Cours : Intégration

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Dans ce chapitre toutes les applications sont réelles. On désignera par I un intervalle non vide et non réduit à un point.

- **Rappel :**

Une application continue sur un intervalle I admet des primitives. Deux primitives d'une même application diffèrent d'une constante additive, *i.e.* :

$$F' = G' \iff \exists c \in \mathbb{R},\ F = G + c$$

Intégrale d'une application continue sur $[a, b]$

Proposition-Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et soient $(a, b) \in I^2$. Si F et G sont deux primitives de f alors :

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé <u>intégrale de f de a à b</u> et noté :

$$\int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. Sous ces hypothèses, $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $F = G + c$ et donc :

$$F(b) - F(a) = G(b) + c - (G(a) + c) = G(b) + c - G(a) - c = G(b) - G(a) \quad \blacksquare$$

On note : $[F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Comme conséquence immédiate :

Propriété

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt \qquad ; \qquad \int_a^a f(t)dt = 0.$$

On a aussi la propriété fondamentale :

Propriété

Sous ces mêmes hypothèses, l'unique primitive de f s'annulant en a est :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Démonstration. Par définition, $F(x) = G(x) - G(a)$ où G est une primitive de f. Alors d'une part $F'(x) = G'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f et d'autre part $F(a) = G(a) - G(a) = 0$. ∎

Exercice. Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit :

$$\phi(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$

Justifier que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée ϕ' à l'aide de f.

Résolution. Soit F une primitive de f, alors :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_x^{2x} f(t)dt \\ &= F(2x) - F(x)\end{aligned}$$

Puisque F est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et différence, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\phi'(x) = F(2x)' - F(x)' = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

Interprétation géométrique

Dans cette partie nous interprétons géométriquement l'intégrale de f entre a et b comme l'aire algébrique délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$. Par là-même nous démontrons la propriété qu'une application continue admet des primitives. Nous n'établissons cependant pas ces résultats en toute généralité, mais seulement pour une application continue qui change un nombre fini de fois de signe entre a et b ; cela recouvre l'immense majorité des cas ; le cas restant nécessiterait des notions non abordées en première année.

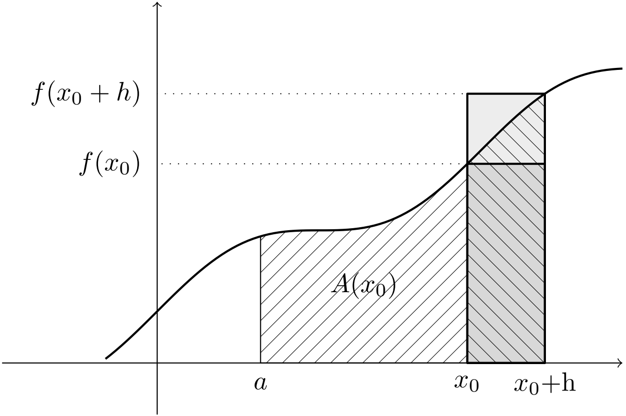
Dans tout ce qui suit $a < b$ sont deux réels et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue.

- Cas où f est croissante, positive et continue sur $[a, b]$.

Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} A & : [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x_0 & \longmapsto & \text{l'aire délimitée par } \mathscr{C}_f,\ (Ox),\ x = a \text{ et } x = x_0 \end{array}$$

Montrons que A est une primitive de f sur $[a, b]$.



Soit $x_0 \in [a,b[$. Montrons que A est dérivable à droite en x_0.
Puisque f est croissante :

$$\forall h > 0, x_0 + h \in [a,b] \implies f(x_0) \leqslant f(x_0+h)$$

Ainsi en considérant les aires des deux rectangles de base $[x_0, x_0+h]$ et de hauteur respective $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$:

$$f(x_0) \times h \leqslant A(x_0 + h) - A(x_0) \leqslant f(x_0 + h) \times h$$
$$\underset{h>0}{\Longrightarrow} \; f(x_0) \leqslant \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$$

Par continuité de f : $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, et donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = A'_d(x_0) = f(x_0)$$

Le même argument avec $h < 0$ montre que pour tout $x_0 \in]a, b]$, A est dérivable à gauche en x_0 et $A'_g(x_0) = f(x_0)$.
Ainsi A est dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f ; c'est une primitive de f. Puisque A s'annule en a :

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Ainsi $\int_a^b f(t)dt$ est égale à $A(b)$ c'est-à-dire à l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.

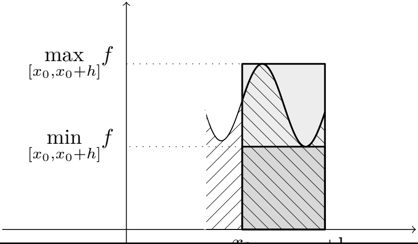
• Cas où f est positive et continue sur $[a, b]$.

