Sommes, produits
identités remarquables

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Notation somme : $\sum$

$\sum$ est la lettre grecque "Sigma majuscule" et se lit "Somme" dans le contexte de ce cours.

Définition

- *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels ou complexes. On note :*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

la somme des a_i pour i variant de 0 jusqu'à n.

- *Plus généralement, si $p \in [\![0, n]\!]$, on note :*

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

la somme des a_i pour i variant de p jusqu'à n.

- *La variable i s'appelle l'indice de la somme.*

Exemples.

$$\sum_{i=1}^{5} 1 = 1+1+1+1+1 = 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55$$

Remarques.

• La variable i, indice de la somme, est une variable muette : elle ne sert qu'à la définition de la somme, et le résultat ne peut pas en dépendre. Elle peut être remplacée par n'importe quelle autre variable non deja utilisée (on a coutume d'employer $i, j, k, \ldots$) :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{k=p}^{n} a_k$$

• Par convention, lorsque $p > n$:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = 0.$$

Exercice 1. Ecrire les sommes suivantes à l'aide du symbôle $\sum$:

$$A = 2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + 100^5, \qquad B = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + a^{100},$$

$$C = \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^6}{6} + \cdots + \frac{a^{200}}{200}, \qquad D = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + .. + \frac{2^{100}}{101},$$

$$E = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots - \frac{100}{101},$$

$$A = \sum_{i=2}^{100} i^5 \quad ; \quad B = \sum_{i=0}^{100} (-1)^i \times a^i \quad ; \quad C = \sum_{i=1}^{100} \frac{a^{2i}}{2i}$$

$$D = \sum_{i=0}^{100} \frac{2^i}{i+1} \quad ; \quad E = \sum_{i=1}^{100} (-1)^{i+1} \frac{i}{i+1}$$

Linéarité de la somme

Propriété

Soient les suites finies de réels ou complexes $(a_k)_{p \leq k \leq n}$, $(b_k)_{p \leq k \leq n}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$; alors :

$$\sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=p}^{n} (\lambda \times a_k) = \lambda \times \sum_{k=p}^{n} a_k$$

Démonstration. La première découle de l'associativité et de la commutativité de l'addition :

$$\sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k) = (a_p + b_p) + (a_{p+1} + b_{p+1}) + \cdots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n) + (b_p + b_{p+1} + \cdots + b_n) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$$

Propriété

Soient les suites finies de réels ou complexes $(a_k)_{p \leq k \leq n}$, $(b_k)_{p \leq k \leq n}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$; alors :

$$\sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=p}^{n} (\lambda \times a_k) = \lambda \times \sum_{k=p}^{n} a_k$$

Démonstration. La seconde découle de la distributivité de $\times$ sur $+$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} (\lambda \times a_k) &= \lambda \times a_p + \lambda \times a_{p+1} + \cdots + \lambda \times a_n \\ &= \lambda \times (a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n) = \lambda \times \sum_{k=p}^{n} a_k\end{aligned}$$

■

Décrochage

Propriété

Soit une suite finie $(a_k)_{p \leq k \leq n}$ et soit un entier q avec $p \leq q < n$; alors :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k.$$

Démonstration. Cela découle de l'associativité de l'addition :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} a_k &= \underbrace{a_p + \cdots + a_q} + \underbrace{a_{q+1} + \cdots + a_n} \\ &= \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k.\end{aligned}$$

■

Formules de sommes usuelles

Les formules suivantes sont à connaitre :

Somme de constantes. *Soient p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$:*

$$\sum_{i=p}^{n} 1 = (n - p + 1).$$

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$; on procède par récurrence sur l'entier $n \geq p$.

(I) Pour $n = p$: $\sum_{k=p}^{p} 1 = 1 = p - p + 1$.

(H) Supposons que pour $n \geq p$ fixé : $\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$. Alors :

$$\sum_{k=p}^{n+1} 1 = \sum_{k=p}^{n} 1 + \sum_{k=n+1}^{n+1} 1 \underset{(HR)}{=} (n - p + 1) + 1 = (n + 1) - p + 1$$

L'assertion reste vraie au rang $n + 1$. On conclut d'après le principe de récurrence. ∎

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$; calculer :

$$\sum_{i=1}^{n}(2a+1)$$

On applique la linéarité avec la formule ci-dessus :

$$\sum_{i=1}^{n}(2a+1) = (2a+1) \times \sum_{i=1}^{n} 1 = (2a+1) \times n.$$

Somme d'entiers consécutifs. *Soient p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$:*

$$\sum_{k=p}^{n} k = \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nbre de termes}} \times \underbrace{\left(\frac{p+n}{2}\right)}_{\substack{\text{moyenne des}\\ \text{premier et}\\ \text{dernier termes}}}.$$

