Les matrices
Partie 2

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Transposée d'une matrice

Dans cette partie les matrices ne sont pas nécessairement carrées ; p et q désignent deux entiers strictement positifs.

Définition

Soit A une matrice de type (p,q) ; la matrice transposée de A, ,notée ${}^tA$, est la matrice de type (q,p) dont les coefficient sont :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!],\ \ ({}^tA)_{i,j}=A_{j,i}$$

Remarque. C'est à dire que :

– la ligne i de ${}^tA$ est la colonne i de A,

– la colonne j de ${}^tA$ est la ligne j de A.

Exemples.

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K}) \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K})$$
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{K}) \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{K})$$
- $${}^tI_p = I_p.$$

Propriétés de la transposée

Propriété

Soient A et B deux matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- $$^t(^tA) = A$$
- *Si la somme $A + B$ est bien définie, alors $^tA + {}^tB$ est bien définie et :*
$$^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$
- *Si le produit $A \times B$ est bien défini, alors $^tB \times {}^tA$ est bien défini et :*
$$^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$$

• *Si A est une matrice carrée :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left({}^tA\right)^n = {}^t\left(A^n\right)$$

• *Si A est une matrice inversible :*

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

Démonstration. On les démontre dans l'ordre :

• Soit A de type (p,q), alors ${}^tA$ est de type (q,p) et ${}^t\left({}^tA\right)$ est de type (p,q) : A et ${}^t\left({}^tA\right)$ ont même type. De plus soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$\left({}^t\left({}^tA\right)\right)_{i,j} = \left({}^tA\right)_{j,i} = A_{i,j}$$

Ainsi ${}^t\left({}^tA\right) = A$.

• Soient A et B de même type (p,q) de sorte que $A+B$ est défini. Alors ${}^tA$ et ${}^tB$ sont de type (q,p) donc ${}^tA+{}^tB$ est bien défini ; ${}^t(A+B)$ et ${}^tA+{}^tB$ sont de même type (q,p). De plus, soit $(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!]$:

$$\left({}^t(A+B)\right)_{i,j}=(A+B)_{j,i}=A_{j,i}+B_{j,i}={}^tA_{i,j}+{}^tB_{i,j}.$$

Donc ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$.

• Soient A de type (p,q) et B de type (q,r) de sorte que $A\times B$ soit défini et de type (p,r). Alors ${}^tB$ est de type (r,q), ${}^tA$ est de type (q,p), ainsi ${}^tB\times{}^tA$ est défini et de type (r,p) tout comme ${}^t(A\times B)$. Soit $(i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,p]\!]$:

$$\begin{aligned}\left({}^t(A\times B)\right)_{i,j}&=(A\times B)_{j,i}\\&=\sum_{k=1}^{q}A_{j,k}\times B_{k,i}=\sum_{k=1}^{q}{}^tA_{k,j}\times{}^tB_{i,k}=\sum_{k=1}^{q}{}^tB_{i,k}\times{}^tA_{k,j}=\left({}^tB\times{}^tA\right)_{i,j}\end{aligned}$$

Donc ${}^t(A\times B)={}^tB\times{}^tA$.

• Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left({}^{t}A\right)^{n} = {}^{t}\left(A^{n}\right)$.

Puisque A est carrée, il en est de même de sa transposée ${}^{t}A$.

(I) Pour $n = 0$, $\left({}^{t}A\right)^{n} = I_p$ et ${}^{t}\left(A^{n}\right) = {}^{t}I_p = I_p$. L'assertion est donc vraie.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang n. En appliquant la transposée d'un produit :

$$\left({}^{t}A\right)^{n+1} = \left({}^{t}A\right)^{n} \times {}^{t}A = {}^{t}\left(A \times A^{n}\right) = {}^{t}\left(A^{n+1}\right)$$

Ainsi l'assertion reste vraie au rang $(n+1)$.

• En appliquant la transposée d'un produit :

$$\begin{aligned} {}^{t}A \times {}^{t}\left(A^{-1}\right) &= {}^{t}\left(A^{-1} \times A\right) = {}^{t}I_p = I_p \\ {}^{t}\left(A^{-1}\right) \times {}^{t}A &= {}^{t}\left(A \times A^{-1}\right) = {}^{t}I_p = I_p \end{aligned}$$

Ainsi ${}^{t}\left(A^{-1}\right) = \left({}^{t}A\right)^{-1}$. ■

Remarque. En appliquant plusieurs fois la transposée d'un produit :

$$^t(A \times B \times C) = {}^t((A \times B) \times C) = {}^tC \times {}^t(A \times B) = {}^tC \times {}^tB \times {}^tA$$

$$^t(A \times B \times C \times D) = {}^t((A \times B \times C) \times D) = {}^tD \times {}^t(A \times B \times C) = {}^tD \times {}^tC \times {}^tB \times {}^tA$$

etc...

Matrices remarquables

Dans cette partie toutes les matrices sont carrées d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$.

