Les nombres complexes
Préambule historique

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Introduction

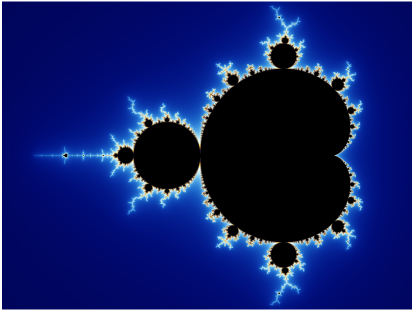
C'est à la fin du XVI^e siècle, sous la plume de Cardan, qu'apparaissent pour la première fois des nombres –qu'il appelle "sophistiqués"– dont le carré est négatif.
Introduits comme une astuce de calcul, ils permettront à l'école mathématique italienne de la renaissance (Cardan, Bombelli, Tartaglia,...) d'obtenir une méthode de résolution systématique des équations polynomiales de degré 3 (formules de Cardan) ainsi que de degré 4.
C'est Bombelli qui établira les règles de calculs sur ces nombres qu'on appellera successivement "impossibles" ou "imaginaires".
Le mathématicien suisse Euler introduira la notation i et montrera que tous ces nouveau nombres peuvent s'écrire sous la forme $a + \mathrm{i}\, b$ avec a et b réels ; il mettra aussi en place l'exponentielle complexe $e^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)$ et remarquera leur interprétation géométrique.

Mais durant 3 siècles la communauté mathématique se montre réticente face à l'introduction de nombres qui n'ont pas d'existence réelle, et ils ne sont que tolérés pour la simplification qu'ils apportent dans les calculs.
Cependant entretemps ils sont devenus incontournables pour leurs applications en algèbre (toute équation polynomiale admet au moins une solution), dans le calcul intégral naissant (calcul d'une primitive), et surtout en physique (optique et électricité).
Il faudra attendre le XIX^e siècle, pour qu'ils ne posent plus problème suite à leur construction rigoureuse. Notamment l'allemand Gauss, à l'aide de leur interprétation géométrique (il associe au point du plan de coordonnées (a, b) le nombre complexe $a + \mathrm{i}\, b$), le britannique Hamilton qui considère l'ensemble des couples de réels munis des deux opérations :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

et le français Cauchy qui les définit à l'aide d'une construction élaborée sur les polynômes.

De nos jours, les nombres complexes sont incontournables en mathématiques, et en physique par leurs innombrables applications.



L'ensemble de Mandelbrot (en noir) est l'ensemble des nombres complexes $c \in \mathbb{C}$ tels que la suite $(z_n)_n$ définie par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z^2 + c$ reste à distance bornée de l'origine.
[1]

1. Image par créée par Wolfgang Beyer sur Ultra Fractal 3.

Méthode de Cardan

Jérôme Cardan publie cette méthode de résolution des équations polynomiales de degré 3 dans "Ars Magna" en 1545 (en pleine renaissance).
Soient a, b, c, d des nombres réels avec $a \neq 0$. Le problème consiste en la résolution de l'équation :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \text{(E)}$$

- **Fait 1 :**

L'équation (E) d'inconnue x est équivalente à l'équation d'inconnue z :

$$z^3 + pz + q = 0$$

en posant le changement de variable $x = z - \dfrac{b}{3a}$.
(On a alors :

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}.)$$

Démonstration. On effectue le changement de variable

$$x = z - \frac{b}{3a}$$

dans :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

En appliquant les développements du carré et du cube d'une somme :