En particulier :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Appelons $S = \sum_{k=p}^{n} k$ cette somme ; alors :

$$\begin{array}{ccccccccc}
2S & = & p & + & (p+1) & + & \cdots & + & n \\
 & + & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & p \\
 & = & \multicolumn{7}{l}{\underbrace{(p+n) \quad + \quad (p+n) \quad + \quad \cdots \quad + \quad (p+n)}_{(n-p+1) \text{ termes}}} \\
 & = & (p+n) & \times & (n-p+1) & & & &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow S = (n-p+1) \times \frac{p+n}{2}$$

■

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \qquad ; \qquad \sum_{k=p}^{n}(2k-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2 \times \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$$

$$\sum_{k=p}^{n}(2k-1) = 2 \times \sum_{k=p}^{n} k - \sum_{k=p}^{n} 1 = 2 \times \frac{(n-p+1)(n+p)}{2} - (n-p+1)$$

$$= (n-p+1)(n+p-1) = n^2 - (p-1)^2$$

Somme des carrés.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(I) Pour $n = 0$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. L'assertion est donc vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^2 \\ &\underset{(HR)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \times \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right)\end{aligned}$$

$$= (n+1) \times \left(\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \right)$$
$$= (n+1) \times \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right)$$

Or :

$$((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

L'assertion reste vraie au rang $(n+1)$. On conclut à l'aide du principe de récurrence.

$\blacksquare$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} 4k^2 - 4k + 1 \\
&= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= n(n+1) \times \frac{2(2n+1)-6}{3} + n \\
&= n(n+1) \times \frac{4n-4}{3} + n \\
&= \frac{4n}{3} \times (n+1)(n-1) + n \\
&= \frac{4n^3}{3} - \frac{4n}{3} + n = \boxed{\frac{4n^3 - n}{3}}
\end{aligned}$$

Somme des cubes.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(I) Pour $n = 0$. $\sum_{k=1}^{0} k^3 = 0 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. L'assertion est vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \times \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2 \times \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\
&= (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

L'assertion reste donc vraie au rang $(n+1)$. On conclut à l'aide du principe de récurrence. ∎

Somme des puissances successives.

Soit $q \in \mathbb{C}$ et $p \leq n$ deux entiers naturels ; alors :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} q^p \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ n - p + 1 & si\ q = 1 \end{cases}$$

En particulier :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ n + 1 & si\ q = 1 \end{cases}$$

Démonstration. On considère deux cas, selon que $q = 1$ ou $q \neq 1$.

- Si $q = 1$. Alors $\forall k \in [\![p, n]\!]$, $q^k = 1$, ainsi :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1.$$

- Dans la suite $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geq p$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$.

(I) Pour $n = p$; $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p$ et $q^p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = q^p \times \dfrac{1-q}{1-q} = q^p$. Donc l'assertion est vraie au rang p.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \geq p$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} q^k &= \sum_{k=p}^{n} q^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} q^k \underset{HR}{=} q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} = \frac{q^p - q^{n+2}}{1-q} \\
&= q^p \times \frac{1-q^{n+2-p}}{1-q} = q^p \times \frac{1-q^{(n+1)-p+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

Ainsi l'assertion reste vraie au rang $n+1$. On conclut à l'aide du principe de récurrence. ■

Remarques.

• La formule peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = (\mathit{1^{er}\ terme}) \times \frac{1-q^{(\text{nombre de termes})}}{1-q}.$$

• En particulier pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ u_k = u_0 \times q^k.$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{n} u_0 \times q^k = u_0 \times \sum_{k=p}^{n} q^k = u_0 \times q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \boxed{u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$

Exercice 5. Écrire avec la notation $\sum$ et calculer :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{1024}\ .$$

$$= \sum_{k=0}^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \times \left(1 + \frac{1}{2^{11}}\right) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{2^{10}}\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{1024}\right)}$$

Exercice 6. Soit un réel $\theta \not\equiv 0 \quad [2\pi]$.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}\,k\theta}$.

2) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}\,k\theta} = e^{\mathrm{i}\,n\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

1) On applique la formule de Moivre :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}\,k\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^k = \frac{1 - e^{\mathrm{i}\,(n+1)\theta}}{1 - e^{\mathrm{i}\,\theta}}$$

car $\theta \not\equiv 0 \ \ [2\pi] \implies e^{\mathrm{i}\,\theta} \neq 1$.

2) On applique la méthode de l'angle moitié au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}\,k\theta} &= \frac{1 - e^{\mathrm{i}\,(n+1)\theta}}{1 - e^{\mathrm{i}\,\theta}} = \frac{e^0 - e^{\mathrm{i}\,(n+1)\theta}}{e^0 - e^{\mathrm{i}\,\theta}} \\
&= \frac{e^{\mathrm{i}\,(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{-\mathrm{i}\,(n+1)\frac{\theta}{2}} - e^{\mathrm{i}\,(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{-\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - e^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}} \\
&= e^{\mathrm{i}\,n\frac{\theta}{2}} \times \frac{-2\mathrm{i}\,\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{-2\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= e^{\mathrm{i}\,n\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Changement d'indices

Pour calculer une somme il est souvent intéressant de procéder à un changement d'indice :

Proposition-Définition

Pour i l'indice d'une somme, et pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

- *Le changement d'indice :* $\boxed{j = m + i}$ *(translation de m)*

change l'écriture d'une somme d'indice i en une somme d'indice j de la manière suivante :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=p+m}^{n+m} a_{j-m}$$

- *Le changement d'indice :* $\boxed{j = m - i}$ *(symétrie en $\frac{m}{2}$)*

change l'écriture d'une somme d'indice i en une somme d'indice j de la manière suivante :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=m-n}^{m-p} a_{m-j}$$

Remarque. Attention, aucune autre forme de changement d'indice n'est licite : pas de $j = 2i + 1$ ou $j = i + \frac{1}{2}$, etc.

