Les matrices
Partie 3

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Écriture matricielle d'une système linéaire

Étant donné un système de n équations linéaires à p inconnues (avec $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$) et à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$$

on pose :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$\text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

alors le produit AX est la matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$$

et le système (S) est équivalent à l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$(S) \iff AX = B$$

C'est l'écriture matricielle du système. La matrice A est la matrice associée au système linéaire.

Exemple.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Structure des solutions

Définition

Étant donné le système (S) d'écriture matricielle $AX = B$, le système homogène associé est le système d'écriture matricielle $AX = O_{n,1}$, c'est à dire :

$$(S_H)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

Remarque. Un système homogène est toujours compatible puisque $X = O_{p,1}$ en est solution : $A \times O_{p,1} = O_{n,1}$.

Théorème

Les solutions du système (S) sont sommes d'une solution particulière de (S) et des solutions générales du système homogène associé.

Démonstration. Soit X_p une solution particulière de (S) : $A \times X_p = B$. Alors X est solution de (S) ssi :

$$AX = B \iff AX - AX_p = B - B \iff A \times (X - X_p) = O_{n,1}$$

et donc si et seulement si $(X - X_p)$ est solution du système homogène associé, c'est à dire si set seulement si X est somme de X_p et d'une solution du système homogène associé. ■

Théorème

Un système linéaire admet 0, 1, ou une infinité de solutions.

Démonstration. Le système homogène associé (S_H) est compatible est admet donc au moins une solution (il suffit de considérer une matrice colonne nulle). Montrons que si (S_H) admet une deuxième solution $X_1 \neq O_{p,1}$, alors il en admet une infinité ; en effet :

$$A \times X_1 = O_{n,1} \implies \forall \lambda \in \mathbb{K}, A \times (\lambda.X_1) = \lambda.(A \times X_1) = \lambda.O_{n,1} = O_{n,1}$$

ainsi chaque valeur de $\lambda \in \mathbb{K}$ donne une nouvelle solution $\lambda.X_1$ de (S_H), puisque $X_1 \neq O_{p,1}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \lambda_1.X_1 \neq \lambda_2.X_1$. Le système (S_H) admet donc une seule ou une infinité de solutions.

D'après le théorème précédent, si (S) admet une solution, alors il en admet une seule ou une infinité. ■

Remarque. Si l'existence de solutions dépend de B, l'unicité ne dépend que de la matrice associée au système.

Interprétation matricielle des opérations élémentaires

Définition

Étant donnée une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dont on note les lignes $L_1, L_2, \ldots, L_n$; $L_i = (A_{i,j})_{1 \leq j \leq p}$. On considère les opérations élémentaires sur ses lignes, qui la transforment en une matrice de même type :

– $L_i \leftrightarrow L_j$: *échange des lignes L_i et L_j.*

– $L_i \leftarrow \lambda L_i$: *multiplier la ligne L_i par un scalaire $\lambda \neq 0$.*

– $L_i \leftarrow L_i + L_j$: *ajouter la ligne L_i à la ligne L_j avec $i \neq j$.*

Propriété

Appliquer à la matrice A la transformation :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *revient à multiplier à gauche par :*

$$M_n(i,\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

$M_n(i,\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

• $L_i \leftrightarrow L_j$ *revient à multiplier à gauche par :*

$$E_n(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

$E_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.

- *$L_i \leftarrow L_i + L_j$ revient à multiplier à gauche par :*

$$T_n(i,j) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

$T_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$.

De plus les matrices $M_n(i,\lambda)$, $E_n(i,j)$ et $T_n(i,j)$ sont inversibles.

Démonstration. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$M_n(i,\lambda) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $M_n(i,\lambda)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\quad L_1 \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_i \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_n \quad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad L_1 \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad \lambda L_i \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_n \quad} \end{pmatrix}$$

Ainsi lorsque $\lambda \neq 0$ appliquer à une matrice l'opération $L_i \leftarrow \lambda.L_i$ suivie de l'opération $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda}.L_i$ ne change rien à cette matrice. En particulier en les appliquant à la matrice identité :

$$M_n(i, \frac{1}{\lambda}) \times M_n(i, \lambda) \times I_n = I_n \implies M_n(i, \frac{1}{\lambda}) \times M_n(i, \lambda) = I_n \implies M_n(i, \frac{1}{\lambda}) = M_n(i, \lambda)^{-1}$$

Ainsi la matrice $M_n(i, \lambda)$ est inversible dès que $\lambda \neq 0$, d'inverse $M_n(i, \frac{1}{\lambda})$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$E_n(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.

Multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $E_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_i \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_i \quad} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Or appliquer deux fois l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ à une matrice A ne change pas cette matrice. En particulier lorsque $A = I_n$:

$$E_n(i,j) \times E_n(i,j) \times I_n = I_n \implies E_n(i,j) \times E_n(i,j) = I_n \implies E_n(i,j) = E_n(i,j)^{-1}.$$

Ainsi la matrice $E_n(i,j)$ est inversible et a pour inverse elle-même.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$T_n(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \\ \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \text{et } T'_n(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \\ \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$T_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$; $T'_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_j$.

Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $T_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_i \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_i + L_j \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

et de même multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $T'_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_j$ à la matrice A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_i \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_i - L_j \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Or appliquer à une matrice A l'opération $L_i \leftrightarrow L_i + L_j$ suivie de $L_i \leftarrow L_i - L_j$ ne change pas cette matrice. En particulier lorsque $A = I_n$:

$$T'_n(i,j) \times T_n(i,j) \times I_n = I_n \implies T'_n(i,j) \times T_n(i,j) = I_n \implies T'_n(i,j) = T_n(i,j)^{-1}.$$

Ainsi la matrice $T_n(i,j)$ est inversible et a pour inverse $T'_n(i,j)$. ■

Corollaire

Appliquer membre à membre une opération élémentaire à une équation matricielle $AX = B$, la change en une équation équivalente (c'est à dire ayant mêmes solutions).

Démonstration. Appliquer une opération élémentaire revient à multiplier les deux membres de l'égalité par une matrice M inversible avec $M = M_n(i, \lambda)$, $E_n(i,j)$ ou $T_n(i,j)$. Ainsi :

$$AX = B \underset{M\times}{\Longrightarrow} MAX = MB$$

$$MAX = MB \underset{M^{-1}\times}{\Longrightarrow} M^{-1}MAX = M^{-1}MB \Longrightarrow I_nAX = I_nB \Longrightarrow AX = B$$

ainsi $AX = B \iff MAX = MB$ avec $M = M_n(i, \lambda)$, $E_n(i,j)$ ou $T_n(i,j)$. ∎

Remarque. Ainsi, pour la résolution matricielle d'un système, effectuer une opération élémentaire <u>simultanément</u> sur la matrice du système et sur la matrice colonne des seconds membres transforme le système en un système équivalent.

Si la suite des opérations élémentaires s'effectue selon la méthode du pivot de Gauss, on parle de résolution (matricielle) par pivot de Gauss.

Exemple. Résolution matricielle par pivot de Gauss du système :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y-z=-1 \end{cases}$$

On le retranscrit à l'aide d'une matrice 3×4 ; une ligne verticale sépare la matrice des coefficients de la matrice second membre :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow -\frac{1}{5}L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1-L_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1-L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Définition

Un système linéaire de n équations à n inconnues est dit <u>de Cramer</u> si il admet une unique solution.

Remarque. Pour un système de Cramer, la résolution peut se mener par la méthode du pivot de Gauss en appliquant des opérations élémentaires jusqu'à aboutir à un système équivalent dont la matrice associée est la matrice identité.

Théorème

Un système linéaire de n équations à n inconnues est de Cramer si et seulement si sa matrice associée est inversible.

Dans ce cas, la solution du système $AX = B$ d'inconnue X est $X = A^{-1}B$.

Démonstration. Soit $AX = B$ l'écriture matricielle du système avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $X, B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A est inversible :

$$AX = B \underset{A^{-1}\times}{\Longrightarrow} A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow I_nX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Donc il existe une unique solution.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si le système admet une solution unique, alors en appliquant le pivot de Gauss, une suite d'opérations élémentaires transforme l'équation $AX = B$ en une équation équivalente de la forme $X = C$; c'est à dire qu'appliquée à la matrice A du système cette suite d'opérations élémentaires transforme A en la matrice identité I_n et appliquée à la matrice colonne B elle la transforme en la matrice colonne C, pour finalement aboutir à l'équation $I_nX = C$.

