Les matrices
Partie 1

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Définition d'une matrice

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p et q deux entiers > 0.

Définition

On appelle matrice A à p lignes et q colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$, une famille d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

On représente la matrice sous la forme d'un tableau ayant p lignes et q colonnes ; le scalaire $A_{i,j} \in \mathbb{K}$ figurant ligne i colonne j.

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,j} & \cdots & A_{1,q} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,j} & \cdots & A_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,j} & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix}$$

La matrice est dite de type (p, q). L'ensemble des matrices de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Remarque. Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles on même type (p, q) et :

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \forall\, j \in [\![1, q]\!],\ A_{i,j} = B_{i,j}.$$

Exemples.

- $$\begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 3 \\ -1 & 2 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{C})$$

- $$A = (i+j)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{C})$$

- La <u>matrice nulle</u> de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est celle dont tous les coefficients sont nuls, notée :

$$O_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

- Les éléments de $\mathscr{M}_{1,q}(\mathbb{K})$ sont appelés les <u>matrices lignes</u>.
- Les éléments de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ sont appelés les <u>matrices colonnes</u>.

Addition de matrices

Définition

Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$; la somme des matrices A et B est la matrice notée $A+B$ définie par :

$$A + B = (A_{i,j} + B_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \cdots & A_{1,q} + B_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} + B_{p,1} & \cdots & A_{p,q} + B_{p,q} \end{pmatrix}$$

Autrement dit $A+B$ est la matrice de type (p,q) telle que $\forall (i,j) \in [[1,p]] \times [[1,q]]$:

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 24 & 26 & 28 \end{pmatrix}$$

Propriétés de l'addition

La somme des matrices s'opérant terme à terme, elle hérite des propriétés de l'addition dans $\mathbb{K}$:

Propriété

Pour toutes matrices A, B, C dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

– *Commutativité :* $A + B = B + A$.

– *Associativité :* $(A + B) + C = A + (B + C)$.

– *$O_{p,q}$ et l'élément neutre de l'addition :* $A + O_{p,q} = A$.

– *Existence de l'opposé : la matrice notée $-A$ définie par $-A = (-A_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$ est l'opposée de A :* $A + (-A) = O_{p,q}$.

Exemple. $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10 & 20\\30 & 40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 20\\30 & 40\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11 & 22\\33 & 44\end{pmatrix}$.

L'opposé de $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ est $(-A) = \begin{pmatrix}-1 & -2\\-3 & -4\end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -2\\-3 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

Multiplication par un scalaire

Remarque. On parle de scalaire, pour désigner un élément de $\mathbb{K}$.

Définition

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$; on note $\lambda.A$ la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de A par le scalaire λ. Autrement dit, $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall j \in [\![1, q]\!],\ (\lambda.A)_{i,j} = \lambda \times A_{i,j}$.

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \cdots & \lambda A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{p,1} & \cdots & \lambda A_{p,q} \end{pmatrix}$$

Remarque. La matrice opposée de A est $(-A) = (-1).A$.

Propriétés de la multiplication par un scalaire

Propriété

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall A\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$$
$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall A\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$
$$\forall\alpha\in\mathbb{K},\ \forall(A,B)\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2,\quad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

Démonstration. La multiplication par un scalaire s'effectuant terme à terme sur les coefficients de la matrices, elles découlent toutes immédiatement de l'associativité de la multiplication et de la distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{K}$. En guise d'exemple ; pour la troisième :

Soient $\alpha\in\mathbb{K}$ et $(A,B)\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]$:

$$[\alpha(A+B)]_{i,j}=\alpha\times(A+B)_{i,j}=\underbrace{\alpha(A_{i,j}+B_{i,j})=\alpha A_{i,j}+\alpha B_{i,j}}_{\text{par distributivité de }\times\text{ sur }+\text{ dans }\mathbb{K}}=(\alpha A+\alpha B)_{i,j}$$

Puisque les matrices $\alpha(A+B)$ et $\alpha A+\alpha B$ ont même type (p,q) et mêmes coefficients, $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$. ■

Produit matriciel

Définition

Soient n, p, q trois entiers strictement positifs et soient :

$$A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

ou autrement dit :

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Alors le produit de A par B est la matrice notée $C = A \times B$ (ou AB) définie par :

- *C est de type (n,q) ; $C \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$; autrement dit :*
  - *C a autant de lignes que A.*
  - *C a autant de colonnes que B.*
- *Et ses coefficients sont :*

  pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$C_{i,j} = (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}$$

Remarque. Attention $A \times B$ est défini si et seulement si le nombre de colonne de A est égal au nombre de ligne de B.

