Les nombres réels

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Introduction

On distingue dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, deux sous-ensembles remarquables :

- Le sous-ensemble des réels positifs, noté $\mathbb{R}_+ = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\right\}$
- Le sous-ensemble des réels négatifs, noté $\mathbb{R}_+ = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\right\}$

$$\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \left\{0\right\}$$

Ils vérifient :

- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ sont stables par addition ; autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, \ (x+y) \in \mathbb{R}_+ \qquad ; \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-, \forall y \in \mathbb{R}_-, \ (x+y) \in \mathbb{R}_-$$

- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ sont stables par multiplication par un réel <u>positif</u> ; autrement dit :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ (a \times x) \in \mathbb{R}_+ \qquad ; \qquad \forall a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_-, \ (a \times x) \in \mathbb{R}_-$$

• La multiplication par un réel négatif envoie $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$; autrement dit :

$$\forall a \in \mathbb{R}_-, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ (a \times x) \in \mathbb{R}_- \qquad ; \qquad \forall a \in \mathbb{R}_-, \forall x \in \mathbb{R}_-, \ (a \times x) \in \mathbb{R}_+$$

Ainsi :

• $\mathbb{R}_+$ est stable par multiplication, $\mathbb{R}_-$ n'est pas stable par multiplication.

Notation. On a coutume d'écrire :

$$\begin{array}{lcl} \forall a \geq 0 \dots & \text{pour} & \forall a \in \mathbb{R}_+ \dots \\ \forall a > 0 \dots & \text{pour} & \forall a \in \mathbb{R}_+^* \dots \\ \forall a \leq 0 \dots & \text{pour} & \forall a \in \mathbb{R}_- \dots \\ \forall a < 0 \dots & \text{pour} & \forall a \in \mathbb{R}_-^* \dots \end{array}$$

et de même avec le quantificateur existentiel.

Ordre sur les réels

On construit une relation d'ordre sur les réels.

Définition

L'ensemble des réels est muni d'une relation d'ordre, notée $\leq$, définie pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$a \leq b \text{ si et seulement si } a - b \in \mathbb{R}_-.$$

L'ordre est total :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b \text{ ou } b \leq a.$$

L'ordre sur les réels vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

Propriété

- *Réflexivité :* $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq a.$
- *Anti-symétrie :* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *si* $a \leq b$ *et* $b \leq a$*, alors* $a = b.$
- *Transitivité :* $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*, si* $a \leq b$ *et* $b \leq c$ *alors* $a \leq c.$

Démonstration.

– Reflexivité : Soit $a \in \mathbb{R}$, $a - a = 0 \in \mathbb{R}_-$, donc $a \leq a$.

– Antisymétrie : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leq b$ et $b \leq a$.

Alors :

$$\left\{\begin{array}{l} (a-b) \in \mathbb{R}_- \\ \text{et} \\ (b-a) \in \mathbb{R}_- \implies (a-b) = (-1) \times (b-a) \in \mathbb{R}_+ \end{array}\right. \implies (a-b) \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}.$$

Donc $a - b = 0$, donc $a = b$.

– Transitivité : Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $b \leq c$. Alors $(a - b) \in \mathbb{R}_-$ et $(b - c) \in \mathbb{R}_-$. Par addition, on a donc :

$$(a-b) + (b-c) = (a-c) \in \mathbb{R}_- \implies a \leq c.$$

■

Définition

On définit aussi, pour tous réels a et b :

$$a < b \text{ si et seulement si } a \leq b \text{ et } a \neq b$$
$$a \geq b \text{ si et seulement si } b \leq a$$
$$a > b \text{ si et seulement si } b \leq a \text{ et } b \neq a$$

Remarques.

• Ainsi : $a \leq b \iff (a < b \text{ ou } a = b)$ et la négation de $a \leq b$ est $b < a$.

• La notation $a \leq b \leq c$ signifie $a \leq b$ et $b \leq c$; $a \leq b < c$ signifie $a \leq b$ et $b < c$, etc.

Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

Les intervalles de $\mathbb{R}$, sont ses parties définies par :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \qquad [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \qquad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \qquad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \qquad]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Remarque. L'intersection de deux intervalles est un intervalle. Réunion et complémentaire d'intervalles ne sont pas en général des intervalles.