D'après la propriété 3 en considérant la suite de matrices inversibles $M_1, M_2, \ldots, M_t$ correspondant à cette suite d'opérations élémentaires, on a :

$$M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \times A = I_n$$

Donc la matrice A est inversible et a pour inverse :

$$A^{-1} = M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1.$$

■

Remarque. En particulier, pour un système linéaire de n équations à n inconnues, être de Cramer ne dépend que de la matrice associée au système ; ça ne dépend pas des seconds membres.

Application à l'inversion de matrice

Le théorème précédent (théorème 5) fournit une méthode pour déterminer si une matrice A est inversible et calculer son inverse :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; posons :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad ; \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

et considérons le système d'inconnue X et de paramètres Y :

$$(S) \quad AX = Y \iff \left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = y_n \end{array} \right. \qquad \vdots$$

On applique la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système *on aboutit :*

- *Soit à une système qui n'est pas de Cramer (lorsque le système réduit obtenu n'est pas triangulaire). Dans ce cas la matrice A n'est pas inversible.*
- *Soit à une solution unique ; dans ce cas A est inversible et :*

$$X = A^{-1}Y \quad \text{soit :} \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}\cdot y_1 + \alpha_{12}\cdot y_2 + \cdots + \alpha_{1n}\cdot y_n \\ x_2 = \alpha_{21}\cdot y_1 + \alpha_{22}\cdot y_2 + \cdots + \alpha_{2n}\cdot y_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n = \alpha_{n1}\cdot y_1 + \alpha_{n2}\cdot y_2 + \cdots + \alpha_{nn}\cdot y_n \end{cases}$$

Les coefficients apparaissant au second membre sont ceux de la matrice A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple. Déterminer l'inversibilité des matrices suivantes et le cas échéant calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

• Inversibilité de A ; on résout le système d'inconnues (x, y, z) et de paramètres (a, b, c) :

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=a \\ 2x+y+z=b \\ x+y+2z=c \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} x+2y+z & =a \\ -3y-z & =-2a+b \\ -y+z & =-a+c \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow -L_3 \\ L_2\leftrightarrow L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} x+2y+z & =a \\ y-z & =a-c \\ -3y-z & =-2a+b \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3+3L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} x+2y+z & =a \\ y-z & =a-c \\ -4z & =a+b-3c \end{array}\right.$$

Le système est triangulaire supérieur : A est inversible ; on poursuit la résolution à l'aide d'opérations élémentaires pour calculer A^{-1}.

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4} L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y + z & = a \\ y - z & = a - c \\ z & = \frac{1}{4}(-a - b + 3c) \end{array} \right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y & = \frac{1}{4}(5a + b - 3c) \\ y & = \frac{1}{4}(3a - b - c) \\ z & = \frac{1}{4}(-a - b + 3c) \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rl} x & = \frac{1}{4}(-a + 3b - c) \\ y & = \frac{1}{4}(3a - b - c) \\ z & = \frac{1}{4}(-a - b + 3c) \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

• Inversibilité de B ; on résout le système d'inconnues (x, y, z) et de paramètres (a, b, c) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = a \\ x + 5y + z = b \\ 2x + y + 2z = c \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y + z & = a \\ 3y & = -a + b \\ -3y & = -2a + c \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y + z & = a \\ 3y & = -a + b \\ 0 & = -3a + b + c \end{array} \right.$$

Le système n'admet pas une unique solution. Ainsi la matrice B n'est pas inversible.

• Cette méthode d'inversibilité peut aussi se retranscrire matriciellement par une méthode que certains appellent méthode miroir. On résout le système matriciellement dans une matrice $n \times 2n$:

$$\begin{array}{cc} A & I_n \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

à gauche on place la matrice A à inverser, et à droite on place la matrice identité, plutôt qu'une matrice colonne (c'est la matrice des coefficients des seconds membres $y_1, \ldots, y_n$). Puis on applique la méthode du pivot de Gauss en appliquant des opérations élémentaires jusqu'à ce que la matrice de gauche soit la matrice identité, si possible.

– Si l'application du pivot de Gauss aboutit à gauche à une matrice non inversible, typiquement une matrice triangulaire ayant au moins un zéro sur sa diagonale, alors la matrice A n'est pas inversible.