• Le calcul du coefficient ligne i colonne j de la matrice produit $A \times B$ s'effectue à l'aide de la ligne i de la matrice A et de la colonne j de la matrice B.

$$A_{i,1} \times B_{1,j} \quad + \quad A_{i,k} \times B_{k,j} \quad + \quad A_{i,p} \times B_{p,j}$$

$$\begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,j} & \cdots & B_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{k,1} & \cdots & B_{k,j} & \cdots & B_{k,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{p,1} & \cdots & B_{p,j} & \cdots & B_{p,q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,k} & \cdots & A_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & C_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \boxed{C_{i,j}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & C_{n,q} \end{pmatrix}$$

$$C_{i,j} = A_{i,1} \times B_{1,j} + \cdots + A_{i,k} \times B_{k,j} + \cdots + A_{i,p} \times B_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}$$

Exemples.

- Calculer AB lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Calcul de AB :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f & g+2h+3i \\ 4a+5b+6c & 4d+5e+6f & 4g+5h+6i \end{pmatrix} \end{array}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f & g+2h+3i \\ 4a+5b+6c & 4d+5e+6f & 4g+5h+6i \end{pmatrix}$$

- Calculer AB lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Calcul de AB :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times(-1)+2\times(-4) & 1\times(-2)+2\times(-5) & 1\times(-3)+2\times(-6) \\ 3\times(-1)+4\times(-4) & 3\times(-2)+4\times(-5) & 3\times(-3)+4\times(-6) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & -12 & -15 \\ -19 & -26 & -33 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$$

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, lesquels des produits AB et BA sont-ils bien définis ? Les calculer.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(1) A et B sont de type $(2,2)$ et $(3,2)$. Seul le produit BA est défini ; il est de type $(3,2)$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -11 & 24 \\ 6 & -15 \\ 7 & -15 \end{pmatrix} \end{array} \qquad BA = \begin{pmatrix} -11 & 24 \\ 6 & -15 \\ 7 & -15 \end{pmatrix}$$

(2) A est de type $(1,3)$, B est de type $(3,1)$. Les produits AB et BA sont bien définis :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5/2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad AB = (-5/2)$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -6 & 9 & -15 \\ 1 & -3/2 & 5/2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad BA = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -15 \\ 1 & -3/2 & 5/2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

- A et B sont de type $(2,2)$; AB et BA sont bien définis et de type $(2,2)$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1-2i & 1+i \\ 2-i & i-1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad AB = \begin{pmatrix} -1-2i & 1+i \\ 2-i & i-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i-1 & 1+i \\ 2-i & -1-2i \end{pmatrix} \end{array} \qquad BA = \begin{pmatrix} i-1 & 1+i \\ 2-i & -1-2i \end{pmatrix}$$

Remarque. Le produit d'une matrice de type (p,q) par une matrice colonne de type $(q,1)$ est une matrice colonne de type $(p,1)$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix}_{(p,q)} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}_{(q,1)} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{q} A_{1,k} \times x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{q} A_{p,k} \times x_k \end{pmatrix}_{(p,1)}$$

Propriétés du produit matriciel

Associativité.

Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ *:*

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration. Vérifions que les deux matrices sont de même type.

$$\left.\begin{array}{r} AB \text{ est de type } (p,r) \\ C \text{ est de type } (r,s) \end{array}\right\} \Longrightarrow (AB)C \text{ est de type } (p,s)$$

$$\left.\begin{array}{r} A \text{ est de type } (p,q) \\ BC \text{ est de type } (q,s) \end{array}\right\} \Longrightarrow A(BC) \text{ est de type } (p,s)$$

ainsi $(AB)C$ et $A(BC)$ ont même type (p,s).