Les opérations sur les réels ont les effets suivant sur leur ordre :

Propriété

- $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,
$$a \leq b \iff a+c \leq b+c.$$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et pour tout réel c* *strictement positif* *:*
$$a \leq b \iff a \times c \leq b \times c$$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et pour tout réel c* *strictement négatif* *:*
$$a \leq b \iff b \times c \leq a \times c$$

- $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{cases} a \leq b \\ et \\ c \leq d \end{cases} \Longrightarrow a + c \leq b + d$$

- *Pour tous réels a, b, c, d positifs,*

$$\begin{cases} a \leq b \\ et \\ c \leq d \end{cases} \Longrightarrow a \times c \leq b \times d$$

- *Pour tous réels a, b, c, d négatifs,*

$$\begin{cases} a \leq b \\ et \\ c \leq d \end{cases} \Longrightarrow b \times d \leq a \times c$$

Démonstration. On les démontre dans l'ordre en appliquant la stabilité de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ par addition et par multiplication par un réel positif, et l'inversion de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ par multiplication par un réel négatif.

(1) On a : $a-b=(a+c)-(b+c)$ donc $a-b\in\mathbb{R}_- \iff (a+c)-(b+c)\in\mathbb{R}_-$, donc par définition, $a\leq b \iff a+c\leq b+c$.

(2) Soit $c>0$; alors $\frac{1}{c}>0$ et :

$$\begin{aligned} a-b\in\mathbb{R}_- &\underset{\times c}{\Longrightarrow} ca-cb\in\mathbb{R}_- \\ ca-cb\in\mathbb{R}_- &\underset{\times 1/c}{\Longrightarrow} a-b\in\mathbb{R}_- \end{aligned}$$

ainsi : $a-b\in\mathbb{R}_- \iff ca-cb\in\mathbb{R}_-$. Donc $a\leq b \iff ac\leq bc$.

(3) Soit $c<0$; alors $\frac{1}{c}<0$ et :

$$\begin{aligned} a-b\in\mathbb{R}_- &\underset{\times c}{\Longrightarrow} ca-cb\in\mathbb{R}_+ \Longrightarrow cb-ca\in\mathbb{R}_- \\ cb-ca\in\mathbb{R}_- &\Longrightarrow ca-cb\in\mathbb{R}_+ \underset{\times 1/c}{\Longrightarrow} a-b\in\mathbb{R}_- \end{aligned}$$

Ainsi : $a-b\in\mathbb{R}_- \iff cb-ca\in\mathbb{R}_-$. Donc $a\leq b \iff bc\leq ac$.

(4) Si $a\leq b$ et $c\leq d$, par définition $a-b\in\mathbb{R}_-$ et $c-d\in\mathbb{R}_-$, donc $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)\in\mathbb{R}_-$, ainsi $a+c\leq b+d$.

(5) Remarquons que si $c \geq 0$ alors $a \leq b \implies a \times c \leq b \times c$; en effet si $c > 0$ cela découle du point (2), et si $c = 0$ alors $a \times c = b \times c = 0$ et donc $a \times c \leq b \times c$. Ainsi, soient a, b, c, d des réels positifs :

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \underset{\times c}{\implies} a \times c \leq b \times c \\ c \leq d \underset{\times b}{\implies} b \times c \leq b \times d \end{array}\right\} \implies a \times c \leq b \times d \quad \text{par transitivité}$$

(6) Remarquons que si $c \leq 0$ alors $a \leq b \implies b \times c \leq a \times c$; en effet si $c < 0$ cela découle du point (3), et si $c = 0$ alors $b \times c = a \times c = 0$ et donc $b \times c \leq a \times c$. Ainsi, soient a, b, c, d des réels négatifs :

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \underset{\times d}{\implies} b \times d \leq a \times d \\ c \leq d \underset{\times a}{\implies} a \times d \leq a \times c \end{array}\right\} \implies b \times d \leq a \times c \quad \text{par transitivité} \qquad \blacksquare$$

Remarque. Attention en multipliant les termes d'une inégalité par un réel positif (ou nul !), on ne conserve pas l'équivalence. On n'a que l'implication :

$$\text{si } c \geq 0 \text{ alors } (a \leq b \implies ac \leq bc).$$

Contre-exemple : $0 \times 2 = 0 \leq 0 = 0 \times 1$ mais l'on n'a pas $2 \leq 1$.

De-même en multipliant par un réel négatif :

$$\text{si } c \leq 0 \text{ alors } (a \leq b \implies bc \leq ac).$$

on ne conserve pas l'équivalence.

Exercice 1. Soient :

$$-1 \leq a \leq 2 \qquad ; \qquad 1 \leq b \leq 3$$

Encadrer (le plus finement possible) : $a + b$, $a - b$, $a \times b$.