L'argument procède comme précédemment (et plus généralement).
Soit $x_0 \in [a, b[$; dérivabilité à droite de A en x_0 : Soit $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$.
Puisque f est continue sur $[x_0, x_0 + h]$, elle y est bornée et atteint ses bornes :

$$\min_{[x_0, x_0+h]} f \text{ et } \max_{[x_0, x_0+h]} f.$$

Ainsi :

$$h \times \min_{[x_0, x_0+h]} f \leqslant A(x_0+h) - A(x_0) \leqslant h \times \max_{[x_0, x_0+h]} f$$



Ainsi, après avoir divisé par $h > 0$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = A'_d(x_0) = f(x_0)$$

Le même argument s'applique pour $x_0 \in]a, b]$ et $h < 0$, ce qui montre que A est dérivable en x_0 et $A'(x_0) = f(x_0)$.

Ainsi A est une primitive de f,

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

et $\int_a^b f(t)dt$ est égale à l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.

• Cas où f est négative et continue sur $[a, b]$.

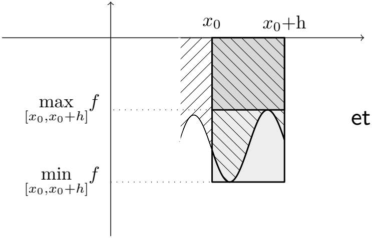
Le même argument que précédemment montre que pour $h > 0$:

$$-h \max_{[x_0, x_0+h]} f \leqslant A(x_0+h) - A(x_0) \leqslant -h \min_{[x_0, x_0+h]} f$$

$$-\max_{[x_0, x_0+h]} f \leqslant \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} \leqslant -\min_{[x_0, x_0+h]} f$$

On obtient finalement :

$$-A(x) = \int_a^x f(t)dt$$



et $\int_a^b f(t)dt$ est égale à l'opposé de l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.

• Cas d'une fonction continue sur $[a, b]$.

On suppose en outre que f change de signe un nombre fini de fois sur $[a, b]$:
Il existe des réels $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], f \text{ est de signe constant sur } [[a_{k-1}, a_k]]$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ notons :

$$\begin{array}{rcl} A_k \ : [a_k, a_{k+1}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x_0 & \longmapsto & \text{l'aire délimitée par } \mathscr{C}_f,\ (Ox),\ x = a_k \text{ et } x = x_0 \end{array}$$

$$\mathscr{A}_k = A_k(a_{k+1}) \text{ l'aire délimitée par } \mathscr{C}_f,\ (Ox),\ x = a_k \text{ et } x = a_{k+1}$$

$$\text{et } s_k = \pm 1 \text{ ayant même signe que } f \text{ sur } [a_k, a_{k+1}]$$

Avec ce qui précède l'application définie sur $[a, b]$ par $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall x \in [a_k, a_{k+1}]$:

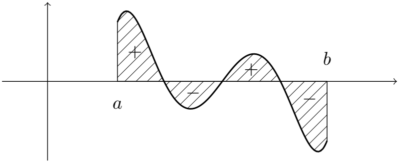
$$F(x) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} s_j \times \mathscr{A}_j\right) + s_k \times A_k(x)$$

est dérivable sur $[a_k, a_{k+1}]$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $F'(x) = f(x)$. De plus pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, F est dérivable à droite et à gauche en a_k et $F'_g(a_k) = F'_d(a_k) = f(a_k)$. Ainsi F est dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f.

F est une primitive de f sur $[a, b]$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

et $\int_a^b f(t)dt$ s'obtient en faisant la différence de la somme des aires délimitées par $\mathscr{C}_f$, (Ox), $x = a$, $x = b$ au dessus de la courbe et de la somme de celles au-dessous de la courbe.



Géométriquement, $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire algébrique délimitée par $\mathscr{C}_f$, (Ox), et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

Où "aire algébrique" signifie que les aires des domaines au-dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement, et celles en dessous le sont négativement.

Propriétés

Soient f et g deux applications continues sur un intervalle I et a, b, c trois réels dans I.