Montrons que les deux matrices ont mêmes coefficients.

Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,s]\!]$:

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} (AB)_{i,k} \times C_{k,j} = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times B_{t,k} \right) \times C_{k,j} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j}$$

$$[A(BC)]_{i,j} = \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times (BC)_{t,j} = \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \sum_{k=1}^{r} B_{t,k} \times C_{k,j} = \sum_{t=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j}$$

Or :

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq t \leq q}} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j}$$
$$= \sum_{t=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j} = [A(BC)]_{i,j}$$

Ainsi pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,s]\!]$, $[(AB)C]_{i,j} = [A(BC)]_{i,j}$. Les matrices $(AB)C$ et $A(BC)$ ayant même type et mêmes coefficients elles sont égales. ■

Remarque. Ainsi on pourra noter ABC (ou $A \times B \times C$) pour désigner $(AB)C$ et $A(BC)$.

Distributivité de $\times$ sur $+$.

Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* $(B, C) \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})^2$ *:*

$$A \times (B + C) = AB + AC$$

Pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$ *et* $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ *:*

$$(A + B) \times C = AC + BC$$

Démonstration. On montre la première égalité (distributivité à gauche), la preuve de la seconde est analogue.

Les matrices $A(B + C)$ et $AB + AC$ sont de même type (p, r). Montrons qu'elles ont mêmes coefficients ; soient $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$:

$$\begin{aligned}[A(B + C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times (B + C)_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times (B_{k,j} + C_{k,j}) \\ &= \sum_{k=1}^{q} (A_{i,k} \times B_{k,j} + A_{i,k} \times C_{k,j}) = \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times B_{k,j} + \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times C_{k,j} \\ &= (AB)_{i,j} + (AC)_{i,j} = (AB + AC)_{i,j}\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$, $[A(B + C)]_{i,j} = (AB + AC)_{i,j}$. Les matrices $(A + B) \times C$ et $AC + BC$ sont donc égales. ■

Compatibilité de $\times$ avec la multiplication par un scalaire.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$:

$$\lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B)$$

Démonstration. Les 3 matrices sont de type (p, r). Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$:

$$\begin{aligned}
[\lambda.(A \times B)]_{i,j} = \lambda \times (AB)_{i,j} = \lambda \times \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times B_{k,j} &= \sum_{k=1}^{q} \lambda \times A_{i,k} \times B_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{q} (\lambda.A)_{i,k} \times B_{k,j} = [(\lambda.A) \times B]_{i,j} \\
&= \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times (\lambda.B)_{k,j} = [A \times (\lambda.B)]_{i,j}
\end{aligned}$$

Elles ont mêmes coefficients, et sont donc égales. ∎

Remarque. Attention, certaines propriétés de la multiplication dans $\mathbb{K}$ ne sont plus vérifiées pour le produit matriciel :

• Le produit matriciel n'est pas commutatif : on peut avoir $AB \neq BA$.

– AB peut être défini sans que BA ne le soit.

– AB et BA peuvent être tous les deux définis mais pas de même type.
Exemple : si A est de type $(2,3)$ et B de type $(3,2)$, alors AB est de type $(2,2)$ et BA est de type $(3,3)$.

– Même lorsque AB et BA sont définies et de même type, on n'a pas en général $AB = BA$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcul de AB et BA :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = AB \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = BA \end{array}$$

Ainsi $AB \neq BA$.

• Le produit matriciel est non intègre : on peut avoir $AB = O$ avec $A \neq O$ et $B \neq O$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcul de AB :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = O_{2,2}$$

Matrices carrées et leurs opérations

Dans toute cette partie p désigne un entier strictement positif.