– Sinon une fois abouti à la matrice identité sur la partie gauche la partie de droite est la matrice inverse recherchée :

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)}$$

$$I_n \qquad\qquad\qquad A^{-1}$$

- *Appliquer la méthode du pivot de Gauss à la matrice :*

$$\begin{array}{c}
\qquad A \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad I_n \\
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}$$

- *si on aboutit à :*

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\
0 & 1 & & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right) \\
\qquad I_n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A^{-1}
\end{array}$$

alors A est inversible et A^{-1} apparait dans la partie droite du tableau.

- *Si l'on ne peut pas parvenir à la matrice identité dans la partie gauche, alors A n'est pas inversible.*

Cette méthode s'interprète aussi de la manière suivante : d'après le théorème 5, A est inversible si et seulement si il existe une suite d'opérations élémentaires permettant de la transformer en la matrice identité. C'est à dire (propriété 3) s'il existe une suite de matrices d'opérations élémentaires $M_1, M_2, \dots, M_t$ telles que :

$$\begin{aligned} & M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \times A = I_n \\ \Longrightarrow\ & A^{-1} = M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \\ \Longrightarrow\ & A^{-1} = M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \times I_n \end{aligned}$$

et donc appliquer la même suite d'opérations élémentaires à la matrice I_n aboutit à la matrice A^{-1}.

Exemple. Déterminer l'inversibilité des matrices suivantes et le cas échéant calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Inversibilité de A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

La partie gauche est triangulaire supérieure sans 0 sur sa diagonale : A est inversible ; on poursuit la résolution pour calculer A^{-1}.

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

- Inversibilité de B :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ La matrice de gauche n'est pas inversible.

Ainsi la matrice B n'est pas inversible.

Exercice Déterminer l'inversibilité, et le cas échéant calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Pour A :

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & = a \\ x-y+z & = b \\ x+3y+z & = c \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} x+y+z & = a \\ -2y & = -a+b \\ 2y & = -a+c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} x+y+z & = a \\ -2y & = -a+b \\ 0 & = -2a+b+c \end{array}\right.$$

A n'est pas inversible.

ou encore par la méthode miroir :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad A \text{ n'est pas inversible.}$$

- Pour B :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y+z & = a \\ x-y+2z & = b \\ x+2y+z & = c \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} x+y+z & = a \\ -2y+z & = -a+b \\ y & = -a+c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} x+y+z & = a \\ y & = -a+c \\ -2y+z & = -a+b \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} x+y+z & = a \\ y & = -a+c \\ z & = -3a+b+2c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} x & = 5a-b-3c \\ y & = -a+c \\ z & = -3a+b+2c \end{array}\right. \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ou encore par la méthode miroir :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Application à l'inversibilité d'une matrice triangulaire

On rappelle que le résultat suivant reste à démontrer (propriété 15) :

> • *Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas son inverse est aussi triangulaire supérieure (resp. inférieure).*

Démonstration. Il suffit d'établir le résultat pour les matrices triangulaire supérieures ; le cas des matrices triangulaires inférieures s'en déduira par transposition.

Soit A une matrice triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Alors A est inversible si et seulement si le système suivant est de Cramer :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &=& y_1 \\ a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &=& y_2 \\ \ddots \qquad\qquad & & \vdots \\ a_{p,p}x_p &=& y_p \end{array}\right.$$

c'est à dire si et seulement si tous les coefficients diagonaux $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{p,p}$ sont non nuls.

Considérons maintenant que A est triangulaire supérieure et inversible ; ainsi :

$$\forall (i,j) \in [[1,p]]^2,\ a_{i,i} \neq 0 \text{ et } i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ l'inverse de A. En particulier :

$$M \times A = I_p$$

Montrons à l'aide d'une récurrence forte que pour tout $n \in [\![1, p]\!]$:

$$\mathscr{P}(n) \ : \ \forall i \in [\![n+1, p]\!], m_{i,n} = 0$$

c'est à dire que pour toute colonne $n \in [\![1, p]\!]$ de M, les coefficients en dessous de la diagonale sont tous nuls, ou autrement dit M est triangulaire supérieure.