Propriété

(Relation de Chasles)

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt.$$

■

Propriété

(Linéarité de l'intégrale)

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. Soient F et G des primitives de f et g. Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ et donc :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt &= (\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(a) \\
&= \lambda F(b) + \mu G(b) - (\lambda F(a) + \mu G(a)) \\
&= \lambda (F(b) - F(a)) + \mu (G(b) - G(a)) \\
&= \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Propriété

(Positivité)

Si $a \leqslant b$ *et si* $\forall x \in [a, b],\ f(x) \geqslant 0$, *alors :*

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$$

Démonstration. Une primitive F de f est croissante sur $[a, b]$ et donc $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \geqslant 0$. ∎

Propriété

(Croissance)

Si $a \leqslant b$ *et si* $\forall x \in [a, b],\ f(x) \leqslant g(x)$, *alors :*

$$\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. Appliquons la positivité à $g - f$ qui est continue sur $[a, b]$ et positive ; par linéarité :

$$\int_a^b (g-f)(t)dt = \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt \geqslant 0 \implies \int_a^b g(t)dt \geqslant \int_a^b f(t)dt.$$

■

Propriété

(Inégalité de la moyenne)

Si $a < b$ et si il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [a, b], m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leqslant M.$$

Démonstration. On applique la croissance aux applications $x \longmapsto m$, f et $x \longmapsto M$:

$$\int_a^b mdt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b Mdt \implies m \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M \times (b-a)$$

$$\underset{b-a>0}{\implies} m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leqslant M$$

■

Propriété

(valeur absolue)

Si $a \leqslant b$ alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Démonstration. Pour tout $x \in [a, b]$: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, donc par croissance et linéarité :

$$-\int_a^b |f(t)|\, dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt \Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

■

Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f continue sur $[a, b]$; on appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$, le réel :

$$\frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)dt.$$

Remarques.

• C'est la valeur que devrait prendre une fonction constante pour délimiter entre a et b un rectangle d'aire $\int_a^b f(t)dt$.

• Si $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in [a, b],\ m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors d'après l'inégalité de la moyenne :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)dt \leqslant M$$

La valeur moyenne est comprise entre tout minorant et tout majorant de f.

• Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes :

$$\begin{aligned}
&\forall t \in [a,b],\ \min f([a,b]) \leqslant f(t) \leqslant \max f([a,b]) \\
&\qquad \Longrightarrow \min f([a,b]) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leqslant \max f([a,b]) \\
&\qquad \Longrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \in [\min f([a,b]); \max f([a,b])] = f([a,b])
\end{aligned}$$

Ainsi la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est atteinte par f sur $[a, b]$.

• Interprétation physique. Un mobile se déplace entre les temps $t = 0\ s$ et $t = T\ s$ avec une vitesse uniformément accélérée : $v(t) = g \times t\ m/s$. Quelle distance aura-t-il parcouru ?

Sa vitesse moyenne est :

$$\frac{1}{T}\int_0^T g \times t \cdot dt = \frac{1}{T}\left[\frac{gt^2}{2}\right]_0^T = \frac{gT}{2}$$

Il aura donc parcouru (en m) :

$$\int_0^T g \times t \cdot dt = \frac{gT^2}{2}.$$

On lâche un mobile d'une hauteur 100m ; au bout de combien de temps touchera-t-il le sol ?

Le mobile est soumis à une accélération (qu'on peut supposer) uniforme due à la gravité, et sa vitesse est $v(t) = g \times t$ avec $g \approx 9,8\, m/s^2$. Au moment T du contact avec le sol il aura parcouru :

$$\frac{gT^2}{2} = 100 \Longrightarrow T^2 = \frac{200}{g} \underset{T \geqslant 0}{\Longrightarrow} T = \sqrt{\frac{200}{g}} \approx 4.52\ s$$

Il lui faudra environ 4 secondes et demi pour atteindre le sol.

Théorème

(Théorème de la valeur moyenne)

Soit f continue sur $[a, b]$;

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)\\ &= \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)dt.\end{aligned}$$

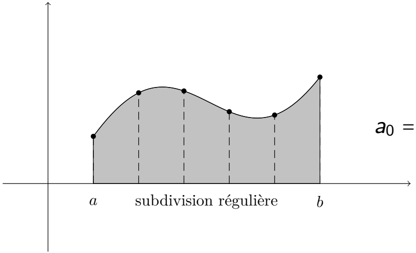
Remarque. Interprétation géométrique.

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est la limite de la moyenne des valeurs prises par f sur une subdivision régulière de $[a, b]$.

La suite arithmétique finie $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$:

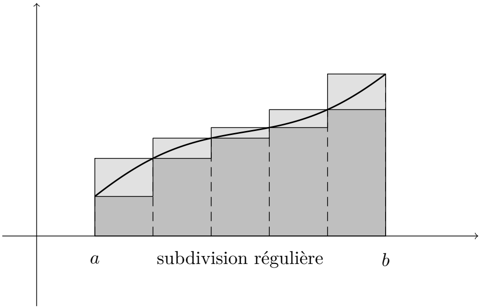
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = a + k \times \frac{b-a}{n}$$

est une subdivision régulière de $[a, b]$ en $n+1$ point (ou en n segments) ;



$a_0 = a$, $a_n = b$ et tous les segments $[a_k, a_{k+1}]$ ont même longueur $\frac{b-a}{n}$.

