) + c_2(x) + \cdots + c_n(x) \qquad (E)$$

avec $c_1, c_2, \ldots c_n$ *des fonctions continues sur un intervalle* I*. En notant pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$ *:*

$$y'' + ay' + by = c_i(x) \qquad (E_i)$$

et f_i *une solution particulière de* (E_i)*, la fonction :*

$$y_p = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

est une solution particulière de (E)*.*

Démonstration. Comme dans le cas de l'ordre 1, elle découle facilement de la linéarité de l'équation et de la linéarité de la dérivation, appliquée ici deux fois :

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$$
$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'' = f_1'' + f_2'' + \cdots + f_n''$$

Recherche d'une solution particulière

Déterminer une solution particulière lorsque le second membre n'est pas constant est un problème difficile. Nous n'étudierons pas de méthode de résolution générale.

On cherche le plus souvent une solution particulière ayant une forme analogue au second membre. Hormis dans les cas très simples, durant un exercice l'énoncé proposera sous quelle forme chercher une solution particulière. Dans la grande majorité des cas on se retrouvera dans l'un des cas particuliers listé ci-après.

Dans toute la suite on considère l'équation :

$$y'' + ay' + by = c(x) \qquad (E)$$

et son équation caractéristique associée :

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (EC)$$

de discriminant Δ.

On dira que :

Pour un réel α, son ordre de multiplicité $m(\alpha)$ en tant que solution de (EC) est :

– $m(\alpha) = 0$: si α n'est pas solution de (EC).

– $m(\alpha) = 1$: si α est solution de (EC) et $\Delta \neq 0$ (i.e ; si α est une solution simple).

– $m(\alpha) = 2$: α est solution de (EC) et $\Delta = 0$ (i.e. si α est une solution double).

Pour trouver une solution particulière lorsque le second membre $c(x)$ est :

- *Un polynôme de degré n.*

Chercher une solution particulière de la forme :

$$x^{m(0)} \times P(x)$$

où :

– $P(x)$ est un polynôme de même degré n que le second membre,

– $m(0)$ est l'ordre de multiplicité de 0 dans (EC).

Exemples.

- Résoudre :

$$y'' - 2y + y = x^2$$

L'équation homogène associée est $(H) : y'' - 2y' + y = 0$ d'équation caractéristique $(EC) : r^2 - 2r + 1 = 0$. On a $\Delta = 0$ et une seule solution de (EC) qui est 1.

Ainsi (H) a pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^x$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Cherchons une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

Alors :

$$\begin{aligned}
& y_p'(x) = 2ax + b \\
& y_p''(x) = 2a \\
\Longrightarrow\ & y_p \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = x^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 2a - 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = x^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (2a - 2b + c) + (b - 4a)x + ax^2 = x^2 \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} 2a - 2b + c = 0 \\ b - 4a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi une solution particulière de (E) est : $y_p(x) = x^2 + 4x + 6$ et les solutions de (E) sont :

$$\mathscr{S} = \left\{ x \longmapsto (\lambda x + \mu)e^x + x^2 + 4x + 6 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- Résoudre :

$$y'' + y' = x^2$$

L'équation homogène associée est $(H) : y'' + y' = 0$ d'équation caractéristique $(EC) : r^2 + r = 0$. On a $\Delta > 0$ et pour solutions réelles 0 et -1.

Ainsi (H) a pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \lambda + \mu e^{-x}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Puisque 0 a pour ordre de multiplicité 1 dans (EC), cherchons une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = x \times (ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Alors :

$$y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y_p''(x) = 6ax + 2b$$

$$\Longrightarrow y_p \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } y_p''(x) + y_p'(x) = x^2$$

$$\Longleftrightarrow 6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c = x^2$$

$$\Longleftrightarrow (2b+c) + (6a+2b)x + 3ax^2 = x^2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

ainsi une solution particulière de (E) est : $y_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$ et les solutions de (E) sont :

$$\mathscr{S} = \left\{ x \longmapsto \lambda + \mu e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Lorsque le second membre est de la forme :

- *$P(x) \times e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme de degré n.*

Chercher une solution particulière de la forme :

$$x^{m(\alpha)} \times Q(x) \times e^{\alpha x}$$

où :

– $Q(x)$ est un polynôme de même degré n que $P(x)$,

– $m(\alpha)$ est l'ordre de multiplicité de α dans (EC).

Exemples.

- Résoudre :

$$y'' - y = e^x$$

L'équation homogène associée est $(H) : y'' - y = 0$ d'équation caractéristique $(EC) : r^2 - 1 = 0$. On a $\Delta > 0$ et pour solutions réelles -1 et 1.

Ainsi (H) a pour solutions toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Puisque 1 a pour ordre de multiplicité 1 dans (EC), cherchons une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = x \times a \times e^x$$

Alors :

$$\begin{aligned}
& y_p'(x) = ae^x + axe^x = ae^x(1+x) \\
& y_p''(x) = ae^x + ae^x(1+x) = ae^x(2+x) \\
\Longrightarrow\ & y_p \text{ est solution de } (E) \text{ ssi } y_p''(x) - y_p(x) = e^x \\
\Longleftrightarrow\ & ae^x(2+x) - axe^x = e^x \\
\Longleftrightarrow\ & 2ae^x = e^x \\
\Longleftrightarrow\ & a = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ainsi une solution particulière de (E) est : $y_p(x) = \frac{1}{2}xe^x$ et les solutions de (E) sont :

$$\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto \frac{1}{2}xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Lorsque le second membre est de la forme :

- *Une fonctions circulaire* $k\sin(\omega x)$ *ou* $k\cos(\omega x)$.

Chercher une solution particulière sous la forme :

$$a\sin(\omega x)+b\cos(\omega x)$$

lorsque $i\omega$ *n'est pas une solution de* (EC).