Démonstration. Pour le changement d'indice $j = m + i$:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

$$\sum_{j=p+m}^{n+m} a_{j-m} = a_{p+m-m} + a_{p+m+1-m} + \cdots + a_{n+m-m}$$

$$= a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

d'où l'égalité.
Pour le changement d'indice $j = m - i$:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

$$\sum_{j=m-n}^{m-p} a_{m-j} = a_{m-(m-n)} + a_{m-(m-n+1)} + \cdots + a_{m-(m-p)}$$

$$= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_p = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

d'où l'égalité. ■

Exemples.

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3$. On procède au changement d'indice $j = k+1$; alors :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 = \sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)^3$. On procède au changement d'indice $j = n-k$; alors :

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3 = 0 + \sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 7. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$ de deux manières différentes :

1) En appliquant la linéarité.

2) À l'aide d'un changement d'indice.

1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2k + 1 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\times\frac{n(n+1)}{2} + n\\ &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6} - n^2 - n + n\\ &= \frac{2n^3-3n^2+n}{6}\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\ &= \frac{2n^3-3n^2+n}{6}\end{aligned}$$

Sommes télescopiques

Il s'agit de sommes dont le calcul se simplifie, tout ou partie des termes au rang k s'annulant avec tout ou partie des termes au rang suivant $k+1$ et ainsi de suite.

$$\begin{array}{llllllll}
\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k+1}) & = \boxed{u_p} & -\underset{\sim}{u_{p+1}} & & & & & \\
& & +\underset{\sim}{u_{p+1}} & -\underline{u_{p+2}} & & & & \\
& & & +\underline{u_{p+2}} & \cdots & & & \\
& & & & \ddots & & & \\
& & & & & -\underset{\sim}{u_{n-1}} & & \\
& & & & & +\underset{\sim}{u_{n-1}} & -\underline{u_n} & \\
& & & & & & +\underline{u_n} & \boxed{-u_{n+1}}
\end{array}$$

$$= u_p - u_{n+1}$$

Propriété

$$\sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{n+1} \qquad ; \qquad \sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

Démonstration. La seconde découle de la première puisque par linéarité :

$$\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) = -\sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k+1})$$

Établissons la première par linéarité, changement d'indice et décrochage.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k+1}) &= \sum_{k=p}^{n} u_k - \sum_{k=p}^{n} u_{k+1} && \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=p}^{n} u_k - \sum_{j=p+1}^{n+1} u_j && j = k+1 \ (2^{\text{ème}} \text{ somme}) \\
&= \left(u_p + \sum_{k=p+1}^{n} u_k\right) - \left(\sum_{j=p+1}^{n} u_j + u_{n+1}\right) && \text{par décrochage} \\
&= u_p - u_{n+1} + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{n} u_k - \sum_{j=p+1}^{n} u_j}_{=0} = u_p - u_{n+1} && \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemple. Calcul de $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$.

Il est grandement simplifié si l'on remarque que $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$; la somme télescope :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2 - k^2\right] = (n+1)^2 - 1^2 = \boxed{n^2 + 2n}$$

Exercice 8. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \qquad ; \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(3k^2 + 3k + 1\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \boxed{\frac{n}{n+1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2 + 3k + 1\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right] = (n+1)^3 - 1^3 = \boxed{(n+1)^3 - 1}$$

Sommes doubles

Définition

Soient n, p deux entiers non nuls et soit $(a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,p]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]}}$ une famille de $p \times n$ nombres (réels ou complexes) doublement indexée, c'est-à-dire les nombres :

$$a_{1,1}\,,\, a_{1,2}\,,\, \ldots\,,\, a_{1,n}\,,\, a_{2,1},\, a_{2,2}\,,\, \ldots\,,\, a_{2,n}\,,\, \ldots\,,\, a_{p,1}\,,\, a_{p,2}\,,\, \ldots\,,\, a_{p,n}.$$

On note $\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j}$ la somme de tous ces nombres, c'est-à-dire :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j} = a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,n} + a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{2,n} + \cdots + a_{p,1} + a_{p,2} + \cdots + a_{p,n}$$

Exemples.