- Encadrement de $a + b$:

$$\left.\begin{array}{r} -1 \leq a \leq 2 \\ 1 \leq b \leq 3 \end{array}\right\} \underset{+}{\implies} -1 + 1 \leq a + b \leq 2 + 3 \implies 0 \leq a + b \leq 5.$$

• Encadrement de $a - b$:

$$1 \leq b \leq 3 \underset{\times(-1)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{r} -1 \leq a \leq 2 \\ -3 \leq -b \leq -1 \end{array}\right\} \underset{+}{\Longrightarrow} -1-3 \leq a-b \leq 2-1 \Longrightarrow -4 \leq a-b \leq 1.$$

• Encadrement de $a \times b$: $-1 \leq a \leq 2 \iff (-1 \leq a \leq 0 \text{ ou } 0 \leq a \leq 2)$.

Premier cas. Si $0 \leq a \leq 2$:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq a \leq 2 \\ 1 \leq b \leq 3 \end{array}\right\} \underset{\times}{\Longrightarrow} 0 \times 1 \leq a \times b \leq 2 \times 3 \Longrightarrow 0 \leq a \times b \leq 6.$$

Deuxième cas. Si $-1 \leq a \leq 0$:

$$\left.\begin{array}{r} -1 \leq a \leq 0 \underset{\times(-1)}{\Longrightarrow} 0 \leq -a \leq 1 \\ 1 \leq b \leq 3 \end{array}\right\} \underset{\times}{\Longrightarrow} 0 \times 1 \leq -a \times b \leq 1 \times 3 \underset{\times(-1)}{\Longrightarrow} -3 \leq a \times b \leq 0.$$

Donc $0 \leq a \times b \leq 6$ ou $-3 \leq a \times b \leq 0$. Ainsi :

$$-3 \leq a \times b \leq 6$$

Méthode. Attention :

– On a toujours le droit d'ajouter terme à terme deux inégalités.

– On n'a jamais le droit de soustraire terme à terme deux inégalités.

– On a le droit de multiplier terme à terme deux inégalités seulement lorsque tout est positif.

Propriété

Deux nombres strictement positifs (respectivement strictement négatifs) sont rangés dans le sens contraire de leurs inverses :

$$0 < a \leq b \implies 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

$$a \leq b < 0 \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$$

Remarque. Attention ça devient faux lorsque a et b ne sont pas de même signe : si $a < 0 < b$ alors $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$, et donc :

$$a \leq b \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}.$$

Démonstration. Soient a et b non nuls et de même signe, avec $a \leq b$. Alors $ab > 0$ et donc $\frac{1}{ab} > 0$. Ainsi :

$$a \leq b \underset{\times \frac{1}{ab}}{\iff} a \times \frac{1}{ab} \leq b \times \frac{1}{ab} \iff \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

De plus $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont nuls et de même signe que a et b. ■

Propriété

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés et leurs racines carrées :

$$\textit{si } a \geq 0 \textit{ et } b \geq 0, \textit{ alors } \left(a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \iff a^2 \leq b^2\right).$$

Démonstration. Soient a et b deux réels positifs. Commençons par montrer que $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$. On montre deux implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq a \leq b \end{array}\right\} \underset{\times}{\Longrightarrow} 0 \leq a^2 \leq b^2$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons la contraposée de $(a^2 \leq b^2 \implies a \leq b)$; soit $(b < a \implies b^2 < a^2)$. D'après $\boxed{\Rightarrow}$:

$$b < a \implies \begin{cases} b \leq a \\ \text{et} \\ b \neq a \end{cases} \implies \begin{cases} b^2 \leq a^2 \\ \text{et} \\ b \neq a \end{cases} \implies \begin{cases} b^2 < a^2 \text{ ou } b^2 = a^2 \\ \text{et} \\ b \neq a \end{cases}$$

Or puisque a et b sont positifs, $b^2 = a^2 \implies b = a$. Donc nécessairement $b^2 < a^2$.

Montrons maintenant que si a et b sont deux réels positifs, $a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Dans ce cas $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont bien définis et positifs. D'après ce que l'on vient de montrer, ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés $(\sqrt{a})^2 = a$ et $(\sqrt{b})^2 = b$. Ainsi :

$$a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

. ■

Exercice 2. Résoudre les inéquations :

$$\sqrt{1+x} \leq \sqrt{1-x} \tag{1}$$

$$x \leq \sqrt{1-x} \tag{2}$$

(1) Nécessairement les deux termes de l'équation doivent être définis, soit $(1+x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0) \iff (-x \leq 1 \text{ et } x \leq 1) \iff (-1 \leq x \text{ et } x \leq 1) \iff -1 \leq x \leq 1$.
Soit $x \in [-1,1]$. Puisque les deux termes de l'inégalité sont positifs :

$$\sqrt{1+x} \leq \sqrt{1-x} \iff 1+x \leq 1-x \iff 2x \leq 0 \iff x \leq 0 \iff x \in [-1,0]$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_1 = [-1,0]$.