Définition

On appelle matrice carrée d'ordre p toute matrice de type (p, p)*.*

On désignera par $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans* $\mathbb{K}$*. Il est muni des deux opérations :*

– L'addition de matrices $+$*,*

– La multiplication de matrices $\times$ *; elle est bien définie sur* $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *: le produit de deux matrices carrées d'ordre p est une matrice carrée d'ordre p.*

Exemples.

– $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

– $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ est similaire à $\mathbb{K}$; addition et multiplication coincident avec ces opérations dans $\mathbb{K}$.

Remarque. Addition et multiplication sont des opérations bien définies dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.
Pour rappel l'addition est associative, commutative, et admet pour élément neutre la matrice nulle d'ordre p, notée O_p.
La multiplication est associative et en général n'est pas commutative. Elle admet aussi un élément neutre : la matrice identité notée I_p.

Remarque. La matrice nulle O_p est un élément absorbant pour la multiplication dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$:

$$\forall M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), \quad M \times O_p = O_p \times M = O_p.$$

La matrice identité

Définition

La matrice identité d'ordre p, notée I_p est la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (I_p)_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Autrement dit :

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(p,p)}$$

La matrice I_p est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, c'est-à-dire :

Pour tout $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *:* $\quad A \times I_p = I_p \times A = A$

Plus généralement :

Propriété

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$*, pour tout* $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *:*

$$I_p \times A = A \qquad \text{et} \qquad A \times I_q = A$$

Démonstration. Puisque $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $I_p \in \mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{K})$ et $I_q \in \mathscr{M}_{q,q}(\mathbb{K})$, les produits $I_p \times A$ et $A \times I_q$ sont bien définis et de type (p,q).
Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$(I_p \times A)_{i,j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} (I_p)_{i,k} \times A_{k,j} = (I_p)_{i,i} \times A_{i,j} = A_{i,j}}_{\text{car } (I_p)_{i,k} = 1 \text{ si } k = i \text{ et } 0 \text{ sinon}}$$

Donc $I_p \times A = A$. Et :

$$(A \times I_q)_{i,j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times (I_q)_{k,j} = A_{i,j} \times (I_q)_{j,j} = A_{i,j}}_{\text{car } (I_q)_{k,j} = 1 \text{ si } k = j \text{ et } 0 \text{ sinon}}$$

Donc $A \times I_q = A$. ∎

Puissance de matrices

Définition

- *Soit* $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *on note :*

$$A^0 = I_p \qquad ; \qquad A^1 = A \qquad ; \qquad A^2 = A \times A$$

et plus généralement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

Les puissances de matrices vérifient les propriétés suivantes :

Propriété

Pour tout $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *et* $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ *:*

$$A^n \times A^m = A^{n+m} \qquad ; \qquad (A^n)^m = A^{n \times m}$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ *:*

$$(\lambda.A)^n = \lambda^n.A^n$$

et :

$$(I_p)^n = I_p$$

Si $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *et* <u>*si A et B commutent*</u> *(pour* $\times$*) :*

$$(A \times B)^n = A^n \times B^n$$

Démonstration. Elle est analogue à la démonstration des mêmes propriétés des puissances dans $\mathbb{K}$. ■

Remarque. En particulier toutes les puissance d'une même matrices commutent entre-elles :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ A^n \times A^m = A^m \times A^n$$

en effet : $A^n \times A^m = A^{n+m} = A^{m+n} = A^m \times A^n$.

En particulier $I_p = A^0$ commute avec toute matrice A dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Plus généralement :

Propriété

Soient A et B deux matrices dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent entre-elles. Alors $\forall\ (n,m) \in \mathbb{N}^2$, A^n et B^m commutent entre elles.

Démonstration. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent entre elles. Montrons que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, A et B^m commutent entre-elles. Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$.

(I) Pour $m = 0$, $B^0 = I_p$ commute avec A. L'assertion est vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang m. Alors par associativité de $\times$, par hypothèse de récurrence et car A et B commutent :

$$\begin{aligned} A \times B^{m+1} &= A \times (B^m \times B) = (A \times B^m) \times B \underset{(HR)}{=} (B^m \times A) \times B = B^m \times (A \times B) \\ &= B^m \times (B \times A) = (B^m \times B) \times A = B^{m+1} \times A \end{aligned}$$

Ainsi A et B^{m+1} commutent entre-elles ; l'assertion est vraie au rang $m+1$.