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

on obtient :

$$\begin{aligned} P(x) &= a \times \left(z - \frac{b}{3a}\right)^3 + b \times \left(z - \frac{b}{3a}\right)^2 + c \times \left(z - \frac{b}{3a}\right) + d \\ &= a \times \left(z^3 - 3\frac{b}{3a}z^2 + 3\frac{b^2}{9a^2}z - \frac{b^3}{27a^3}\right) \\ &+ b \times \left(z^2 - 2\frac{b}{3a}z + \frac{b^2}{9a^2}\right) \\ &+ c \times \left(z - \frac{b}{3a}\right) + d \end{aligned}$$

$$= az^3 + \underbrace{(-b + b)}_{=0} z^2 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c \right) z + \left(-\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d \right)$$

$$= az^3 + \frac{3ac - b^2}{3a} z + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^2}$$

$$\Longrightarrow (E) \iff z^3 + pZ + q = 0$$

$$\text{avec} \quad p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}$$

$\blacksquare$

- **Fait 2 :**
On pose :

$$z = u + v.$$

C'est toujours possible, et on a même une infinité de façons de faire ça, en prenant pour u n'importe quel réel et pour v : $v = z - u$.
L'équation devient :

$$\begin{aligned}(E) &\iff (u+v)^3 + p \times (u+v) + q = 0 \\ &\iff u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + (u+v) \times [p + 3uv] + q = 0\end{aligned}$$

Et là Cardan impose une condition supplémentaire à u et v :

- *Cardan choisit u et v de sorte que :*

$$u + v = z \qquad \text{et} \qquad \boxed{p + 3uv = 0}$$

Est-t-il toujours possible d'imposer cette condition $p+3uv = 0$? ? ? On y reviendra plus tard.

On obtient alors :

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

Ainsi :

$$(E) \iff \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ p + 3uv = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

et donc si et seulement si u^3 et v^3 sont les racines du trinôme :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$$

son discriminant est :

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

Ainsi si $\Delta \geq 0$, le trinôme admet des racines, d'où des valeurs pour u^3 et v^3 et donc pour u et v. On en déduit $z = u + v$ et une solution $x_0 = z - \frac{b}{3a}$ à l'équation de degré 3. Les autres solutions sont obtenues après avoir factorisé le polynôme de degré 3 comme produit de $(x - x_0)$ et d'un trinôme et en cherchant les racines de ce trinôme.

Premier exemple

On considère l'équation :

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \qquad \text{(E)}$$

Ici : $a = 1,\ b = 1,\ c = -1,\ d = -1.$
En posant :

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{-3-1}{3} = -\frac{4}{3} = -\frac{2^2}{3}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = \frac{2+9-27}{27} = -\frac{16}{27} = -\frac{2^4}{3^3}$$

$$(E) \iff z^3 + pz + q = 0 \quad \text{avec } x = z - \frac{b}{3a} = z - \frac{1}{3}.$$

On cherche alors u^3 et v^3 racines du trinôme : $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27}$
on aura alors $z = u + v$ et la solution $x = z - \frac{1}{3}$ de (E).

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \left(-\frac{2^4}{3^3}\right)^2 + \frac{2^2\left(-2^2\right)^3}{3^3 \times 3^3} = \frac{2^8}{3^6} - \frac{2^8}{3^6} = 0$$

on en déduit l'unique solution du trinôme :

$$u^3 = v^3 = \frac{-q}{2} = \frac{\frac{16}{27}}{2} = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Ainsi :

$$u = v = \frac{2}{3} \Longrightarrow z = u + v = \frac{4}{3} \Longrightarrow x = z - \frac{1}{3} = 1$$

On trouve donc la solution $x = 1$ de l'équation (E) ; pour trouver les autre solutions, sachant que 1 est solution on peut factoriser le polynôme de degré 3 par $(x - 1)$:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1) \times (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha x^3 + (\beta - \alpha)x^2 + (\gamma - \beta)x - \gamma$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - \alpha = 1 \\ \gamma - \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1) \times (x^2 + 2x + 1) = (x - 1) \times (x + 1)^2$$

Ainsi toutes les solutions de (E) sont :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ -1; 1 \right\}}$$

Quid de la condition $p + 3uv = 0$

Cardan impose cette condition pour simplifier l'équation. Mais est-ce vraiment toujours possible ?