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} 1 = 1 + 1 + 1$$

$$+ 1 + 1 + 1 = 6$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 4}} (i + j) = 2 + 3 + 4 + 5$$

$$+ 3 + 4 + 5 + 6 = 32$$

Décomposition par lignes/colonnes

Propriété

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ *une famille de* $p \times n$ *nombres. Alors :*

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)}_{\substack{\text{Décomposition}\\ \text{par lignes}}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\right)}_{\substack{\text{Décomposition}\\ \text{par colonnes}}}$$

Démonstration. Les $a_{i,j}$ peuvent être écrits dans un tableau à p lignes et n colonnes :

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	j_0	$\cdots$	n	Sommation par ligne
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	a_{1,j_0}	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i_0	$a_{i_0,1}$	$a_{i_0,2}$	$\cdots$	a_{i_0,j_0}	$\cdots$	$a_{i_0,n}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	$a_{p,1}$	$a_{p,2}$	$\cdots$	a_{p,j_0}	$\cdots$	$a_{p,n}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}$
Sommation par colonne	$\sum_{i=1}^{p} a_{i,1}$	$\sum_{i=1}^{p} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{p} a_{i,j_0}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{p} a_{i,n}$	

Pour calculer la somme des éléments du tableau, on peut par associativité et commutativité de l'addition :

• Soit calculer la somme des éléments de chaque ligne puis additionner les p sommes obtenues :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

C'est une décomposition par lignes.

• Soit calculer la somme des éléments de chaque colonne puis additionner les n sommes obtenues :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\right)$$

C'est une décomposition par colonnes.

D'où le résultat. ■

Remarques.

• Ainsi le calcul d'une somme double se ramène au calcul de sommes simples.
• Lorsque $n = p$, on peut noter $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$ plutôt que $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j}$.

Exemple. Calcul de $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+1)\times j$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+1)\times j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+1)\times j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)\sum_{j=1}^{n}j\right] && \text{Par linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)\times\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}(i+1)\right]\times\frac{n(n+1)}{2} && \text{Par linéarité} \\
&= \left[\sum_{j=2}^{n+1}j\right]\times\frac{n(n+1)}{2} && j=i+1 \\
&= \frac{n(n+3)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

Remarque. Dans ce contexte on peut utiliser le principe de séparation des variables :

Propriété

Séparation des variables.

Soient p, q, n, m des entiers et $(a_i)_{p \leq i \leq n}$, $(b_j)_{q \leq j \leq m}$ deux familles de nombres ; alors :

$$\sum_{i=p}^{n} \sum_{j=q}^{m} (a_i \times b_j) = \left(\sum_{i=p}^{n} a_i \right) \times \left(\sum_{j=q}^{m} b_j \right).$$

Démonstration.

$$\sum_{i=p}^{n} \sum_{j=q}^{m} (a_i \times b_j) = \sum_{i=p}^{n} \left(a_i \sum_{j=q}^{m} b_j \right) = \left(\sum_{i=p}^{n} a_i \right) \times \left(\sum_{j=q}^{m} b_j \right) \qquad \text{par linéarité}$$

■

Exercice 9. Calculer $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i \times j)$ et $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i + j)$.

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} i \times j = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) \quad \text{par séparation des variables}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right) && \text{par linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(n\times i + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(n\times i) + \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} && \text{par linéarité} \\
&= n\times\sum_{i=1}^{n} i + n\times\frac{n(n+1)}{2} && \text{par linéarité} \\
&= n\times\frac{n(n+1)}{2} + n\times\frac{n(n+1)}{2} \\
&= n^2(n+1)
\end{aligned}$$

Plus généralement on peut sommer la partie du tableau débutant ligne q et colonne m :

Si $1 \leq q \leq p$ et $1 \leq m \leq n$ sont des entiers :

$$\sum_{\substack{q \leq i \leq p \\ m \leq j \leq n}} a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=q}^{p} \left(\sum_{j=m}^{n} a_{i,j} \right)}_{\substack{\text{Décomposition} \\ \text{par lignes}}} = \underbrace{\sum_{j=m}^{n} \left(\sum_{i=q}^{p} a_{i,j} \right)}_{\substack{\text{Décomposition} \\ \text{par colonnes}}}$$

Sommation sur une partie de la famille

Dans toute cette partie on considère une famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ de nombres

$$\text{(nombre de lignes = nombre de colonnes).}$$

Dans ce cas, il faut savoir aussi calculer la somme des $a_{i,j}$ sur une partie de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ vérifiant :

$$1\leq i\leq j\leq n \quad \text{ou} \quad 1\leq i<j\leq n \quad \text{ou} \quad 1\leq j\leq i\leq n \quad \text{ou} \quad 1\leq j<i\leq n.$$

Partie triangulaire supérieure : $1 \leq i \leq j \leq n$

Définition

La notation :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$$

désigne la somme des nombres $a_{i,j}$ de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ vérifiant la condition :

$$1 \leq i \leq j \leq n.$$

Le calcul s'effectue à l'aide de :

Propriété

Décomposition par lignes/colonnes.