Ainsi pour tout $m \in \mathbb{N}$, A et B^m commutent. En appliquant ce que l'on vient de démontrer à B^m et A, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n et B^m commutent. ∎

Exercice 2.

On considère les suites réelles (x_n) et (y_n) définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Nous allons appliquer le calcul matriciel pour déterminer les expressions de x_n et y_n en fonction de n.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$$

a) Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = A \times X_n.$$

Il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n \times X_0.$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(I) Pour $n = 0$: $A^0 = I_2$ d'où $X_0 = A^0 \times X_0$. L'assertion est vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang n. Alors :

$$X_{n+1} = A \times X_n \underset{(HR)}{=} A \times A^n \times X_0 = A^{n+1} \times X_0$$

L'assertion reste donc vraie au rang $n+1$. On conclut d'après le principe de récurrence.

c) Calculer A^2. En déduire A^{2m} et A^{2m+1} pour tout $m \in \mathbb{N}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.I_2$$

$$A^{2m} = (A^2)^m = (2.I_2)^m = 2^m.I_2^m = 2^m.I_2$$

$$A^{2m+1} = (A^2)^m \times A = (2.I_2)^m \times A = 2^m.I_2 \times A = 2^m.A$$

d) En déduire les coefficients X_{2m} et X_{2m+1} en fonction de m.

$$X_{2m} = A^{2m} \times X_0 = 2^m.I_2 \times X_0 = 2^m.X_0 = \begin{pmatrix} 2^m \\ 2^m \end{pmatrix}$$

$$X_{2m+1} = A^{2m+1} \times X_0 = 2^m.A \times X_0 = 2^m.X_1 = \begin{pmatrix} 2^{m+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de n.

On a finalement :

$$\begin{cases} x_{2m} = 2^m \\ y_{2m} = 2^m \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_{2m+1} = 2^{m+1} \\ y_{2m+1} = 0 \end{cases}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2^{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad ; \quad y_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Remarque. Comme on vient de le voir sur un exemple, beaucoup de problèmes se ramènent au calcul des puissances d'une matrice carrée, ce qui constitue un exercice assez difficile. Nous verrons dans la suite, et en TD, d'autres méthodes pour calculer les puissances d'une matrice carrée.

La formule du binôme

Dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ en général $(A+B)^2 \neq A^2 + 2.AB + B^2$. En effet :

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B) \times (A+B)\\ &= A \times (A+B) + B \times (A+B)\\ &= A \times A + A \times B + B \times A + B \times B\\ &= A^2 + AB + BA + B^2\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}& (A+B)^2 = A^2 + 2.AB + B^2\\ \iff\ & A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2.AB + B^2\\ \underset{-A^2-B^2}{\iff}\ & A^2 + AB + BA + B^2 - A^2 - B^2 = A^2 + 2.AB + B^2 - A^2 - B^2\\ \iff\ & AB + BA = 2.AB\\ \underset{-AB}{\iff}\ & AB + BA - AB = 2.AB - AB\\ \iff\ & BA = AB\\ \iff\ & A \text{ et } B \text{ commutent}\end{aligned}$$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$,

$$(A+B)^2 = A^2 + 2.AB + B^2 \iff A \text{ et } B \text{ commutent}$$

Ainsi la formule du binôme donnant le développement de $(A+B)^n$ n'est pas vérifiée dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ lorsque A et B ne commutent pas. Il s'avère qu'elle l'est lorsque A et B commutent :

Théorème

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Remarque. On étend la notation $\sum$ aux matrices ; les propriétés algébriques d'une somme (linéarité, changement d'indice, décrochage, télescopage) restent vraies.