Donné $z \in \mathbb{R}$ quelconque il est toujours possible de trouver deux réels u et v tels que $z = u + v$. Mais imposer $p + 3uv = 0$ revient à :

$$\begin{cases} z = u + v \\ p + 3uv = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = u + v \\ v = -\dfrac{p}{3u} \end{cases} \iff \begin{cases} z = u - \dfrac{p}{3u} \\ v = z - u \end{cases}$$

Ainsi pour une solution z quelconque c'est possible seulement si il existe $x \neq 0$ tel que :

$$z = x - \frac{p}{3x} \iff 3x^2 - 3z.x - p = 0$$

C'est un trinôme d'inconnue x et de paramètres z et p ; son discriminant est :

$$\Delta = 9z^2 + 12p$$

un solution existe si et seulement si : $\Delta \geq 0$.

• Premier cas : si $p > 0$ alors $\Delta > 0$ et une solution $x \neq 0$ existe : conclusion lorsque $p > 0$, pour tout nombre z il existe u et v vérifiant $u + v = z$ et $p + 3uv = 0$.

• Deuxième cas : si $p = 0$ alors l'équation $3x^2 - 3z.x - p = 0$ admet une solution $x \neq 0$ si et seulement si $z \neq 0$.
D'autre part $z = 0$ est solution de $z^3 + pz + q = 0$ si et seulement si $q = 0$.
• Troisième cas : si $p < 0$:

$$\Delta \geq 0 \iff 9z^2 + 12p \geq 0 \iff z^2 \geq -\frac{4p}{3} \iff \begin{cases} z \geq 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \\ \text{ou} \\ z \leq -2\sqrt{\frac{-p}{3}} \end{cases}$$

dans ce cas $x = 0$ n'est pas solution de $3x^2 - 3z.x - p = 0$ et donc pour tout nombre $z \in \left]-\infty; -2\sqrt{\frac{-p}{3}}\right[\cup \left]2\sqrt{\frac{-p}{3}}; +\infty\right[$ il existe u et v tels que $u + v = z$ et $p + 3uv = 0$.

En conclusion :

Soit :

$$z^3 + pz + q = 0 \qquad \text{(E)}$$

• *Si* $q = 0$ *alors* $z = 0$ *est une solution particulière, sinon :*
• *Si* $p = 0$ *alors* $z = \sqrt[3]{-q}$ *est une solution particulière.*
• *Si* $p > 0$ *alors on peut chercher une solution particulière* z *de* (E) *en posant le changement de variable :*

$$\begin{cases} z = u + v \\ p + 3uv = 0 \end{cases}$$

• *Si* $p < 0$ *alors on peut chercher une solution particulière* z *de* (E) *en posant le changement de variable :*

$$\begin{cases} z = u + v \\ p + 3uv = 0 \end{cases}$$

seulement si cette solution z *vérifie :*

$$z \in \left]-\infty ; -2\sqrt{\frac{-p}{3}}\right[\cup \left]2\sqrt{\frac{-p}{3}} ; +\infty\right[$$

Deuxième exemple : solution de Bombelli introduisant $\sqrt{-1}$

Ainsi la méthode de Cardan ne serait que partiellement efficace...

Considérons l'équation :

$$z^3 - 15z - 4 = 0$$

Vérifions que $z = 4$ est solution :

$$z = 4 \implies z^3 - 15z - 4 = 16 \times 4 - 15 \times 4 - 4 = 16 \times 4 - 16 \times 4 = 0$$
$$\implies 4 \text{ est solution}$$

Pourtant, appliquons la méthode de Cardan : ici $a = 1$, $b = 0$, $c = -15$, $d = -4$, et donc :

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{3ac}{3a^2} = \frac{-45}{3} = -15$$
$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = \frac{27a^2d}{27a^3} = \frac{-4 \times 27}{27} = -4$$

(simple vérification des formules, c'est évident ici)