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right)$$

Démonstration. Cette fois-ci on ne somme que les éléments $a_{i,j}$ du tableau situés dans la partie triangulaire supérieure :

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	i_0	$\cdots$	n	Somme par ligne
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	a_{1,i_0}	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}$
2		$a_{2,2}$	$\cdots$	a_{2,i_0}	$\cdots$	$a_{2,n}$	$\sum_{j=2}^{n} a_{2,j}$
			$\ddots$			$\vdots$	$\vdots$
i_0				a_{i_0,i_0}		$a_{i_0,n}$	$\sum_{j=i_0}^{n} a_{i_0,j}$
					$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n						$a_{n,n}$	$\sum_{j=n}^{n} a_{n,j}$
Somme par colonne	$\sum_{i=1}^{1} a_{i,1}$	$\sum_{i=1}^{2} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{i_0} a_{i,i_0}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$	

Par le même raisonnement que précédemment, on obtient par associativité et commutativité de l'addition :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right) \qquad \blacksquare$$

Exemple. Calcul de $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (i \times j)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (i \times j) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(i \times j) = \sum_{j=1}^{n}\left(j \times \sum_{i=1}^{j} i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j \times \frac{j(j+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3 + j^2) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \times \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{3n(n+1) + 4n + 2}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2 + 7n + 2)}{24}
\end{aligned}$$

Remarque. Attention, ici pas de séparation des variables car la deuxième somme a une borne dépendant de j.

Exercice 10. Calcul de $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} i$:

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le j\le n} i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{(2n+1)+3}{6}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n+2}{3}\\ &= \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}\end{aligned}$$

Remarque. Plus généralement : pour 2 entiers p, n :

$$\sum_{p \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=p}^{n} \left(\sum_{i=p}^{j} a_{i,j} \right)$$

Exemple.

$$\sum_{2 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=2}^{j} a_{i,j} \right)$$

Partie triangulaire supérieure stricte : $1 \leq i < j \leq n$

Définition

La notation :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$$

désigne la somme des nombres $a_{i,j}$ de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ vérifiant la condition :

$$1 \leq i < j \leq n.$$

Le calcul s'effectue à l'aide de :

Propriété

Décomposition par lignes/colonnes.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} \right)$$

Démonstration. Cette fois le tableau des éléments $a_{i,j}$ qui figurent dans la somme est :

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	i_0	$\cdots$	n	Somme par ligne
1		$a_{1,2}$	$\cdots$	a_{1,i_0}	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\sum_{j=2}^{n} a_{1,j}$
2			$\ddots$	a_{2,i_0}	$\cdots$	$a_{2,n}$	$\sum_{j=3}^{n} a_{2,j}$
				$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
i_0					$\ddots$	$a_{i_0,n}$	$\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0,j}$
						$\ddots$	$\vdots$
n							0
Somme par colonne	0	$\sum_{i=1}^{1} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{i_0-1} a_{i,i_0}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n}$	

On obtient par le même raisonnement que précédemment :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} \right)$$

■

Exercice 11. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} i$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq n} i = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} i = \sum_{j=2}^{n} \frac{(j-1)j}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} j^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} j \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - 1\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} j \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{(n-1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{2n^3+3n^2+n-6-3n^2-3n+6}{12} \\
&= \frac{2n^3-2n}{12} = \boxed{\frac{n^3-n}{6}}
\end{aligned}$$

Remarque. Plus généralement : pour 2 entiers p, n :

$$\sum_{p \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=p+1}^{n} \left(\sum_{i=p}^{j-1} a_{i,j} \right)$$

Exemple.

$$\sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=2}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=3}^{n} \left(\sum_{i=2}^{j-1} a_{i,j} \right)$$

Partie triangulaire inférieure $1 \leq j \leq i \leq n$

Les deux cas restants, pour $1 \leq j \leq i \leq n$ et $1 \leq j < i \leq n$ se déduisent des cas précédents (en échangeant les rôles des indices i, j) ; on peut aussi les interpréter sur les parties triangulaires inférieures et triangulaires inférieures strictes.

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j} \right)$$

$i \backslash j$	1	2	$\cdots$	i_0	$\cdots$	n	Somme par ligne
1	$a_{1,1}$						$\sum_{j=1}^{1} a_{1,j}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$					$\sum_{j=1}^{2} a_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$				
i_0	$a_{i_0,1}$	$a_{i_0,2}$	$\cdots$	a_{i_0,i_0}			$\sum_{j=1}^{i_0} a_{i_0,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$		
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	a_{n,i_0}	$\cdots$	$a_{n,n}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$
Somme par colonne	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$	$\sum_{i=2}^{n} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=i_0}^{n} a_{i,i_0}$	$\cdots$	$\sum_{i=n}^{n} a_{i,n}$	

Partie triangulaire inférieure stricte $1 \leq j < i \leq n$

$$\sum_{1 \leq j < i \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j} \right)$$

i \ j	1	2	$\cdots$	i_0	$\cdots$	n	Somme par ligne
1							0
2	$a_{2,1}$						$\sum_{j=2}^{1} a_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$
i_0	$a_{i_0,1}$	$a_{i_0,2}$	$\ddots$				$\sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j}$
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$			$\vdots$
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$		$a_{n,n-1}$		$\sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j}$
Somme par colonne	$\sum_{i=2}^{n} a_{i,1}$	$\sum_{i=3}^{n} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=i_0+1}^{n} a_{i,i_0}$	$\sum_{i=n}^{n} a_{i,n-1}$	0	

Remarque.