Démonstration. Elles est demeure identique à celle effectuée dans $\mathbb{K}$ (par récurrence et en appliquant la relation de Pascal, cf. Chapitre "Somme, produit, Identités remarquables"), dès que l'on a remarqué que si A et B commutent alors toute puissance de A commute avec toute puissance de B (propriété 5). ■

Exemple. Déterminons pour tout $n \in \mathbb{N}$ les coefficients de A^n lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A = I_3 + B$. Or I_3 et B commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme pour développer $A^n = (I_3 + B)^n$. Déterminons les puissance de I_3 et de B :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_3^n = I_3$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall n \geq 3,\ B^n = O_3$$

Comme elles sont particulièrement simples, on peut simplifier le développement donné par la formule du binôme pour obtenir les coefficients de A^n :

$$\begin{aligned}
A^n = (I_3 + B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k && \text{car } I_3^{n-k} = I_3 \\
&= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} B^k}_{=O_3} && \text{Décrochage} \\
&= 1.I_3 + n.B + \frac{n(n-1)}{2}.B^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 3. Appliquer le même argument pour calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les coefficients de A^n lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A = I_3 + C$. Déterminons les puissance de I_3 et de C :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_3^n = I_3$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall n \geq 3, \ \ C^n = O_3$$

Or I_3 et C commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme pour développer $A^n = (I_3 + C)^n$:

$$A^n = (I_3 + C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} C^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k \qquad \text{car } I_3^{n-k} = I_3$$

$$= \binom{n}{0} C^0 + \binom{n}{1} C^1 + \binom{n}{2} C^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} C^k}_{=O_3} \qquad \text{Décrochage}$$

$$= 1.I_3 + n.C + \frac{n(n-1)}{2}.C^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. En déduire les expressions en fonction de n de x_n, y_n, z_n où (x_n), (y_n), (z_n) sont les suites définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = \qquad\quad y_n + z_n \\ z_{n+1} = \qquad\qquad\quad z_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x_0 = y_0 = z_0 = 1$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $X_{n+1} = A \times X_n$ et par une récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \times X_0$:

(I) Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $X_0 = I_3 \times X_0$.

(H) Si $X_n = A^n \times X_0$ alors :

$$X_{n+1} = A \times X_n \underset{(HR)}{=} A \times A^n \times X_0 = A^{n+1} \times X_0.$$

D'après le calcul de A^n effectué dans l'exercice précédent, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = 1 + n + \frac{n(n+1)}{2} \qquad ; \qquad y_n = 1 + n \qquad ; \qquad z_n = 1.$$

Les matrices inversibles

Définition

Une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ tel que :

$$AB = BA = I_p.$$

Dans ce cas la matrice B peut se noter A^{-1} et est appelée l'inverse de A.

Propriété

L'inverse d'une matrice A, lorsqu'elle existe, est unique.

Démonstration. Soient B et C deux inverses de la matrice A ; *i.e.* $AB = AC = BA = CA = I_p$. Alors :

$$\begin{aligned}
& AB = AC & \\
\Longrightarrow\ & B(AB) = B(AC) & \text{en multipliant à gauche par } B \\
\Longrightarrow\ & (BA)B = (BA)C & \text{par associativité} \\
\Longrightarrow\ & I_pB = I_pC & \text{car } BA = I_p \\
\Longrightarrow\ & B = C &
\end{aligned}$$

D'où l'unicité. ■

Remarque. Clairement, si A est inversible, A^{-1} aussi et A est l'inverse de A^{-1}.

Si A est inversible, son inverse A^{-1} l'est aussi et

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

Exemples.

- $I_p^{-1} = I_p$; la matrice identité est son propre inverse, puisque $I_p \times I_p = I_p$.
- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; A et B sont inverses l'une de l'autre.
- Toute matrice carrée n'est pas inversible !

Exemple : la matrice nulle n'est pas inversible, puisque pour tout $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $O_p \times A = O_p$. Ce n'est pas la seule : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, n'est pas inversible puisque si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \neq I_2$. On peut trouver beaucoup d'autre exemples.