Par la méthode de Cardan, on cherche u et v tels que u^3 et v^3 soient racines de :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$$

Son discriminant est :

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = (-4)^2 + \frac{4 \times (-15)^3}{3^3} = 4^2 - 4 \times 5^3 = 16 - 4 \times 125 = -484 < 0$$

Et donc la méthode de Cardan échoue à trouver la solution $z = 4$.
Bombelli propose d'appliquer la méthode de Cardan, en s'autorisant (sacrilège ! ! !) de considérer la racine carrée du nombre négatif -484 : il écrit (sacrilège ! ! !) :

$$\sqrt{-484} = \sqrt{484} \times \sqrt{-1} = \sqrt{4 \times 121} \times \sqrt{-1} = 2 \times 11 \times \sqrt{-1} = 22 \times \sqrt{-1}$$

Alors il obtient :

$$u^3 = \frac{4 + \sqrt{-484}}{2} = \frac{2 + 22\sqrt{-1}}{2} = 1 + 11\sqrt{-1}$$
$$v^3 = \frac{4 - \sqrt{-484}}{2} = \frac{2 - 22\sqrt{-1}}{2} = 1 - 11\sqrt{-1}$$

Il remarque alors que :

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3\times 2\times \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3 = 2 + 11\sqrt{-1} = u^3$$
$$\left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 - 3\times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3\times 2\times \sqrt{-1}^2 - \sqrt{-1}^3 = 2 - 11\sqrt{-1} = v^3$$

Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} u = 2+\sqrt{-1} \\ v = 2-\sqrt{-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow z = u+v = 4 \quad \boxed{\text{4 est solution}}$$

Magique ! En introduisant cette notation interdite (et n'ayant aucun sens), elle se simplifie d'elle même dans les calculs pour aboutir à obtenir la vraie solution recherchée !

Il doit y avoir quelque chose à creuser ici...

Explication

Revenons à la condition nécessaire pour appliquer la méthode de Cardan : pouvoir poser le changement de variable :

$$z = u + v \quad \text{avec} \quad p + 3uv = 0$$

ce qui équivaut à l'existence d'une solution $x \neq 0$ à l'équation :

$$3x^2 - 3z.x - p = 0$$

de discriminant $\Delta = 9z^2 + 12p$.
Si $\Delta < 0$, alors on s'autorise à utiliser un nombre imaginaire $\sqrt{-1}$ alors, à l'aide de la forme canonique du trinôme :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3z.x - p &= 3 \times \left(\left(\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4 \times 9} \right) \right. \\ &= 3 \times \left(\left(\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{-\Delta} \times \sqrt{-1}\right)^2}{4 \times 9} \right) \right. \end{aligned}$$

$$= 3 \times \left(\left((x - \frac{z}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{-\Delta} \times \sqrt{-1}}{6} \right)^2 \right)$$

$$= 3 \times \left(x - \frac{z}{2} - \frac{\sqrt{-\Delta} \times \sqrt{-1}}{6} \right) \times \left(x - \frac{z}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta} \times \sqrt{-1}}{6} \right)$$

et on peut prendre :

$$\begin{cases} u = \dfrac{z}{2} + \dfrac{\sqrt{-\Delta} \times \sqrt{-1}}{6} \\ v = z - u = \dfrac{z}{2} - \dfrac{\sqrt{-\Delta} \times \sqrt{-1}}{6} \end{cases}$$

alors $u + v = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} = z$

et vérifions que $p + 3uv = 0$:

$$\begin{aligned}
p + 3uv &= p + 3\left(\frac{z}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta} \times \sqrt{-1}}{6}\right) \times \left(\frac{z}{2} - \frac{\sqrt{-\Delta} \times \sqrt{-1}}{6}\right) \\
&= p + 3\left(\frac{z^2}{4} - \frac{\Delta}{36}\right) = p + 3\left(\frac{z^2}{4} - \frac{9z^2 + 12p}{4 \times 9}\right) \\
&= p + 3\left(\frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{4} - \frac{p}{3}\right) \\
&= p - p = 0
\end{aligned}$$

Alors la recherche d'une solution se ramène au calcul des racines u^3 et v^3 du trinôme $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27}$; en s'autorisant à écrire $\sqrt{-1}$, comme on l'a vu, on pourra trouver ces racines, pour en déduire une solution z réelle, puis une solution x de l'équation.