D'autres cas analogues peuvent se présenter, par exemple pour $2 \leq j \leq i \leq n$, pour lesquels les formules se généralisent ou se déduisent des cas triangulaires supérieurs en échangeant les rôles de i et j.

Notation produit $\prod$

Définition

- *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes. On note :*

$$\prod_{i=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$$

le produit des a_i pour i variant de 0 à n.

- *Plus généralement, si $p \in [\![0, n]\!]$, on note :*

$$\prod_{i=p}^{n} a_i = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n$$

le produit des a_i pour i variant de p jusqu'à n.

- *La variable i s'appelle l'indice du produit.*

Exemples.

$$\prod_{k=1}^{n} a = a^n \qquad ; \qquad \prod_{k=p}^{n} a = a^{n-p+1}.$$

- Soit $a \in \mathbb{C}$:

$$\prod_{k=1}^{n} a^k = a^{\sum_{k=1}^{n} k} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Remarque. Par convention, lorsque $p > n$:

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = 1$$

Propriétés

Propriété

Pour toutes familles de nombres $(a_k)_{k\in[\![p,n]\!]}$, $(b_k)_{k\in[\![p,n]\!]}$, *et tout nombre* λ, *lorsque bien définis :*

$$\prod_{k=p}^{n}(a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^{n} a_k \times \prod_{k=p}^{n} b_k \qquad ; \qquad \prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=p}^{n} a_k}{\prod_{k=p}^{n} b_k}$$

$$\prod_{k=p}^{n} \lambda \times a_k = \lambda^{n-p+1} \times \prod_{k=p}^{n} a_k \qquad : \qquad \forall m \in \mathbb{Z}, \prod_{k=p}^{n} (a_k)^m = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)^m$$

Démonstration. Les 3 premières découlent de l'associativité et de la commutativité de $\times$, et la dernière de $a^m \times b^m = (a \times b)^m$. ∎

Propriété

$$\prod_{k=p}^{n} \left(a^{u_k}\right) = a^{\sum_{k=p}^{n} u_k}.$$

Démonstration. S'obtient par une récurrence immédiate en utilisant $a^u \times a^v = a^{u+v}$. ∎

Propriété

Décrochage

Pour tous entiers $0 \leq p \leq q \leq n$ *:*

$$\prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{q} a_k \times \prod_{k=q+1}^{n} a_k.$$

Démonstration. Découle de l'associativité de la multiplication. ∎

Proposition-Définition

Pour i l'indice d'un produit, et pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

- *Le changement d'indice :* $\boxed{j = m + i}$ *(translation de m)*

change l'écriture d'un produit d'indice i en un produit d'indice j de la manière suivante :

$$\prod_{i=p}^{n} a_i = \prod_{j=p+m}^{n+m} a_{j-m}$$

- *Le changement d'indice :* $\boxed{j = m - i}$ *(symétrie en $\frac{m}{2}$)*

change l'écriture d'un produit d'indice i en un produit d'indice j de la manière suivante :

$$\prod_{i=p}^{n} a_i = \prod_{j=m-n}^{m-p} a_{m-j}$$

Démonstration. Analogue à celle pour les sommes en changeant $\sum$ par $\prod$ et $+$ par $\times$. ■

Propriété

Produit télescopique

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p} \qquad ; \qquad \prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_p}{a_{n+1}}$$

Démonstration.

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{k=p}^{n} a_{k+1}}{\prod_{k=p}^{n} a_k} \underset{j=k+1}{=} \frac{\prod_{j=p+1}^{n+1} a_j}{\prod_{k=p}^{n} a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p} \times \underbrace{\frac{\prod_{j=p+1}^{n} a_j}{\prod_{k=p+1}^{n} a_k}}_{=1} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$$

La deuxième en découle puisque $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} = \dfrac{1}{\frac{a_{k+1}}{a_k}}$. ■

Exercice 12. Calculer : $\prod_{k=1}^{n} a^{2k+1}$, $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}$.

$$\prod_{k=1}^{n} a^{2k+1} = \prod_{k=1}^{n} \left(a^2\right)^k \times \prod_{k=1}^{n} a = \left(a^2\right)^{\sum_{k=1}^{n} k} \times a^n = \left(a^2\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times a^n = a^{n(n+1)} \times a^n = a^{n(n+2)}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Notation factorielle

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel ; on note :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = \begin{cases} 1 \times \cdots \times n & si\ n \geq 1 \\ 1 & si\ n = 0 \end{cases}$$

$n!$ se lit factorielle n.

Exemple.