Démonstration. Dans le cas où f est continue et croissante sur $[a, b]$; le cas général sera admis.



On considère la subdivision régulière de $[a, b]$ à $n+1$ points :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \; x_i = a + k \times \frac{b-a}{n}.$$

Alors pour tout $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$.

Puisque f est croissante, $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$:

$\forall t \in [x_i, x_{i+1}]$, $f(x_i) \leqslant f(t) \leqslant f(x_{i+1})$

$$\Longrightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dt \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})dt \qquad \text{croissance de } \int$$

$$\Longrightarrow (x_{i+1} - x_i)f(x_i) \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \leqslant (x_{i+1} - x_i)f(x_{i+1})$$

$$\Longrightarrow \frac{b-a}{n} \times f(x_i) \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \leqslant \frac{b-a}{n} \times f(x_{i+1})$$

En sommant ces inégalités pout tout $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$:

$$\Longrightarrow \frac{b-a}{n} \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \leqslant \frac{b-a}{n} \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$$

$$\Longrightarrow \frac{b-a}{n} \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leqslant \int_{x_0}^{x_n} f(t)dt \leqslant \frac{b-a}{n} \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \qquad \text{relation de Chasles}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{b-a}{n} \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}_{S_g(n)} \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \underbrace{\frac{b-a}{n} \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})}_{S_d(n)}$$

Or :

$$\begin{aligned} S_d(n) &= \frac{b-a}{n} \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \times \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \end{aligned}$$

$$S_d(n) = \frac{b-a}{n} \times \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) - f(a) + f(b) \right)$$

$$S_d(n) = S_g(n) + \underbrace{(f(b) - f(a)) \times \frac{b-a}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & S_g(n) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant S_d(n) \\ \Longrightarrow\ & 0 \leqslant \int_a^b f(t)dt - S_g(n) \leqslant \underbrace{(f(b) - f(a)) \times \frac{b-a}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \end{aligned}$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\times\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\times\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+1})=\int_a^b f(t)dt.$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\times\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\times\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\int_a^b f(t)dt$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \qquad \blacksquare$$

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

Démonstration. Il suffit de multiplier par $(b-a)$. ■

Une somme de la forme :

$$\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

s'appelle une <u>somme de Riemann</u> (respectivement à gauche, à droite) pour $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Remarque. Interprétation géométrique.

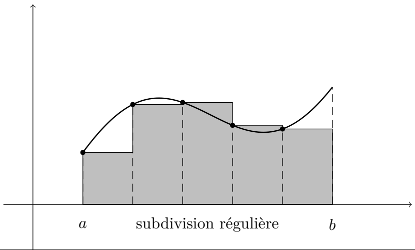
On découpe le domaine $[a, b]$ sur une subdivision régulière $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ en n segments. Chaque segment $[a_k, a_{k+1}]$ a pour longueur $\frac{b-a}{n}$. Si on somme les aires de tous les rectangles de base $[a_k, a_{k+1}]$ et de hauteur :

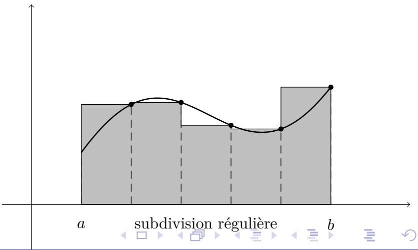
– $f(a_k)$: on obtient la première somme de Riemann :

$$\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_k\right)$$

– $f(a_{k+1})$: on obtient la deuxième somme de Riemann :

$$\frac{b-a}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_{k+1}\right) = \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(a_k\right)$$





Remarque. Application : calcul approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.

```
def methodeRectangle(f, a, b, n):
    """Calcul approche de l'integrale de f entre a et b
    renvoie la somme de Riemann (à gauche par ex)
    pour n segments. Plus n est grand, meilleure est
    l'approximation."""
    x = a
    delta = (b-a)/n
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + f(x)
        x = x + delta
    return delta * S
```

On peut montrer que l'erreur commise est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Remarque. Cas particulier important : lorsque $a = 0$ et $b = 1$:

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Exercice. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}$ de deux manières.

Résolution. Première méthode :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Deuxième méthode :

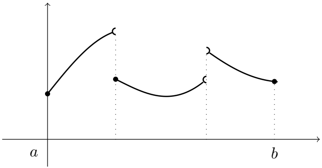
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Généralisation aux fonctions continues par morceaux

Définition

Une fonction est continue par morceaux sur $[a, b]$ si elle est continue sauf en un nombre fini de points en lesquels elle admet des limites à droite et à gauche finies.