(2) Nécessairement les deux termes de l'équation doivent être définis, soit $1-x \geq 0 \iff x \leq 1$. Soit $x \in]-\infty, 1]$. On considère deux cas selon que $x < 0$ ou $x \geq 0$.

Premier cas. Si $x \in]-\infty, 0[$: Puisqu'une racine carrée est toujours positive, on a bien $x \leq \sqrt{1-x}$; tout réel strictement négatif est solution.

Deuxième cas. Si $x \in [0,1]$: on peut élever au carré :

$$x \leq \sqrt{1-x} \iff x^2 \leq 1-x \iff x^2+x-1 \leq 0$$

Le trinôme x^2+x-1 a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5 > 0$ et pour racines $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, et il est négatif entre ses racines.

Or :

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq 0 \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq 1 \text{ car } 5 = \sqrt{5}^2 \leq (2+1)^2 = 9$$

Ainsi lorsque $x \in [0,1]$, x est solution de (2) ssi $x \in \left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Finalement, l'ensemble des solutions est l'intervalle :

$$\mathscr{S}_2 = \left]-\infty, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Valeur absolue

Définition

Pour tout réel x, la valeur absolue de x, notée $|x|$, est le réel positif défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Remarque. C'est bien défini car $(x \geq 0 \text{ et } x \leq 0) \implies x = 0 \implies x = -x$.

La valeur absolue satisfait les propriétés :

Propriété

Pour tous réels x, y :

- $|x| \geq 0$.
- $|x| = 0 \iff x = 0$.
- $|x \times y| = |x| \times |y|$.

Démonstration.

– ?$|x| \geq 0$?. On considère deux cas :

Si $x \geq 0$ alors $|x| = x \geq 0$. Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x \geq 0$.

– ?$|x| = 0 \iff x = 0$?. On considère deux cas :

Soit $x \geq 0$; $|x| = 0 \iff x = 0$. Soit $x \leq 0$; $|x| = 0 \iff -x = 0 \iff x = 0$.

– ?$|x \times y| = |x| \times |y|$?

On considère 4 cas en appliquant la règle des signes dans un produit :

Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $x \times y \geq 0$ et $|x \times y| = xy$ et $|x| \times |y| = xy$.
Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $x \times y \leq 0$ et $|x \times y| = -xy$ et $|x| \times |y| = x \times (-y) = -xy$.
Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $x \times y \leq 0$ et $|x \times y| = -xy$ et $|x| \times |y| = (-x) \times y = -xy$.
Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $x \times y \geq 0$ et $|x \times y| = xy$ et $|x| \times |y| = (-x) \times (-y) = xy$.

∎

On a aussi les propriétés :

Propriété

Pour tout réel x :

$$|x| = \max(x, -x) \qquad ; \qquad -|x| \leq x \leq |x|$$
$$|x|^2 = x^2 = (-x)^2 \qquad ; \qquad \sqrt{x^2} = |x|$$
$$\forall r \geq 0,\ |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$$
$$\forall r > 0,\ |x| < r \iff -r < x < r$$

Démonstration. On les établit dans l'ordre de lecture.

(1) ?$|x| = \max(x, -x)$?. On a :

$$\max(x, -x) = x \iff -x \leq x \iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0.$$

Dans ce cas $|x| = x = \max(x, -x)$.

Dans le cas contraire, $x < 0$ et $\max(x, -x) = -x$, ainsi $|x| = -x = \max(x, -x)$.

Dans tous les cas $|x| = \max(x, -x)$.

(2) ?$-|x| \leq x \leq |x|$?. On considère deux cas :

– Si $x \geq 0$ alors $-|x| = -x \leq 0 \leq x = |x|$ et donc $-|x| \leq x \leq |x|$ par transitivité.

– Si $x \leq 0$ alors $-|x| = x \leq 0 \leq -x = |x|$ et donc $-|x| \leq x \leq |x|$ par transitivité.

(3) ?$|x|^2 = x^2 = (-x)^2$?. D'après la propriété 5 : $|x|^2 = |x^2| = |(-x)^2|$ et puisqu'un carré est positif, par définition $|x|^2 = x^2 = (-x)^2$.

(4) Démontré au chapitre 1 (paragraphe 2.3).

(5) ?$\forall r \geq 0,\ |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$?. On a :

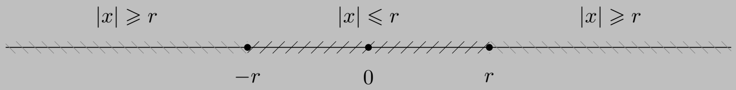
$$|x| \leq r \iff \begin{cases} x \geq 0 \text{ et } x \leq r \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \text{ et } -x \leq r \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq r \\ \text{ou} \\ -r \leq x \leq 0 \end{cases} \iff -r \leq x \leq r$$

(6) La preuve est analogue en remplaçant l'inégalité large par une inégalité stricte. ■

Exercice 3. Soit $r \geq 0$. Écrire sans valeur absolue l'assertion $|x| \geq r$.