Nous passons en revue certains types de matrices remarquables vérifiant des propriétés qui simplifient leur manipulation :

1. Matrices scalaires
2. Matrices diagonales
3. Matrices triangulaires
4. Matrices symétriques

Matrices scalaires

Définition

Une matrice scalaire d'ordre p est une matrice de la forme $\lambda.I_p$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda.I_p = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Remarque. Multiplier une matrice A par la matrice scalaire $\lambda.I_p$ revient à multiplier A par le scalaire λ :

$$(\lambda.I_p) \times A = \lambda.(I_p \times A) = \lambda.A$$
$$A \times (\lambda.I_p) = \lambda.(A \times I_p) = \lambda.A$$

En particulier :

Propriété

Une matrice scalaire commute avec toute matrice carrée de même ordre.

Les opérations entre matrices scalaires sont particulièrement simples puisqu'elles reviennent à opérer sur les scalaires :

Propriété

• *Somme, produit, puissances de matrices scalaires sont des matrices scalaires et :*

$$\lambda.I_p + \mu.I_p = (\lambda + \mu).I_p \quad ; \quad \lambda.I_p \times \mu.I_p = (\lambda \times \mu).I_p \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, (\lambda.I_p)^n = \lambda^n.I_p$$

• *Une matrice scalaire $\lambda.I_p$ est inversible si et seulement si λ est inversible (i.e. $\lambda \neq 0$), et dans ce cas :*

$$(\lambda.I_p)^{-1} = \frac{1}{\lambda}.I_p$$

Démonstration. Elle est immédiate. ■

Matrices diagonales

Définition

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les coefficients non diagonaux sont nuls :

$$A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \text{ est diagonale si } \forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \implies A_{i,j} = 0$$

On note alors :

$$A = Diag(A_{1,1}, A_{2,2}, \dots, A_{p,p}) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

Remarques.

• Ainsi toute matrice scalaire est diagonale. La réciproque est fausse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonale et non scalaire.

• Le calcul du produit d'une matrice par une matrice diagonale est simple à calculer :

– Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ à gauche par $D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ revient à multiplier chaque ligne i de la matrice A par le scalaire λ_i :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.a_{1,1} & \lambda_1.a_{1,2} & \cdots & \lambda_1.a_{1,q} \\ \lambda_2.a_{2,1} & \lambda_2.a_{2,2} & \cdots & \lambda_2.a_{2,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_p.a_{p,1} & \lambda_p.a_{p,2} & \cdots & \lambda_p.a_{p,q} \end{pmatrix}$$

En effet :

$$(D \times A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} D_{i,k} \times a_{k,j} = D_{i,i} \times a_{i,j} = \lambda_i \times a_{i,j}$$

– Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ à droite par $D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ revient à multiplier chaque colonne i de la matrice A par le scalaire λ_i :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.a_{1,1} & \lambda_2.a_{1,2} & \cdots & \lambda_p.a_{1,p} \\ \lambda_1.a_{2,1} & \lambda_2.a_{2,2} & \cdots & \lambda_p.a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1.a_{q,1} & \lambda_2.a_{q,2} & \cdots & \lambda_p.a_{q,p} \end{pmatrix}$$

En effet :

$$(A \times D)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times D_{k,j} = a_{i,j} \times D_{j,j} = a_{i,j} \times \lambda_j$$

Entre des matrices diagonales toutes les opérations se font terme à terme ; cela rend leur calcul très simple :

Propriété

Pour des matrices diagonales de même ordre p :

- *La somme de matrices diagonales est diagonale :*

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p) + Diag(b_1, b_2, \dots, b_p) = Diag((a_1+b_1), (a_2+b_2), \dots, (a_p+b_p))$$

- *Le produit de matrices diagonales est diagonal :*

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p) \times Diag(b_1, b_2, \dots, b_p) = Diag((a_1 \times b_1), (a_2 \times b_2), \dots, (a_p \times b_p))$$

- *Une puissance de matrice diagonale est diagonale :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ Diag(a_1, a_2, \dots, a_p)^n = Diag(a_1^n, a_2^n, \dots, a_p^n)$$

- *Une matrice diagonale est inversible si set seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls ; dans ce cas :*

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p)^{-1} = Diag\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_p}\right)$$

Démonstration. Le premier point découle immédiatement de la définition de l'addition de matrices.

Le deuxième point découle immédiatement de la remarque ci-dessus.

Le troisième point s'en déduit par récurrence sur n.

Pour le quatrième point il découle du deuxième que si les a_i sont tous non nuls :

$$Diag(a_1, a_2, \ldots, a_p) \times Diag\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_p}\right) = Diag\left(\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \ldots, \frac{a_p}{a_p}\right) = I_p$$

Montrons que si $A = Diag(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est inversible alors tous les a_i sont non nuls. Par contraposée : supposons que l'un des a_i soit nul. Alors pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $A \times M$ n'a que des zéros sur sa ligne i, et ne peut donc pas être égal à I_p. Ainsi A n'est pas inversible. ∎

Remarque. Toutes les matrices diagonales de même ordre commutent entre-elles.