(I) Colonne $n = 1$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\begin{aligned}
(M \times A)_{i,1} &= \sum_{k=1}^{p} m_{i,k} \times a_{k,1} \\
&= m_{i,1} \times a_{1,1} + \sum_{k=2}^{p} m_{i,k} \times a_{k,1} && \text{décrochage du premier terme} \\
&= m_{i,1} \times a_{1,1} + \sum_{k=2}^{p} m_{i,k} \times \underbrace{a_{k,1}}_{=0} && \text{car } A \text{ triangulaire supérieure} \\
&= m_{i,1} \times a_{1,1}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$M \times A = \begin{pmatrix} m_{1,1}a_{1,1} & \\ m_{2,1}a_{1,1} & \\ m_{3,1}a_{1,1} & \\ \vdots & \\ m_{p,1}a_{1,1} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} m_{1,1} = a_{1,1}^{-1} \\ m_{2,1} = 0 \\ \vdots \\ m_{p,1} = 0 \end{cases}$$

ainsi pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, $m_{p,1} = 0$: $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

(H) Supposons $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \ldots, \mathscr{P}(n-1)$ vraies. Ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & \cdots & \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & m_{n-1,n-1} & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

Soit $i \in [\![n, p]\!]$,

$$\begin{aligned}(MA)_{i,n} &= \sum_{k=1}^{p} m_{i,k} \times a_{k,n} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{m_{i,k}}_{=0\ (HR)} \times a_{k,n} + m_{i,n} \times a_{n,n} + \sum_{k=n+1}^{p} m_{i,k} \times \underbrace{a_{k,n}}_{=0} \\ &= m_{i,n} \times a_{n,n}\end{aligned}$$

Donc :

$$MA = \left(\begin{array}{cccc|c|} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,n}a_{n,n} & \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & m_{p,n}a_{n,n} & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} m_{n,n} = a_{n,n}^{-1} \\ m_{n+1,n} = 0 \\ m_{n+2,n} = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{p,n} = 0 \end{cases}$$

et donc pour tout $i \in [\![n+1, p]\!]$, $m_{i,n} = 0$: $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Ainsi pour tout $n \in [\![1, p]\!], \forall i \in [\![n+1, p]\!], m_{i,n} = 0$, ou autrement dit $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$:

$$i > j \implies m_{i,j} = 0$$

La matrice M est triangulaire supérieure. ■

Remarque. Comme on le voit dans la preuve, mais comme on pourrait le déduire aussi du produit de matrices symétriques, la matrice inverse d'une matrice triangulaire A a sur sa diagonale les inverses des coefficients diagonaux de A.

Exercice Donner sans calcul l'inverse de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et nécessairement $m + a = 0 \implies m = -a$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas particulier : inversion d'une matrice 2×2

Pour une matrice de type $(2,2)$ une formule simple permet de déterminer si la matrice est inversible et de calculer son inverse.

Définition

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

le <u>déterminant</u> de A est le scalaire :

$$\det(A) = ad - bc$$

L'intérêt de cette notion découle du résultat suivant :

Propriété

Avec les mêmes notations, la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si

$$\det(A) \neq 0.$$

De plus dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration. On est amené à résoudre le système :

$$(S) \quad \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$$

- 1^{er} cas : Si $a \neq 0$.

On applique l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow aL_2 - cL_1$ pour obtenir :

$$(S) \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ (ad - bc)x_2 = -cy_1 + ay_2 \end{cases}$$

Si $\det(A) = ad - bc = 0$ le système n'a pas une solution unique, et la matrice A n'est pas inversible. La conclusion est vérifiée.

Si $\det(A) \neq 0$:

$$(S) \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ x_2 = -\dfrac{c}{ad-bc}y_1 + \dfrac{a}{ad-bc}y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} ax_1 = y_1 + \dfrac{bc}{ad-bc}y_1 - \dfrac{ab}{ad-bc}y_2 \\ x_2 = -\dfrac{c}{ad-bc}y_1 + \dfrac{a}{ad-bc}y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ax_1 = \dfrac{ad}{ad-bc}y_1 - \dfrac{ab}{ad-bc}y_2 \\ x_2 = -\dfrac{c}{ad-bc}y_1 + \dfrac{a}{ad-bc}y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{d}{ad-bc}y_1 - \dfrac{b}{ad-bc}y_2 \\ x_2 = -\dfrac{c}{ad-bc}y_1 + \dfrac{a}{ad-bc}y_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$ la conclusion est vérifiée.

- 2^{eme} cas : Si $a = 0$.

$$(S) \quad \begin{cases} bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$$

Si $b = 0$ ou $c = 0$ le système n'a pas une unique solution, A n'est pas inversible et $\det(A) = ad - bc = 0 - 0 = 0$. La conclusion est vérifiée.