Il s'agit de la négation de $|x| < r$, qui est équivalente à la conjonction $(-r < x$ et $x < r)$. Elle est donc équivalente à la disjonction $(x \leq -r$ ou $x \geq r)$. Ainsi :

$$|x| \geq r \iff (x \leq -r \text{ ou } x \geq r)$$



Concernant la valeur absolue d'une somme ou d'une différence, on a l'encadrement suivant :

Théorème

Inégalité triangulaire.

Soient x, y deux réels :

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$
$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

Démonstration. Commençons par montrer la première inégalité. Puisque tout est positif, élevons chaque terme au carré :

$$||x| - |y||^2 = (|x| - |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \times |y| = x^2 + y^2 - 2|xy|$$
$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$
$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \times |y| = x^2 + y^2 + 2|xy|$$

puisque $|x|^2 = x^2$ et $|x| \times |y| = |xy|$ (propriétés 5, 6).

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y| \\
\iff & \big||x|-|y|\big|^2 \leq |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 \\
\iff & -2|xy| \leq 2xy \leq 2|xy| \\
\iff & -|xy| \leq xy \leq |xy|
\end{aligned}$$

ce qui est vrai d'après la propriété 6.

La deuxième inégalité en découle puisqu'en l'appliquant à x et $(-y)$:

$$\begin{aligned}
& \big||x|-|-y|\big| \leq |x+(-y)| \leq |x|+|-y| \\
\Longrightarrow & \big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \leq |x|+|y|
\end{aligned}$$

■

Exercice 4. Soient a et b tels que $1 \leq |a| \leq 2$ et $3 \leq |b| \leq 4$; encadrer $|a+b|$.

On applique l'inégalité triangulaire :

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a+b| \leq |a|+|b| \leq 2+4=6$$

qui donne deja la majoration. Pour la minoration :

$$\left.\begin{array}{r} 1 \leq |a| \leq 2 \\ -4 \leq -|b| \leq -3 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1-4=-3 \leq |a|-|b| \leq 2-3=-1 \Longrightarrow 1 \leq \big||a|-|b|\big| \leq 3$$

Finalement :

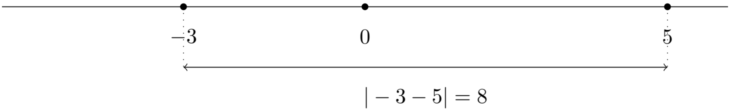
$$1 \leq |a+b| \leq 6$$

Distance entre 2 réels

Définition

La distance entre 2 réels x et y est le réel positif $|x-y|$.

Exemple.



Remarque. La distance entre deux réels satisfait les propriétés suivantes :

- $|x-y|=0 \iff x=y$: la distance de x à y est nulle ssi $x=y$.
- $|x-y|=|y-x|$: les distances de x à y et de y à x sont égales.
- $|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$: inégalité triangulaire.

Valeur absolue et intervalles

Théorème

Soient un réel x_0, et $\varepsilon > 0$; on a les équivalences :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leq \varepsilon \iff x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon \iff x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \varepsilon \iff x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \iff x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Démonstration. Pour tout réel x, d'après la propriété 6 :

$$|x - x_0| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x - x_0 \leq \varepsilon \underset{+x_0}{\iff} x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$$

qui donne la première équivalence. La deuxième est analogue en changeant les inégalités larges par des inégalités strictes. ∎

Exercice 5. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. En posant $x_0 = \frac{a+b}{2}$ et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, montrer que :

$$[a, b] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\right\}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$|x - x_0| \leq \varepsilon \iff x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon \iff \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \leq x \leq \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}$$

$$\iff \frac{a+b-b+a}{2} \leq x \leq \frac{a+b+b-a}{2} \iff a \leq x \leq b \iff x \in [a, b]$$

D'où l'égalité des deux ensembles.

Partie majorée, minorée, bornée, de $\mathbb{R}$

Définition

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$.

- *On dit que A est majoré lorsqu'il existe une réel M tel que :*

$$\forall x \in A, \ \ x \leq M$$

Le réel M est alors appelé un majorant de A.

- *On dit que A est minoré lorsqu'il existe une réel m tel que :*

$$\forall x \in A, \ \ x \geq m$$

Le réel m est alors appelé un minorant de A.

Remarque.
– Lorsque A est majoré par M, tout réel $\geq M$ est aussi un majorant de A. Ainsi, si A admet un majorant, il en admet une infinité.
– Lorsque A est minoré par m, tout réel $\leq m$ est aussi un minorant de A. Ainsi, si A admet un minorant, il en admet une infinité.