Le corps des nombres complexes

Enrichissons l'ensemble des réels d'un nombre imaginaire i qui soit tel que $i^2 = -1$. Puis considérons l'ensemble $\mathbb{C}$ de tous les "nombres" pouvant s'en déduire par les opérations somme $+$, produits $\times$, opposé, inverse,et en conservant les propriétés qu'ont ces opérations dans $\mathbb{R}$, à savoir :

Propriétés des opérations. *(cf. Chapitre 0.)*

• *L'addition $+$ est associative et commutative. Elle admet un élement neutre* 0 *et chaque élément admet un opposé.*
• *La multiplication $\times$ est associative et commutative. Elle admet un élément neutre* 1*, et chaque élément $\neq 0$ admet un inverse.*
• *La multiplication est intègre, et distributive sur l'addition.*

Alors l'ensemble $\mathbb{C}$ contient tous les nombres de la forme $a + \mathrm{i}\, b$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- La somme de deux nombres de cette forme est aussi de cette forme :

$$(a+\mathrm{i}\,b)+(a'+\mathrm{i}\,b')=\underbrace{(a+a')}_{\in\mathbb{R}}+\mathrm{i}\,\underbrace{(b+b')}_{\in\mathbb{R}}$$

- L'opposé d'un nombre de cette forme et aussi de cette forme :

$$(a+\mathrm{i}\,b)+(-a+\mathrm{i}\,(-b))=\underbrace{(a-a)}_{=0}+\mathrm{i}\,\underbrace{(b-b)}_{=0}=0 \implies -(a+\mathrm{i}\,b)=\underbrace{-a}_{\in\mathbb{R}}+\mathrm{i}\,\underbrace{(-b)}_{\in\mathbb{R}}$$

- Le produit de deux nombres de cette forme est aussi de cette forme :

$$\begin{aligned}(a+\mathrm{i}\,b)\times(a'+\mathrm{i}\,b') &= aa'+\mathrm{i}\,ab'+\mathrm{i}\,a'b+\mathrm{i}^2bb' \\ &= \underbrace{(aa'-bb')}_{\in\mathbb{R}}+\mathrm{i}\,\underbrace{(ab'+a'b)}_{\in\mathbb{R}}\end{aligned}$$

- L'inverse d'un nombre non nul de cette forme est aussi de cette forme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+\mathrm{i}\,b} &= \frac{a-\mathrm{i}\,b}{(a+\mathrm{i}\,b)(a-\mathrm{i}\,b)} \\ &= \frac{a-\mathrm{i}\,b}{a^2-(\mathrm{i}\,b)^2}=\frac{a-\mathrm{i}\,b}{a^2-\mathrm{i}^2b^2}=\frac{a-\mathrm{i}\,b}{a^2+b^2}=\underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{\in\mathbb{R}}+\mathrm{i}\,\underbrace{\frac{-b}{a^2+b^2}}_{\in\mathbb{R}}\end{aligned}$$

Ainsi, le quotient de deux nombres de cette forme sera aussi de cette forme (car produit du premier par l'inverse du deuxième), la puissance d'un nombre de cette forme sera aussi de cette forme (car produit de ce nombre par lui même ou de son inverse par lui-même).