Sinon, la chercher sous la forme :

$$ax\sin(\omega x)+bx\cos(\omega x).$$

avec a et b à déterminer.

Remarque. Ce cas se ramène en fait au cas précédent une fois remarqué que :

$$\sin(\omega x)=Im(e^{i\omega x}) \quad ; \quad \cos(\omega x)=Re(e^{i\omega x})$$

et qu'une solution particulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ donne une solution particulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en considérant sa partie réelle/imaginaire.

Exemple.

- Résoudre :

$$y'' + y = \sin(2x) + \cos(x) \qquad (E)$$

L'équation homogène associée est : (H) : $y'' + y = 0$ d'équation caractéristique (EC) : $r^2 + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta < 0$ et ses deux solutions sont les complexes conjugués : $\pm \mathrm{i}$. Ainsi les solutions de (H) sont :

$$\mathscr{S}_H = \left\{x \longmapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Pour déterminer une solution particulière on applique le principe de superposition des solutions ; soient :

$$y'' + y = \sin(2x) \quad (E_1) \qquad ; \qquad y'' + y = \cos(x) \quad (E_2)$$

– Solution particulière de (E_1). Puisque $2\mathrm{i}$ n'est pas solution de (EC), on cherche une solution particulière sous la forme $y_1(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. Ainsi :

$$y_1'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$$
$$y_1''(x) = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$$

ainsi y_1 est solution de (E_1) si et seulement si $y_1'' + y_1 = \sin(2x)$

$$\begin{aligned}
&\iff \overbrace{-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)}^{=y_1''} + \overbrace{a\cos(2x) + b\sin(2x)}^{=y_1} = \sin(2x)\\
&\iff -3a\cos(2x) - 3b\sin(2x) = \sin(2x)\\
&\iff (a,b) = \left(0, -\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

La fonction $y_1(x) = -\frac{1}{3}\sin(2x)$ est donc une solution particulière de (E_1).

– Solution particulière de (E_2). Puisque $\mathrm{i}\times 1$ est solution de (EC), on cherche une solution particulière sous la forme : $y_2(x) = ax\cos(x) + bx\sin(x)$; ainsi :

$$\begin{aligned}
y_2'(x) &= a\cos(x) + b\sin(x) - ax\sin(x) + bx\cos(x)\\
y_2''(x) &= -a\sin(x) + b\cos(x) - a\sin(x) + b\cos(x) - ax\cos(x) - bx\sin(x)\\
&= -2a\sin(x) + 2b\cos(x) - ax\cos(x) - bx\sin(x)
\end{aligned}$$

ainsi y_2 est solution de (E_2) si et seulement si : $y_2'' + y_2 = \cos(x)$

$$\iff \overbrace{-2a\sin(x) + 2b\cos(x) - ax\cos(x) - bx\sin(x)}^{=y_2''} + \overbrace{ax\cos(x) + bx\sin(x)}^{=y_2} = \cos(x)$$
$$\iff -2a\sin(x) + 2b\cos(x) = \cos(x)$$
$$\iff (a,b) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Ainsi $y_2(x) = \frac{1}{2}x\sin(x)$ est solution particulière de (E_2).
Finalement, d'après le principe de superposition des solutions, la fonction $y_p(x) = -\frac{1}{3}\sin(2x) + \frac{1}{2}x\sin(x)$ est solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\mathscr{S}_E = \left\{x \longmapsto -\frac{1}{3}\sin(2x) + \frac{1}{2}x\sin(x) + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' - 2y = e^x \qquad (E_1)$$

$$y'' - 2y' + y = (x-1)e^x \qquad (E_2)$$

Pour trouver une solution particulière on se ramènera aux cas particuliers exposés ci-dessus.

• (E_1) a pour équation homogène associée (H_1) : $y'' + y' - 2y = 0$, d'équation caractéristique (EC) : $r^2 + r - 2 = 0$; son discriminant est $\Delta = 9$ et (EC) a pour solutions -2 et 1. Ainsi les solutions de (H_1) sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^x \qquad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = axe^x$ car 1 est une solution de (EC) d'ordre de multiplicité 1.

$$y_p'(x) = ae^x + axe^x$$

$$y_p''(x) = 2ae^x + axe^x$$

Ainsi y_p est solution de (E_1) si et seulement si :

$$\begin{aligned} & 2ae^x + axe^x + ae^x + axe^x - 2axe^x = e^x \\ \iff & 3ae^x = e^x \\ \iff & a = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On conclut :

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ x \longmapsto \frac{1}{3}xe^x + \lambda e^{-2x} + \mu e^x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

• (E_2) a pour équation homogène associée (H_2) : $y'' - 2y' + y = 0$, d'équation caractéristique (EC) : $r^2 - 2r + 1 = 0$; son discriminant est $\Delta = 0$ et (EC) a pour solution double 1. Ainsi les solutions de (H_2) sont toutes les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto (\lambda + \mu x)e^x \qquad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax^3 + bx^2)e^x$ car 1 est une solution de (EC) d'ordre de multiplicité 2.

$$y_p'(x) = (3ax^2 + 2bx)e^x + (ax^3 + bx^2)e^x = (ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx)e^x$$
$$y_p''(x) = (3ax^2 + 2(3a+b)x + 2b)e^x + (ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx)e^x$$
$$= (ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b)e^x$$

Ainsi y_p est solution de (E_2) si et seulement si :

$$(ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b - 2(ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx) + ax^3 + bx^2)e^x = (x-1)e^x$$

$$\iff (6ax + 2b)e^x = (x-1)e^x$$

$$\iff (a,b) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$$

On conclut :

$$\mathscr{S}_2 = \left\{x \longmapsto \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^x + (\lambda + \mu x)e^x \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$