Exemple. Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Tout élément de $\mathbb{R}_-$ est un minorant de A. Tout élément de $[1, +\infty[$ est un majorant de A.

Définition

Un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$ est dit <u>borné</u> lorsqu'il est à la fois majoré et minoré.

Exemple. $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est borné.

Propriété

Un sous-ensemble A non-vide de $\mathbb{R}$ est borné si et seulement si :

$$\exists r \geq 0, \ \forall x \in A, \ |x| \leq r$$

Démonstration. On montre deux implications.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\forall x \in A,\ |x| \leq r$, alors $\forall x \in A,\ -r \leq x \leq r$, et donc A est majoré par r et minoré par $-r$: A est borné.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit A borné, et soient m un minorant, et M un majorant de A. Posons $r = \max(|m|, |M|)$. Alors :

$$|m| \leq r \implies -r \leq m \leq r$$
$$|M| \leq r \implies -r \leq M \leq r$$

Ainsi, pour tout $x \in A$:

$$-r \leq m \leq x \leq M \leq r \implies -r \leq x \leq r \implies |x| \leq r.$$

■

Maximum et minimum d'une partie de $\mathbb{R}$

Proposition-Définition

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- *Si A contient un élément M qui est majorant de A, alors cet élément est unique. Ce réel M est alors appelé le maximum de A et noté $M = \max(A)$. Ainsi :*
$$M = \max(A) \iff (M \in A \text{ et } \forall x \in A, x \leq M).$$
- *Si A contient un élément m qui est minorant de A, alors cet élément est unique. Ce réel m est alors appelé le minimum de A et noté $m = \min(A)$. Ainsi :*
$$m = \min(A) \iff (m \in A \text{ et } \forall x \in A, x \geq m).$$

Démonstration. Il s'agit de montrer l'unicité.

Supposons que A contiennent deux majorants M, M'. Alors puisque $M \in A$, $M \leq M'$ et puisque $M' \in A$, $M' \leq M$; donc par anti-symétrie, $M = M'$.

Supposons que A contiennent deux minorants m, m'. Alors puisque $m \in A$, $m \geq m'$ et puisque $m' \in A$, $m' \geq m$; donc par anti-symétrie, $m = m'$.

Remarque. Un ensemble admettant un maximum est majoré. Un ensemble admettant un minimum est minoré. Mais les réciproques sont fausses.

Par exemple $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est borné. Il admet pour maximum $1 = \frac{1}{1}$, et il est minoré mais n'admet aucun minimum. En effet, s'il admettait un minimum m, alors puisque $m \in A$, nécessairement $m = \frac{1}{a}$ pour $a \in \mathbb{N}^*$. Mais c'est contradictoire puisque $A \ni \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a} = m$.

Remarque. Toute partie finie non-vide de $\mathbb{R}$ est bornée, et admet un minimum ainsi qu'un maximum. En effet, indexons ses éléments dans l'ordre croissant :

$$A = \left\{a_1, a_2, \ldots, a_n\right\} \quad \text{avec} \quad a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

Alors a_1 est un minorant de A, et donc son minimum, et a_n est un majorant de A, et donc son maximum. On note $\min(a_1, \ldots, a_n)$ et $\max(a_1, \ldots, a_n)$ les minimum et maximum de l'ensemble fini $\left\{a_1, a_2, \ldots, a_n\right\}$.

Borne supérieure, borne inférieure

Proposition-Définition

Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$.

- *Si A est majoré, l'ensemble de ses majorants est un intervalle de la forme $[M, +\infty[$. Le réel M, est le plus petit des majorants de A, et on l'appelle la borne supérieure de A, noté $M = \sup(A)$.*
- *Si A est minoré, l'ensemble de ses minorants est un intervalle de la forme $]\infty, m]$. Le réel m, est le plus grand des minorants de A, et on l'appelle la borne inférieure de A, noté $m = \inf(A)$.*

Preuve admise. C'est une propriété fondamentale des réels qui découle de sa construction.

On pourra l'énoncer sous la forme d'un axiome :

Axiome de la borne supérieure.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- *Si A est majoré, A admet une borne supérieure notée* $\sup(A)$ *; c'est le plus petit de ses majorants.*
- *Si A est minoré, A admet une borne inférieure notée* $\inf(A)$ *; c'est le plus grand de ses minorants.*

Remarque.

– Le maximum de A, s'il existe, est aussi la borne supérieure de A. La réciproque est fausse.

– Le minimum de A, s'il existe, est aussi la borne inférieure de A. La réciproque est fausse.

Méthodes

On a le schéma suivant : soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- A est majoré ?

→ Si NON : A n'est pas majoré ; A n'a ni maximum, ni borne supérieure.