$0! = 1 \quad ; \quad 1! = 1 \quad ; \quad 2! = 2 \quad ; \quad 3! = 6 \quad ; \quad 4! = 24 \quad ; \quad 5! = 120 \quad ; \quad 6! = 720\,.$

La seule propriété permettant de simplifier le calcul de $n!$ est la suivante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Démonstration. Il suffit de décrocher le dernier terme du produit :

$$(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\prod_{k=1}^{n} k}_{=n!} \times \underbrace{\prod_{k=n+1}^{n+1} k}_{=n+1} = (n+1) \times n! \qquad \blacksquare$$

Exercice 13.

Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{2^n \times n!}{(2n)!}$; en déduire sa convergence puis calculer sa limite.

La suite (u_n) est à termes strictement positifs ; on compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}\times(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{2^n\times n!}{(2n)!}} = \frac{2^{n+1}\times(n+1)!\times(2n)!}{2^n\times n!\times(2n+2)!} = \frac{2\times(n+1)}{(2n+2)\times(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} \leq 1$$

La suite (u_n) est donc décroisante ; or elle est minorée par 0, et donc convergente. Pour déterminer sa limite, on applique le théorème des gendarmes après avoir obtenu un encadrement :

$$u_n = \frac{2^n\times n!}{(2n)!} = \frac{2^n\times\prod_{k=1}^n k}{\prod_{k=1}^{2n} k} = \frac{2^n\times\prod_{k=1}^n k}{\prod_{k=1}^n k\times\prod_{k=n+1}^{2n} k} = \frac{2^n}{\prod_{k=n+1}^{2n} k} = \prod_{k=n+1}^{2n}\frac{2}{k}$$

Ainsi pour $n \geq 1$:

$$0 \leq u_n = \underbrace{\frac{2}{n+1}\times\frac{2}{n+2}\times\cdots\times\frac{2}{2n-1}}_{\leq 1}\times\frac{2}{2n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim u_n = 0$.

Coefficients binomiaux

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et k un entier. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se lit : "k parmi n".

Exemples.

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \times 0!} = 1 \quad ; \binom{1}{0} = \frac{1!}{0! \times 1!} = 1 \quad ; \quad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1! \times 0!} = 1$$

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0! \times 2!} = 1 \quad ; \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \times 1!} = 2 \quad ; \quad \binom{2}{2} = \frac{2!}{2! \times 0!} = 1$$

Coefficients binomiaux

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et k un entier. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se lit : "k parmi n".

Exemples.

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0! \times 2!} = 1 \quad ; \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \times 1!} = 2 \quad ; \quad \binom{2}{2} = \frac{2!}{2! \times 0!} = 1$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0! \times 3!} = 1 \quad ; \quad \binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \times 2!} = 3 \quad ; \quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3 \quad ; \quad \binom{3}{3} = \frac{3!}{3! \times 0!} = 1$$

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Simplifier :

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \times n!} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \left.\begin{cases} \dfrac{n!}{1! \times (n-1)!} = n & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}\right\} = n$$

$$\binom{n}{2} = \left.\begin{cases} \dfrac{n!}{2! \times (n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2} & \text{si } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } n \in \{0;1\} \end{cases}\right\} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2) Montrer que pour tout entier k :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

On traite deux cas selon que $0 \leq k \leq n$ ou non ; remarquons que :

$$0 \leq k \leq n \underset{\times(-1)}{\iff} -n \leq -k \leq 0 \underset{+n}{\iff} 0 \leq n-k \leq n$$

Premier cas : si $0 \leq k \leq n$; alors $0 \leq n-k \leq n$:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \times (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \binom{n}{k}$$

Deuxième cas : si $k \notin [[0, n]]$ alors $(n-k) \notin [[0, n]]$ et donc :

$$\binom{n}{k} = 0 = \binom{n}{n-k}.$$

Nous venons d'établir les premières propriétés des coefficients binomiaux :

Propriété

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad ; \qquad \binom{n}{1} = n \qquad ; \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier k :

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \qquad \textit{(Propriété de symétrie)}$$

Relation de Pascal

Une propriété fondamentale des coefficients binomiaux est la relation de Pascal :

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier k :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Démonstration. On traite séparément les cas où certains coefficients binomiaux sont nuls.

- Premier cas : si $k < 0$; alors $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} = 0$ et la relation est vérifiée.
- Deuxième cas : si $k = 0$; alors $\binom{n+1}{k} = 1$, $\binom{n}{k-1} = 0$ et $\binom{n}{k} = 1$; la relation est vérifiée.

- Troisième cas : si $k > n+1$; alors $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} = 0$ et la relation est vérifiée.
- Quatrième cas : si $k = n+1$; alors $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} = 1$, et $\binom{n}{k} = 0$;

la relation est vérifiée.

- Dernier cas : si $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k \times n!}{k \times (k-1)!(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k) \times n!}{(n+1-k) \times k!(n-k)!} \\
&= \frac{k \times n!}{k!(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k) \times n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{k \times n! + (n+1-k) \times n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(k+n+1-k) \times n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1) \times n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

■

Le triangle de Pascal

Remarque. Le triangle de Pascal.