Exemples.



• La fonction partie entière $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur tout intervalle $[a, b]$.

• La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ n'est pas continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsque $a < 0 < b$ car ses limites à droite et à gauche en 0 sont infinies.

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et soient $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ses points de discontinuité.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ on définit l'application $\phi_i : [x_i, x_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x_i < x < x_{i+1} \\ \lim\limits_{x \to x_i^+} f(x) & \text{si } x = x_i \\ \lim\limits_{x \to x_{i+1}^-} f(x) & \text{si } x = x_{i+1} \end{cases}$$

Alors ϕ_i est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, et on définit :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(t)dt}.$$

Un cas particulier important est celui des fonctions en escaliers :

Définition

Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite <u>en escalier</u> si, avec les mêmes notations, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$, égale à C_i.

Dans ce cas :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \times (x_{i+1} - x_i)}.$$

Exemple. La fonction partie entière $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est une fonction en escalier.

$$\int_0^4 \lfloor t \rfloor dt = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1$$
$$= 6$$
$$\int_0^n \lfloor t \rfloor dt = \sum_{k=0}^{n-1} k \times 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

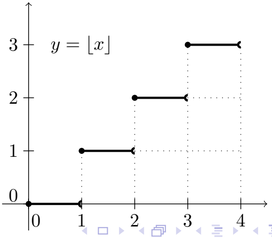


Table des primitives usuelles à connaitre

$f(x)$	Domaine de définition	$\int f(t)dt$	Avec
a	$\mathbb{R}$	ax	$a \in \mathbb{R}$
x^α	$\mathscr{D} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq -1$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$	
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\ln\lvert x\rvert$	

$f(x)$	Domaine de définition	$\int f(t)dt$	Avec
$\frac{1}{ax+b}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$	$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x\ln(x) - x$	
e^{ax}	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$a \in \mathbb{R}^*$
a^x	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$	$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
$\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$f(x)$	Domaine de définition	$\int f(t)dt$	Avec
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan(x)$	
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	

À utiliser avec les opérations sur les primitives :

f	$f+g$	λf	$f' \times g$	$(f' \circ u) \times u'$
$\int f$	$\int f + \int g$	$\lambda \int f$	$f \times g - \int f \times g'$	$f \circ u$

Notamment la dernière, primitive $f \circ u$ de $(f' \circ u) \times u'$, donne la table, très utile, des primitives de composées :

Fonction	une primitive	avec	Remarque
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$		
$u' u^{\alpha}$	$\dfrac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$(*)$
$\dfrac{u'}{u^{\alpha}}$	$\dfrac{1}{(1-\alpha)u^{\alpha-1}}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	Cas particulier de $(*)$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$		Cas particulier de $(*)$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$		Cas particulier de $(*)$
$\dfrac{u'}{u\sqrt{u}}$	$-2 \times \dfrac{1}{\sqrt{u}}$		Cas particulier de $(*)$

Fonction	une primitive	avec	Remarque
$u'e^u$	e^u		
$(\cos u) \times u'$	$\sin(u)$		
$(\sin u) \times u'$	$-\cos(u)$		
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$		

Exemple. Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et a pour primitive :

- si $n = 1$: $\quad \ln|x-a| \qquad \left(\text{appliquer } \displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|\right)$
- si $n \geqslant 2$: $\quad \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} \qquad \left(\text{appliquer } \displaystyle\int \frac{u'}{u^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)u^{\alpha-1}}\right)$

Exemple. Méthode : Calcul de $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$.

Il y a 3 cas à considérer selon que le trinôme au dénominateur admet 2 racines réelles distinctes, 1 racine réelle double, ou aucune racine réelle.

- Premier cas : si x^2+px+q admet deux racines réelles distinctes c et d.

$$x^2+px+q=(x-c)(x-d)$$

On cherche alors 2 réels α et β tel que :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{\alpha}{x-c}+\frac{\beta}{x-d}$$

par linéarité :

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=\int \frac{\alpha}{x-c}dx+\int \frac{\beta}{x-d}dx=\alpha\times\ln|x-c|+\beta\times\ln|x-d|.$$

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$:

Le trinôme x^2-3x+2 a pour racines 1 et 2 ; on cherche α, β tels que :

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} \iff \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{\alpha(x-2)+\beta(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\iff \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{(\alpha+\beta)x-2\alpha-\beta}{(x-1)(x-2)} \iff \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ 2\alpha+\beta = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}$$