Définition

On note

$$\mathbb{C} = \left\{ a + i\,b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \textit{avec } i^2 = -1$$

l'ensemble des nombres complexes. Il est muni des deux opérations $+$, $\times$ *; elles vérifient les mêmes propriétés que dans* $\mathbb{R}$. *On a les inclusions :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Remarque :

– *Attention il est interdit d'utiliser la notation de Bombelli* $\sqrt{-1}$ *ni, plus généralement,* $\sqrt{a}$ *lorsque a n'est pas un réel positif.*

– *Lorsque a est un réel négatif, il existe un nombre complexe dont le carré vaut a, c'est* $i\sqrt{-a}$. *En effet :*

$$\left(i\sqrt{-a}\right)^2 = i^2\sqrt{-a}^2 = (-1)\times(-a) = a$$

Construction rigoureuse

Au XIXe siècle, le britannique Hamilton propose la construction rigoureuse suivante des nombres complexes :

Il considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels, muni des deux opérations notées $+$ et $\times$ définies par :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Il montre que ces opérations vérifient les propriétés :

– L'addition $+$ est associative et commutative ; elle admet pour élément neutre $(0, 0)$, et chaque élément a un opposé : $-(a, b) = (-a, -b)$.

– La multiplication $\times$ est associative et commutative ; elle admet pour élément neutre $(1, 0)$, et chaque élément $\neq (0, 0)$ a un inverse : $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.
– La multiplication est intégre.

– La multiplication est distributive sur l'addition.

En identifiant $(a, 0)$ avec le réel a, ces opérations coincident avec l'addition et la multiplication usuelle des réels, de sorte que $\mathbb{R}$ peut être naturellement identifié à une partie de cet ensemble.
De plus :

$$(0,1)^2 = (0,1) \times (0,1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 0 \times 1) = (-1, 0)$$

En notant le couple (a, b) de réels sous la forme $a + \mathrm{i}\, b$, on a bien $\mathrm{i}^2 = -1$, et l'écriture $a + \mathrm{i}\, b$ n'est plus qu'une notation.
L'existence de cet ensemble ne fait donc plus aucun doute ; c'est une construction rigoureuse du corps des nombres complexes.

Racines complexes d'un trinôme

Cette partie est la seule exigible de ce préambule
Soient a, b, c 3 réels avec $a \neq 0$, et le trinôme $ax^2 + bx + c$. On s'intéresse à l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (E)$$

- Écriture du trinôme sous forme canonique.

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac$$

Pour le trinôme $ax^2 + bx + c$, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant,

$$a \times \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

est l'écriture <u>sous forme canonique</u> du trinôme.

- **Racines du trinôme (solutions de (E)).**

– 1^{er} cas : si $\Delta > 0$.

Alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$; donc :

$$\begin{aligned}
(E) \underset{\times \frac{1}{a}}{\iff} & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \\
\iff & \left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \\
\iff & x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

– 2^{eme} cas : si $\Delta = 0$.

$$\begin{aligned}
(E) \underset{\times \frac{1}{a}}{\iff} & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\
\iff & x = \frac{-b}{2a}
\end{aligned}$$

– 3^{eme} cas : si $\Delta < 0$.

Alors $-\Delta > 0$ donc $-\Delta = \sqrt{-\Delta}^2$ et :

$$\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2 = \mathrm{i}^2 \times \sqrt{-\Delta}^2 = (-1) \times (-\Delta) = \Delta$$

Ainsi $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$; donc :

$$\begin{aligned}
(E) &\underset{\times \frac{1}{a}}{\iff} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \\
&\iff \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \times \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \times \left(x - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0 \\
&\iff x - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \qquad (\text{intégrité de } \times) \\
&\iff x = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

Ce qui fournit les solutions de l'équation.

En résumé :

L'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$ *a pour solutions dans* $\mathbb{C}$, *en posant* $\Delta = b^2-4ac$:

- *Si* $\Delta > 0$, *deux solutions réelles distinctes :*

$$x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si* $\Delta = 0$, *une unique solution réelle :*

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- *Si* $\Delta < 0$, *deux solutions complexes conjuguées :*

$$x = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ou \quad x = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$