→ Si OUI : A est majoré ; A admet une infinité de majorants et une unique borne supérieure notée $\sup(A)$. Dans ce cas :

  - $\sup(A) \in A$?
  → Si OUI : A admet aussi un maximum et $\max(A) = \sup(A)$.
  → Si NON : A n'admet pas de maximum.

- A est minoré ?

→ Si NON : A n'est pas minoré ; A n'a ni minimum, ni borne inférieure.

→ Si OUI : A est minoré ; A admet une infinité de minorants et une unique borne inférieure notée $\inf(A)$. Dans ce cas :

  - $\inf(A) \in A$?
  → Si OUI : A admet aussi un minimum et $\min(A) = \inf(A)$.
  → Si NON : A n'admet pas de minimum.

Remarque. Si A est un intervalle, disons : $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$:

– A est majoré si et seulement si $b \in \mathbb{R}$; dans ce cas $\sup A = b$.

– A est minoré si et seulement si $a \in \mathbb{R}$; dans ce cas $\inf A = a$.

– A admet pour maximum b si et seulement si le crochet de droite est fermé.

– A admet pour minimum a si et seulement si le crochet de gauche est fermé.

Lorsque A n'est pas un intervalle :

Méthodes de démonstration :

• Comment montrer que A est majoré ?

Il faut montrer l'existence d'un réel $M \in \mathbb{R}$ majorant de A, c'est-à-dire tel que $\forall x \in A, x \leq M$.

• Comment montrer que A est minoré ?

Il faut montrer l'existence d'un réel $m \in \mathbb{R}$ minorant de A, c'est-à-dire tel que $\forall x \in A, x \geq M$.

• Comment montrer que A est borné ?

Soit on montre séparément que A majoré et minoré, soit on montre l'existence de $r \geq 0$ tel que $\forall \in A, |x| \leq r$.

- Comment montrer que A admet un maximum et le déterminer ?

Il faut montrer l'existence d'un réel $M \in A$ majorant de A.

- Comment montrer que A admet un minimum et le déterminer ?

Il faut montrer l'existence d'un réel $m \in A$ minorant de A.

- Soit A majoré. Comment déterminer $\sup(A)$?

Si $\max(A)$ existe, alors $\sup(A) = \max(A)$. Sinon :

On conjecture $M = \sup(A)$ pour un majorant M de A bien choisi. On montre ensuite par l'absurde que c'est le plus petit des majorants.

- Soit A minoré. Comment déterminer $\inf(A)$?

Si $\min(A)$ existe, alors $\inf(A) = \min(A)$. Sinon :

On conjecture $m = \inf(A)$ pour un minorant m de A bien choisi. On montre ensuite par l'absurde que c'est le plus grand des minorants.

Exemple. Soit : $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

– L'ensemble A est minoré par 0. En effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} > 0$.

– L'ensemble A est majoré par 1. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 1 \implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1.$$

– L'ensemble A est donc borné.

– $\max(A) = \sup(A) = 1$; en effet $1 \in A$ est un majorant de A.

– Montrons que $\inf(A) = 0$. On a vu que 0 et un minorant A. Montrons par l'absurde que de tous les minorants, 0 est le plus grand.

Supposons donc qu'il existe $m > 0$ qui soit minorant de A. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < m \leq \frac{1}{n}$$

et donc en passant à l'inverse dans l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < n \leq \frac{1}{m}$$

Donc l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est majoré. Contradiction. Ainsi, $\inf(A) = 0$.

Application

Nous terminons cette partie par le théorème suivant concernant les sous-ensembles majorés ou minorés de $\mathbb{Z}$. Il mérite d'être remarqué et nous sera utile dans la partie suivante.

Théorème

Toute partie non vide A de $\mathbb{Z}$:

– majorée admet un maximum,

– minorée admet un minimum.

Démonstration. On l'établit pour une partie minorée, la preuve de l'autre cas est analogue.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$, qui soit minoré. C'est aussi une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, et d'après l'axiome de la borne supérieure $\inf(A)$ existe.

Montrons que $\inf A \in A$. Par l'absurde :

Supposons que $\inf(A) \notin A$. Notons $m = \inf(A)$; alors $\forall a \in A, m \leq a$.