Ainsi :

$$\int_3^4 \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx = 3\times\int_3^4 \frac{dx}{x-2} - 2\times\int_3^4 \frac{dx}{x-1} = 3\times\Big[\ln|x-2|\Big]_3^4 - 2\times\Big[\ln|x-1|\Big]_3^4$$

$$= 3\times(\ln 2-\ln 1) - 2\times(\ln 3-\ln 2) = \boxed{5\ln 2 - 2\ln 3}$$

- Deuxième cas : x^2+px+q admet une racine réelle double c :

$$x^2+px+q=(x-c)^2$$

On cherche deux reéls α et β tels que :

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{\alpha}{x-c}+\frac{\beta}{(x-c)^2}$$

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+2x+1}dx$.
Le trinôme x^2+2x+1 a pour racine double -1 ; on cherche α et β tel que :

$$\frac{x-1}{x^2+2x+1}=\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{(x+1)^2} \iff \frac{x-1}{x^2+2x+1}=\frac{\alpha(x+1)+\beta}{(x+1)^2}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha & =1\\ \alpha+\beta & =-1\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-2\end{cases}$$

$$\implies \frac{x-1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+2x+1}dx &= \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - 2\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \Big[\ln|x+1|\Big]_0^1 - 2\times\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln 1 - 2\times\frac{-1}{2} + 2\times\frac{-1}{1} = \boxed{\ln 2 - 1}\end{aligned}$$

• Troisième cas : x^2+px+q n'a aucune racine réelle.

Si $a \neq 0$, on commence par faire apparaitre au numérateur la dérivée $2x+p$ du dénominateur :

$$ax+b = \frac{a}{2}\times(2x+p) + b - \frac{ap}{2}$$

puis on applique la linéarité :

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \frac{a}{2}\times\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\times\int\frac{1}{x^2+px+q}dx \\ &= \frac{a}{2}\times\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\times\int\frac{1}{x^2+px+q}dx\end{aligned}$$

Pour calculer $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$ on utilise la forme canonique du trinôme pour se ramener à $\dfrac{1}{1+X^2}$ dont une primitive est $\arctan X$:

$$\frac{1}{x^2+px+q} = \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2-\frac{\Delta}{4}} = \frac{4}{-\Delta}\times\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\times(x+\frac{p}{2})\right)^2+1}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{4}{-\Delta}\times\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\times\underbrace{\int \frac{\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\times(x+\frac{p}{2})\right)^2+1}dx}_{\int \frac{u'}{1+u^2}=\arctan u}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\times\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\times\left(x+\frac{p}{2}\right)\right)$$

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{-3x+2}{x^2-x+1}dx$.
Le trinôme au dénominateur a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$.

$$\frac{-3x+2}{x^2-x+1} = \frac{\alpha(2x-1)+\beta}{x^2-x+1} \iff \begin{cases} 2\alpha = -3 \\ \beta - \alpha = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2} \\ \beta = 2+\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{-3x+2}{x^2-x+1}dx = -\frac{3}{2} \times \underbrace{\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx}_{=\left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^1=0} + \frac{1}{2} \times \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$$

Or :

$$\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{-3x+2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\times\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{-3x+2}{x^2-x+1}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{3}}\times\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\times\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\times\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) && \text{imparité de arctan}\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{6}\\
&= \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{9}}
\end{aligned}$$

Intégration par partie

Théorème

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, alors $\forall (a,b) \in I^2$,

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u \times v\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Démonstration. Puisque u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, u, v, u', v' sont continues et donc $u'v$ et uv' admettent des primitives sur I.
Puisque $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$, par linéarité

$$\int u' \times v = \int \left((u \times v)' - u \times v'\right) = \int (u \times v)' - \int u \times v' = u \times v - \int u \times v'$$

à une constante additive près. Ainsi :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u \times v\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

■

Exemple. Calculer $\int_0^1 \arctan(t)dt$.

On pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= \arctan(t) & \qquad u'(t) &= \frac{1}{1+t^2} \\ v(t) &= t & \qquad v'(t) &= 1 \end{aligned}$$

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan(t)dt &= \int_0^1 u \times v'(t)dt \\ &= \Big[u(t) \times v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u' \times v(t)dt \\ &= \Big[t \times \arctan(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt \\ &= \arctan(1) - \frac{1}{2} \times \Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}} \end{aligned}$$

Exemples. Méthode pour le calcul de :

$$\int_a^b P(t)\cos(\alpha t)dt \quad ; \quad \int_a^b P(t)\sin(\alpha t)dt \quad ; \quad \int_a^b P(t)e^{\alpha t}dt.$$

où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un pôlynome de degré $\geqslant 1$.

Principe : Faire des IPPs successives en dérivant à chaque fois le polynôme jusqu'à ce qu'il ne reste que le terme en cos, sin ou exp à intégrer ; en tout $\deg(P)$ IPPs sont nécessaires.

Pour le calcul de $\int_a^b P(t)e^{\alpha t}dt$ on peut aussi directement chercher une primitive sous la forme $Q(t)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de même degré que P ; Q s'obtient par identification.