Exercice Soit $\alpha \neq \beta$; déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice diagonale $Diag(\alpha, \beta)$.

Posons : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$AM = \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha \\ c\beta & d\beta \end{pmatrix} \qquad MA = \begin{pmatrix} a\alpha & b\beta \\ c\alpha & d\beta \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow AM = MA \iff \begin{cases} b\alpha = b\beta \\ c\alpha = c\beta \end{cases} \iff \begin{cases} b(\alpha - \beta) = 0 \\ c(\alpha - \beta) = 0 \end{cases} \underset{\alpha \neq \beta}{\iff} \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc les matrices qui commutent avec $Diag(\alpha, \beta)$ sont précisément les matrices diagonales.

Les matrices triangulaires

Définition

Une matrice carrée A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si :

$$i > j \text{ (respectivement } i < j) \implies A_{i,j} = 0$$

Une matrice triangulaire supérieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,p} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire inférieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{p,1} & \cdots & \cdots & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

Exemples.

• Les matrices diagonales sont les seules matrices qui sont à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures.

• La transposée d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est triangulaire inférieure (resp. supérieure).

Propriété

Pour des matrices triangulaires de mêmes ordres :

• *La somme de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).*

• *Le produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure). De plus ses coefficients diagonaux s'obtiennent en faisant le produit terme à terme.*

• *Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas son inverse est aussi triangulaire supérieure (resp. inférieure).*

Démonstration. Elles sont menées pour les matrices triangulaires supérieures. En transposant on les déduit pour les triangulaires inférieures.

Considérons A et B deux matrices triangulaires supérieures d'ordre p et $(i,j) \in [[1,p]]^2$.

• Si $i > j$ alors $A_{i,j} = B_{i,j} = 0$ et donc $A_{i,j} + B_{i,j} = 0$; ainsi $i > j \implies (A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} = 0$. Donc $A+B$ est triangulaire supérieure.

• Par la formule du produit matriciel :

$$(A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}$$

$$\text{si } i > j \text{ alors } (A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} \times B_{k,j} + \sum_{k=i}^{p} A_{i,k} \times \underbrace{B_{k,j}}_{=0} = 0$$

donc $A \times B$ est triangulaire supérieure

$$\text{si } i=j \text{ alors } (A\times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} \times B_{k,j} + A_{i,i}\times B_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{p} A_{i,k}\times \underbrace{B_{k,j}}_{=0}$$
$$= A_{i,i}\times B_{i,i}$$

et donc le terme diagonal ligne i colonne i de $A\times B$ est le produit des termes diagonaux ligne i colonne i de A et B.

• Quant à l'inversibilité d'une matrice triangulaire supérieure, on repousse la démonstration à §6.5 (page 34). ■

Définition

Une matrice carrée A est dite symétrique si elle est égale à sa transposée :

$$ {}^tA = A $$

Autrement dit, une matrice symétrique est une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_{p-1,p} \\ A_{1,p} & \cdots & A_{p-1,p} & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

Exemples.

• Les matrices I_p et O_p sont symétriques ; plus généralement, toute matrice scalaire, toute matrice diagonale est symétrique.

- La matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

est symétrique et non diagonale.

Exercice Soit A une matrices carrée.

1) Montrer que la matrice $A + {}^tA$ est symétrique.

2) Montrer que la matrice $A \times {}^tA$ est symétrique.

1) Découle de :

$${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA.$$

2) Découle de :

$${}^t\left(A \times {}^tA\right) = {}^t\left({}^tA\right) \times {}^tA = A \times {}^tA$$

Propriété

- *La somme de matrices symétriques est symétrique.*
- *Une puissance de matrice symétrique est symétrique.*
- *L'inverse d'une matrice symétrique inversible est symétrique.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices symétriques d'ordre p.

- Puisque ${}^tA = A$ et ${}^tB = B$:

$$ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A + B $$

donc $(A+B)$ est symétrique.

- Puisque ${}^tA = A$; soit $n \in \mathbb{N}$:

$$ {}^t(A^n) = \left({}^tA\right)^n = A^n $$

donc A^n est symétrique.

- Soit A une matrice symétrique et inversible ; puisque ${}^tA = A$:

$$ {}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1} = A^{-1} $$

Donc l'inverse A^{-1} de A est symétrique. ■

Remarque. Attention, le produit de matrices symétriques n'est pas en général une matrice symétrique.

Exemple : soient les marices symétriques A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

leur produit $A \times B$ n'est pas symétrique.

Exercice Soient A et B deux matrices symétriques. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $A \times B$ soit une matrice symétrique.

$$^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA = B \times A$$

Donc $A \times B$ est symétrique si et seulement si $B \times A = A \times B$, c'est à dire si et seulement si les matrices A et B commutent.