Remarque. En général, pour des matrices $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

Exemple : puisque la multiplication matricielle n'est pas intègre, il existe A et B deux matrices non nulles de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ tel que $A \times B = O_p$. Ainsi :

$$A \times B = O_p = A \times O_p \quad \text{et} \quad B \neq O_p.$$

Par contre, lorsque $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible et $B, C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}
& AB = AC \\
\Longrightarrow\ & A^{-1} \times (AB) = A^{-1} \times (AC) \\
\Longrightarrow\ & (A^{-1}A) \times B = (A^{-1}A) \times C \\
\Longrightarrow\ & I_p \times B = I_p \times C \\
\Longrightarrow\ & B = C
\end{aligned}$$

Ainsi lorsque A est inversible, $AB = AC \implies B = C$.

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice inversible ; alors :

- $\forall (B, C) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2, \quad AB = AC \implies B = C.$
- $\forall (B, C) \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})^2, \quad BA = CA \implies B = C.$

Étudions la stabilité de l'inversibilité par les opérations matricielles.

Propriété

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, la matrice $\lambda.A$ est inversible et :

$$(\lambda.A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}.A^{-1}.$$

Démonstration. En effet :

$$\lambda.A \times \frac{1}{\lambda}.A^{-1} = (\lambda \times \frac{1}{\lambda}).(AA^{-1}) = 1.I_p = I_p$$
$$\frac{1}{\lambda}.A^{-1} \times \lambda.A = (\frac{1}{\lambda} \times \lambda).(A^{-1}A) = 1.I_p = I_p$$

■

La somme de deux matrices inversibles n'est en général pas inversible.
Exemple : I_p et $(-I_p)$ sont inversibles, tandis que $I_p + (-I_p) = O_p$ n'est pas inversible.

Par contre produit et puissances de matrices inversibles sont aussi inversible :

Propriété

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ inversibles. Alors :

- *Leur produit $A \times B$ est aussi inversible et :*

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est inversible et :*

$$(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$$

Démonstration.

- Inversibilité d'un produit de matrices inversibles :

$$\left.\begin{array}{r} AB \times B^{-1}A^{-1} = A \times I_p \times A^{-1} = A \times A^{-1} = I_p \\ B^{-1}A^{-1} \times AB = B^{-1} \times I_p \times B = B^{-1} \times B = I_p \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} AB \text{ est inversible} \\ \text{et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{array}$$

- Inversibilité d'une puissance de matrice inversible :

Soit A une matrice inversible. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que A^n est inversible et que $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$.

(I) Pour $n = 0$, $A^n = I_p$ est inversible, d'inverse $I_p = (A^{-1})^n$; l'assertion est vérifiée.

(H) Supposons l'assertion vérifiée au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors $A^{n+1} = A \times A^n$ est inversible comme produit de matrices inversibles, d'inverse

$$(A^n)^{-1} \times A^{-1} \underset{HR}{=} \left(A^{-1}\right)^n \times A^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n+1}$$

L'assertion reste donc vraie au rang $n + 1$. ∎

Par définition une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ tel que $A \times B = B \times A = I_p$; il s'avère qu'il suffit en fait de vérifier une seule des deux égalités $AB = I_p$ ou $BA = I_p$; l'autre sera alors automatiquement vérifiée. Cependant ce résultat très utile est assez difficile et technique à démontrer avec les seuls outils dont nous disposons pour l'instant. Aussi nous repoussons la démonstration au chapitre "Applications linéaires" où les matrices seront interprétées sous un nouvel angle.

Propriété

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$; alors :

$$B = A^{-1} \iff AB = I_p \iff BA = I_p.$$

Démonstration. Voir Chapitre "Applications linéaires". ■

Exercice 6. Calcul de l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur.

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que $A^2 - A = 2.I_2$.

2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

1) Calcul de A^2 :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A^2 \end{array}$$

Ainsi :

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.I_2$$

On a :

$$\begin{aligned} A^2 - A = 2.I_2 &\iff A \times (A - I_2) = 2.I_2 \\ &\iff A \times \frac{1}{2}.(A - 2.I_2) = I_2 \\ &\iff A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{2}.(A - 2.I_2) = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$