Exemples :

- Calculer $\displaystyle\int_0^\pi (t^2+1)\cos(2t)dt$.

On pose :

$$u(t) = t^2+1 \qquad u'(t) = 2t$$
$$v(t) = \frac{1}{2}\times\sin(2t) \qquad v'(t) = \cos(2t)$$

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;

$$\int_0^{\pi}(t^2+1)\cos(2t)dt = \underbrace{\left[\frac{(t^2+1)\times\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{\pi} t\times\sin(2t)dt}_{IPP}$$

$$IPP \quad \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v = -\frac{1}{2}\cos(2t) & v' = \sin(2t) \end{array} \right.$$

$$= -\left(\left[-\frac{t}{2}\times\cos(2t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2t)dt\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\times\sin(2t)\right]_0^{\pi}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

- Calculer par deux méthodes $\displaystyle\int_0^1 (t^2+1)\times e^{-t}dt$.

Première méthode : 2 IPPs en dérivant le polynôme :

On pose :

$$\begin{array}{ll} u(t) = t^2+1 & u'(t) = 2t \\ v(t) = -e^{-t} & v'(t) = e^{-t} \end{array}$$

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;

$$\int_0^1 (t^2+1)\times e^{-t}dt = \Big[-(t^2+1)\times e^{-t}\Big]_0^1 + 2\underbrace{\int_0^1 t\times e^{-t}dt}_{IPP}$$

$$IPP \quad \left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v = -e^{-t} & v' = e^{-t} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t^2+1)\times e^{-t}dt &= 1-\frac{2}{e}+2\left(\Big[-t\times e^{-t}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{-t}dt\right)\\ &= 1-\frac{2}{e}-\frac{2}{e}+2\Big[-e^{-t}\Big]_0^1 = 1-\frac{2}{e}-\frac{2}{e}+2\left(1-\frac{1}{e}\right) = \boxed{3-\frac{6}{e}}\end{aligned}$$

Deuxième méthode : on cherche une primitive sous la forme $(ax^2+bx+c)\times e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
\left((ax^2+bx+c)\times e^{-x}\right)' &= (2ax+b)\times e^{-x} - (ax^2+bx+c)\times e^{-x}\\
&= (-ax^2+(2a-b)x+b-c)\times e^{-x}\\
&= (x^2+1)\times e^{-x}\\
&\underset{e^{-x}\neq 0}{\iff} \begin{cases} -a=1\\ 2a-b=0\\ b-c=1\end{cases} \iff \begin{cases} a=-1\\ b=-2\\ c=-3\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (t^2+1)\times e^{-t}dt &= \left[(-t^2-2t-3)\times e^{-t}\right]_0^1\\
&= \boxed{3-6e^{-1}}
\end{aligned}$$

Exemple. Méthode pour le calcul de :

$$\int_a^b \cos(\alpha t)e^{\beta t}dt \quad ; \quad \int_a^b \sin(\alpha t)e^{\beta t}dt$$

Principe : faire 2 IPPs successives et dans le même sens (on dérive chaque fois la fonction circulaire, ou chaque fois l'exponentielle), pour obtenir une équation dont la résolution donne l'intégrale.

Exemple ; calculer $\int_0^\pi e^t \sin t dt$.

$$I = \int_0^\pi e^t \sin t dt = \underbrace{\left[e^t \times \sin t\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi e^t \cos t dt \qquad IPP \left| \begin{array}{ll} u = \sin t & u' = \cos t \\ v = e^t & v' = e^t \end{array} \right.$$

$$= -\left(\left[e^t \times \cos t\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^t \sin t dt\right) \qquad IPP \left| \begin{array}{ll} u = \cos t & u' = -\sin t \\ v = e^t & v' = e^t \end{array} \right.$$

$$= e^\pi + 1 - I$$

$$\Longrightarrow I = \boxed{\frac{e^\pi + 1}{2}}$$

Changement de variable

Théorème

Soit ϕ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et f continue un intervalle I contenant $\phi([a, b])$. Alors :

$$\int_a^b f(\phi(x)) \times \phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $t = \phi(x)$.

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\phi(x)) \times \phi'(x)dx &= \int_a^b F(\phi(x))'dx \\ &= \Big[F(\phi(x))\Big]_a^b = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) \\ &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt\end{aligned}$$

Remarque.

Le théorème peut s'utiliser de 2 manières pour calculer $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$:

– De droite à gauche ; mais il faut alors déterminer $\alpha, \beta \in I$ tels que $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$.