Les coefficients binomiaux peuvent se représenter et se calculer dans un tableau appelé triangle de Pascal. Sur la première ligne, numérotée 0, on place $1 = \binom{0}{0}$. Les lignes suivantes s'obtiennent grâce à la relation de Pascal de la façon suivante :

chaque élément est la somme de l'élément au dessus et de l'élément au-dessus et à gauche

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \dbinom{n}{k-1} & & \dbinom{n}{k} & \dots \\ & & \boxed{+} & \downarrow & \\ \dots & \dots & & \dbinom{n+1}{k} & \dots \end{array}$$

Une zone non renseignée comptant pour une valeur nulle. Le $(k+1)$-ème élément de la $(n+1)$ colonne représente alors la valeur de $\binom{n}{k}$:

Le triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	k	$\cdots$
0	1								$\vdots$	
1	1	1							$\vdots$	
2	1	2	1						$\vdots$	
3	1	3	3	1					$\vdots$	
4	1	4	6	4	1				$\vdots$	
5	1	5	10	10	5	1			$\vdots$	
6	1	6	15	20	15	6	1		$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$							$\ddots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$								$\vdots$	
n	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\binom{n}{k}$	$\cdots$
$\vdots$										

Exercice 15. Compléter la ligne du triangle de Pascal pour $n = 7$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Une dernière propriété utile est la formule du pion :

Propriété

(Formule du pion).

Pour tous entiers k et n avec $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$$

■

Formule du binôme

La formule du binôme de Newton généralise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour développer $(a+b)^n$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$. Les coefficients des monômes apparaissant dans le développement sont les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour k variant de 0 à n ; elle est incontournable.

Théorème

Soient a, b deux nombres (réels ou complexes) et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration. Puisque par commutativité de l'addition $(a+b)^n = (b+a)^n$ et par commutativité de la multiplication $a^{n-k}b^k = b^k a^{n-k}$, la deuxième égalité découle de la première.

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(I) pour $n = 0$: $(a+b)^0 = 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \times 1 = 1 = (a+b)^0$$

L'assertion est donc vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang n.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\
&\underset{HR}{=} (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad j = k+1 \ (1^{\text{re}} \text{ somme})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && j = k+1 \ (1^{\text{re}} \text{ somme}) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{car } \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && k = j \ (1^{\text{re}} \text{ somme}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{relation de Pascal}
\end{aligned}
$$

Ainsi l'assertion reste vraie au rang $(n+1)$.
On conclut à l'aide du principe de récurrence. ■

Exemples.

- Pour $n = 1$: $(a+b)^1 = a + b$ et $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, ainsi :

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$$

- Pour $n = 2$: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, ainsi :

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

- Pour $n = 3$: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ et $\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$, $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$, ainsi :

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Remarques.

– La somme des exposants de chaque monôme du développement de $(a+b)^n$ est constant égal à $k+(n-k)=n$. Le coefficient devant $a^k b^{n-k}$ (ou $a^{n-k}b^k$) est le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

– On obtient le développement de $(a-b)^n$ en changeant dans la formule b par $-b$. Ainsi :

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Les sommes sont alternées : alternativement $+$, $-$, $+$, $-$, etc.

Exercice 16. Développer (s'aider du triangle de Pascal) :

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$\begin{aligned}(2x-1)^5 &= 1 \times 2^5 \times x^5 - 5 \times 2^4 \times x^4 + 10 \times 2^3 \times x^3 - 10 \times 2^2 \times x^2 + 5 \times 2 \times x - 1 \\ &= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1\end{aligned}$$

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (-1)^k \times 1^{n-k} = (1-1)^n = 0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$; calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{0} - \binom{n}{0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1 = 2^n - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (-2)^k \times 1^{n-k} = (-2+1)^n = (-1)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \times 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (-1)^{n-k} \times 2^k = (2-1)^n = 1^n = 1$$

Factorisation de $a^n - b^n$

La formule du binôme généralise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ à des exposants autres que 2. Généralisons aussi l'autre identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ à d'autres exposants.

Théorème

Soient a et b deux nombres et $n \in \mathbb{N}^*$; alors :

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Démonstration. Par calcul direct, en partant du membre de droite :

$$\begin{aligned}
(a-b)\times\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} && j = k+1 \quad (1^{ere}\text{ somme}) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} a^j b^{n-j} + a^n - \left(b^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k}\right) && \text{décrochages} \\
&= a^n - b^n + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} a^j b^{n-j} - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k}}_{=0} \\
&= a^n - b^n && \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemples.

$$(a-b)(a+b) = a^2 \overbrace{+ab \quad -ba}^{} \underbrace{}_{=0} -b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 \overbrace{+a^2b+ab^2}^{} \underbrace{-ba^2-ab^2}_{=0} -b^3 = a^3 - b^3$$

Exercice 18. Factoriser :

$$a^3 - 1 = a^3 - 1^3 = (a-1)(a^2+a+1)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$
$$a^3 + b^3 = a^3 - (-1)^3b^3 = a^3 - (-b)^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$