Si $b \neq 0$ et $c \neq 0$ le système est équivalent à :

$$(S) \iff \begin{cases} cx_1 & = -\dfrac{d}{b} y_1 + y_2 \\ x_2 & = \dfrac{y_1}{b} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = -\dfrac{d}{bc} y_1 + \dfrac{1}{c} y_2 \\ x_2 & = \dfrac{y_1}{b} \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire, puisque $a = 0$:

$$\begin{cases} x_1 & = \dfrac{d}{ad - bc} y_1 + \dfrac{-b}{ad - bc} y_2 \\ x_2 & = \dfrac{-c}{ad - bc} y_1 + \dfrac{a}{ad - bc} y_2 \end{cases} \implies A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et ici encore la conclusion est vérifiée. ■

Exercice Soit $m \in \mathbb{C}$; discuter de l'inversibilité de

$$A = \begin{pmatrix} m+2 & 4 \\ -5 & m-2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$

et le cas échéant calculer son inverse.

On calcule son déterminant : $\det(A) = m^2 - 4 + 20 = m^2 + 16$. Ainsi m est inversible si et seulement si $m \neq \pm 4\mathrm{i}$. Dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{m^2+16} \cdot \begin{pmatrix} m-2 & -4 \\ 5 & m+2 \end{pmatrix}$$

Application : formules de Cramer pour un système 2×2

Soit le système :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \gamma \end{cases}$$

Le système est de Cramer si et seulement si sa matrice est inversible si et seulement si :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha d - b\gamma \\ a\gamma - \alpha c \end{pmatrix}$$

On en déduit les formules de Cramer :

Théorème

Si $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$, *le système*

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \gamma \end{cases}$$

a une solution unique donnée par :

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha & b \\ \gamma & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & \alpha \\ c & \gamma \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

Exercice Appliquer ces formules pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} mx - y = m \\ x + my = m \end{cases}$$

de paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Le déterminant associé vaut $m^2 + 1 \neq 0$. Le système admet une solution unique :

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{m^2 + m}{m^2 + 1}, \frac{m^2 - m}{m^2 + 1} \right) \right\}$$

Rang d'une matrice

On rappelle que le rang d'un système ne dépend pas du second membre mais seulement de la matrice associée.

Définition

Le rang d'une matrice A est défini comme le rang de n'importe quel système linéaire de matrice associée A. On le note rang(A).

Bien sûr le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes :

Appliquer une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.

On pourra alors calculer le rang en appliquant des opérations élémentaires jusqu'à l'obtention d'une matrice échelonnée.

Proposition-Définition

Une matrice est dite échelonnée si un système linéaire associée est échelonné, c'est à dire si le nombre de zéros en début de ligne augmente strictement ligne après ligne.

Le premier coefficient non nul sur chaque ligne d'une matrice échelonnée s'appelle un pivot. Le rang de la matrice est égal au nombre de pivots.

Avec le théorème 5, on a le résultat fondamental :

Théorème

Une matrice carrée d'ordre p est inversible si et seulement si son rang est égal à p.

Le calcul du rang permet donc de déterminer si une matrice carrée est inversible ou non.

Pour son calcul il s'avère qu'on peut aussi effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes.

Définition

Une opération élémentaire sur les colonnes d'une matrices peut-être :

- $C_i \leftrightarrow C_j$ *: échanger les colonnes i et j.*
- $C_i \leftarrow \lambda . C_i$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *: multiplier la colonne i par le scalaire λ.*
- $C_i \leftarrow C_i + \mu . C_j$ *avec* $i \neq j$ *et* $\mu \in \mathbb{K}$ *: ajouter à la colonne i la colonne j multipliée par le scalaire μ.*

On admet pour l'instant le résultat suivant. Une preuve figure au Chapitre "Applications linéaires".

Propriété

$$rang({}^tA) = rang(A)$$

Corollaire

Appliquer des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne change pas son rang.

Démonstration. Appliquer une opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice revient à appliquer les opérations analogues sur les lignes de sa transposée avant de prendre la transposée de la matrice obtenue. Puisque le rang de A et de sa transposée sont égaux, et qu'une opération sur les lignes ne change pas le rang, on ne change pas le rang de A. ■

Exercice Calculer le rang des matrices suivantes pour en déduire lesquelles sont inversibles :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\text{rang}(A) = 3$ donc A est inversible.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\text{rang}(B) = 2$ donc B n'est pas inversible.