Exemple. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$ à l'aide du changement de variable $t = \sin(x) = \phi(x)$. L'application ϕ et de classe $\mathscr{C}^1$ et $\dfrac{dt}{dx} = \phi'(x) = \cos(x) \implies dt = \cos(x)dx$.

De plus $\phi(0) = 0$ et $\phi(\frac{\pi}{2}) = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(x)} \times \cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(x)} \times \cos(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x)| \times \cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx \qquad \text{car } \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \\
&= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

– De gauche à droite : mais il faut transformer l'expression pour faire apparaitre un produit de $\phi'(x)$ et d'une composée de $\phi(x)$.

Exemple. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\times(1-\cos^2(x))}{1+\cos^2(x)}dx$$

En posant $t = \phi(x) = \cos(x)$, on a $\phi'(x) = -\sin(x)$; avec $f(u) = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$, on a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\times(1-\cos^2(x))}{1+\cos^2(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\phi(x))\times\phi'(x)dx$$

$$= \int_{\phi(0)}^{\phi(\frac{\pi}{2})} f(t)dt = \int_1^0 \frac{t^2-1}{t^2+1}dt$$

$$= -\int_0^1 \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = \Big[2\arctan(t)-t\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}-1}$$

Remarque. Lorsque ϕ est injective, elle réalise une bijection de $[a, b]$ sur $\phi([a, b])$; le théorème devient :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\phi^{-1}(\alpha)}^{\phi^{-1}(\beta)} f(\phi(x)) \times \phi'(x)dx$$

et le changement de variable $t = \phi(x)$ est équivalent au changement $x = \phi^{-1}(t)$.

Application aux intégrales de fonctions périodiques

Corollaire

Si f est continue sur I et T-périodique, alors $\forall (a,b) \in I^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \quad ; \quad si\ I = \mathbb{R} \ : \quad \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Démonstration. Pour la première, on effectue le changement de variable $t = x + nT$; $dt = dx$:

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)dt = \int_a^b \underbrace{f(x+nT)}_{=f(x)} dx = \int_a^b f(x)dx$$

Pour la seconde à l'aide du changement de variable $t = x + T$; $dt = dx$:

$$\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(x+T)dx = \int_0^a f(x)dx$$

et donc :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Application aux intégrales de fonctions paires, impaires

Corollaire

Soit $a > 0$;

– *si f est paire et continue sur $[-a, a]$ alors :* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2 \times \int_{0}^{a} f(t)dt$;

– *si f est impaire et continue sur $[-a, a]$ alors :* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$;

Démonstration. Soit f paire ou impaire ;
$\exists \varepsilon = \pm 1, \forall x \in [-a, a],\ f(-x) = \varepsilon \times f(x)$.

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(t)dt}_{\substack{t=-x \\ dt=-dx}} + \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(t)dt$$

$$= \int_{0}^{a} \varepsilon \times f(x)dx + \int_{0}^{a} f(t)dt = \begin{cases} 2 \times \int_{0}^{a} f(t)dt & \text{si } \varepsilon = 1 \\ 0 & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

Application : calcul de $\int_a^b \cos^n(x)\sin^p(x)dx$.

Méthode :

Premier cas. Lorsque l'une au moins des 2 puissances est impaire : on effectue l'un des changements de variables :

$$\begin{array}{ll} t = \cos(x) & \text{si l'exposant de sin est impair} \\ t = \sin(x) & \text{si l'exposant de cos est impair} \end{array}$$

Deuxième cas : Les deux puissances sont paires : il faut linéariser le produit.

Exemples.

- Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)dx$.

Changement de variable $t = \phi(x) = \cos x$; $dt = -\sin x dx$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\sin(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) - 1) \times (-\sin(x))dx$$

$$= \int_1^0 (t^2 - 1)dt = \int_0^1 (1 - t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

- Calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$.

On linéarise $\cos^4(x)$:

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i4x}+4e^{i2x}+6e^{i0}+4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i4x}+e^{-i4x}+4(e^{i2x}+e^{-i2x})+6\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\cos(4x)+4\cos(2x)+12\right) \\
&= \frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_0^{\pi} \cos^4 dx = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} + \frac{3}{2}\left[x\right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

- Calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 x \cos^2 x dx$.

On effectue le changement de variable $t = \cos x$; $dt = -\sin x dx$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int_0^\pi -\sin^2 x \cos^2 x \times (-\sin x) dx \\
&= \int_0^\pi (\cos^2 x - 1) \cos^2 x \times (-\sin x) dx \\
&= \int_1^{-1} (t^2 - 1) t^2 dt \\
&= \int_{-1}^{1} (1 - t^2) t^2 dt \\
&= \int_{-1}^{1} (t^2 - t^4) dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_{-1}^{1} \\
&= 2 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{5} = \boxed{\frac{4}{15}}
\end{aligned}$$