Puisque m est le plus grand minorant de A, $m+1$ n'est pas un minorant de A et donc il existe $a_0 \in A$ tel que :

$$m < a_0 < m+1$$

Puisque $m < a_0$, a_0 n'est pas un minorant de A. Et donc il existe $a_1 \in A \setminus \{a_0\}$ tel que :

$$m < a_1 < a_0 < m+1$$

En particulier, a_0 et a_1 sont des entiers tels que $a_0 - a_1 > 0$ et

$$\begin{cases} m < a_1 \\ a_0 < m+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -a_1 < -m \\ a_0 < m+1 \end{cases} \Longrightarrow a_0 - a_1 < 1$$

Ainsi $a_0 - a_1$ est un entier vérifiant :

$$0 < a_0 - a_1 < 1$$

ce qui est contradictoire puisqu'il n'existe aucun entier entre les deux entiers consécutifs 0 et 1. ■

Partie entière d'un réel

Proposition-Définition

Pour tout réel x, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$n \leq x < n+1$$

Cet entier est noté $\lfloor x \rfloor$ et appelé partie entière de x. Ainsi :

$$\underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Démonstration. Soit $A =]-\infty, x] \cap \mathbb{Z}$; A est une partie de $\mathbb{Z}$, et A est non vide, car autrement $\mathbb{Z}$ serait minoré par x. De plus A est majoré par x.

D'après le théorème 10, A admet un maximum n. Puisque $n+1 \in \mathbb{Z}$, et $n+1 \notin A$, nécessairement :

$$n \leq x < n+1$$

D'où l'existence.

Montrons l'unicité en considérant deux entiers n et n' vérifiant :

$$\begin{cases} n \leq x < n+1 \\ n' \leq x < n'+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-1 < n \leq x \\ x-1 < n' \leq x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-1 < n \leq x \\ -x \leq -n' < -x+1 \end{cases}$$

et donc en sommant les deux inégalités : $-1 < n - n' < 1$. Or $n - n' \in \mathbb{Z}$ et donc $n - n' = 0$, c'est-à-dire $n = n'$. ∎

Exemple.

$$\lfloor \pi \rfloor = 3 \text{ car } 3 \leq \pi < 4$$
$$\lfloor -\pi \rfloor = -4 \text{ car } -4 \leq \pi < -3$$

Il s'en suit immédiatement :

Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\qquad x \in \mathbb{Z} \iff \lfloor x \rfloor = x.$

Démonstration. Montrons deux implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $x \in \mathbb{Z}$, puisque $x \leq x < x+1$ on a bien par définition $\lfloor x \rfloor = x$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\lfloor x \rfloor = x$, puisque par définition $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, nécessairement $x \in \mathbb{Z}$. ∎

Exercice 6.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$; exprimer $\lfloor x+n \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$ et n.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$; exprimer $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

a) Par définition :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \implies \underbrace{\lfloor x \rfloor + n}_{\in \mathbb{Z}} \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$$

Donc $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

b) Par définition :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \implies -\lfloor x \rfloor - 1 < -x \leq -\lfloor x \rfloor$$

Premier cas : si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $-x \notin \mathbb{Z}$ donc $-x \neq -\lfloor x \rfloor$ et :

$$\underbrace{-\lfloor x \rfloor - 1}_{\in \mathbb{Z}} \leq -x < -\lfloor x \rfloor$$

Deuxième cas : si $x \in \mathbb{Z}$; alors $-x \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor -x \rfloor = -x = -\lfloor x \rfloor$.

Ainsi :

$$\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété

La partie entière de x est le plus grand entier $\leq x$:

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ n \leq x \implies n \leq \lfloor x \rfloor.$$

Démonstration. Par l'absurde : supposons que $n \leq x$ et $\lfloor x \rfloor < n$. Alors :

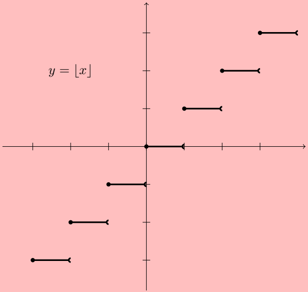
$$\lfloor x \rfloor < n \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \implies \lfloor x \rfloor < n < \lfloor x \rfloor + 1$$

donc n est un entier compris entre deux entiers consécutifs. C'est impossible. ∎

Étudions maintenant la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

Propriété

La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ et croissante. Sa courbe représentative a l'allure suivante :



Elle a pour limite aux bornes et aux points de discontinuité :

$$\lim_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \quad ; \quad \lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n$$

Démonstration. Montrons d'abord la croissance : soit $x \leq y$, alors

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 \Longrightarrow \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} < \underbrace{\lfloor y \rfloor + 1}_{\in \mathbb{Z}} \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$$

Ensuite par définition, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $x \in [n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$. D'où l'allure de la courbe.

Soit $x \in [n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$ et donc $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$.

Soit $x \in [n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$ et donc $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$.

Puisque $\lfloor x \rfloor \leq x$ on déduit avec le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$.

Pour finir, de $x < \lfloor x \rfloor + 1$ on déduit $x - 1 < \lfloor x \rfloor$ et donc avec le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$. ∎