Cours : Espaces probabilisés finis

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Expérience aléatoire et univers associé

Définition

• *On appelle expérience aléatoire une expérience dont les issues possibles sont connues a priori et peuvent varier lorsqu'on renouvelle l'expérience.*

• *On associe à une expérience aléatoire un ensemble Ω, appelé univers, dont les éléments sont toutes les issues possibles de l'expérience. Ses éléments sont appelés les issues ou éventualités.*

Remarque. Dans tout ce chapitre on ne considérera que des expériences aléatoires dont l'univers est fini : il y a un nombre fini d'issues possibles (ou éventualités).

Le cas des univers infinis ne sera traité qu'en deuxième année.

Exemples

• On lance un dé 6 ; on s'intéresse au numéro de face obtenu : c'est l'expérience aléatoire. Pour univers associé on prendra $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

• On tire une carte parmi un jeu de 32 cartes. C'est l'expérience aléatoire.
On s'intéresse à sa valeur et sa couleur.
On peut prendre comme univers : $\Omega = \left\{7\spadesuit, 8\spadesuit, \dots, \text{Roi}\clubsuit, \text{As}\clubsuit\right\}$;

mais aussi $\Omega = \left\{7, 8, \dots, \text{Roi}, \text{As}\right\} \times \left\{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\right\}$;

ou encore $\Omega = [\![1, 32]\!]$ une fois décidé d'une numérotation des cartes (par exemple par couleur $\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$ puis par valeur $7, \dots, 10$, Valet, Dame, Roi, As).

Dans tous les cas l'univers a pour cardinal 32.

• On tire une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Les éventualités sont les combinaisons de 5 cartes parmi 32 cartes.
On peut prendre pour univers l'ensemble des 5-combinaisons dans $\left\{7\spadesuit, 8\spadesuit, \dots, \text{Roi}\clubsuit, \text{As}\clubsuit\right\}$; l'univers a pour cardinal $\binom{32}{5}$.

Remarques

Le choix de l'univers dépend de la question posée. Si par exemple on lance deux dés, l'un blanc l'autre noir.

– Si l'on s'intéresse au résultat des deux dés, en distinguant les 2 dés (ex : (1 blanc, 6 noir) $\neq$ (6 blanc, 1 noir)), les éventualités sont les 2-listes (ou couples) d'éléments dans $[\![1,6]\!]$; l'univers est :

$$\Omega = [\![1,6]\!]^2 = \left\{(1,1),(1,2),\dots(6,5),(6,6)\right\}$$

(après avoir convenu que la première composante est le résultat du dé blanc, la deuxième celui du dé noir, par exemple). L'univers a pour cardinal $6^2 = 36$.

– Si l'on s'intéresse au résultat des deux dés sans distinguer les deux dés (ex : (1 blanc, 6 noir) = (6 blanc, 1 noir)), on peut prendre pour univers :

$$\Omega = \left\{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \mid i \leqslant j\right\}$$

de sorte que chaque résultat, "un dé donne i et l'autre j", ne soit comptabilisé qu'une seule fois comme éventualité. Le cardinal est $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 6 + 15 = 21$ (nombre de doubles + nombre de non-doubles) ; en effet :

$$\Omega = \underbrace{\left\{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \mid i = j\right\}}_{\text{autant que de 1-combinaisons}} \cup \underbrace{\left\{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \mid i < j\right\}}_{\text{autant que de 2-combinaisons}}$$

et la réunion est disjointe.

– Si l'on ne s'intéresse qu'à leur somme : $\Omega = [\![2,12]\!]$; $Card\ \Omega = 11$.

Événements

Définition

On considère une expérience aléatoire et sont univers associé Ω.

- *On appelle événement toute partie de Ω.*
- *L'ensemble des événements est $\mathscr{P}(\Omega)$.*
- *On appelle événement élémentaire tout évènement qui est un singleton (i.e. un événement réduit à une seule éventualité).*
- *On appelle événement impossible : $\varnothing$.*
- *On appelle événement certain : Ω.*
- *Soit $A \subset \Omega$ un évènement ; son événement contraire est $\overline{A} = \complement_\Omega A$.*
- *Deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.*
- *On dit que l'événement A implique l'événement B si $A \subset B$.*
- *L'événement "A ou B" est l'événement $A \cup B$.*
- *L'événement "A et B" est l'événement $A \cap B$.*

Exemple

On lance un dé 6 ; on prend pour univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

– L'événement "le résultat est pair" est la partie $P = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.

– L'événement "le résultat est impair" est la partie $I = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$.

– Ces deux événements ont incompatibles : leur intersection est vide. Autrement dit : l'événement "P et I" est l'événement impossible.

– Ces deux événement sont contraires : $P = \overline{I}$.

– L'événement "obtenir 7" est l'événement impossible : $\varnothing$.

– Les événement élémentaires sont les singletons : $\{1\}$, $\{2\}$, $\ldots \{6\}$.

– L'événement "le résultat est pair" implique l'événement "le résultat est au moins 2" ; en effet : $\{2, 4, 6\} \subset \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exercices

Exercice. On lance deux fois un dé 6. En prenant pour univers $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ décrire mathématiquement les événements suivants :
– A : "le premier lancer donne 1, le deuxième donne 6",
– B : "le deuxième lancer donne 6",
– C : "la somme des deux lancers donne 5",
– D : "le premier lancer donne un résultat inférieur ou égal au second".

Résolution.

$$A = \left\{(1,6)\right\}$$

$$B = [\![1,6]\!] \times \left\{6\right\}$$

$$C = \left\{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \mid i+j=5\right\} = \left\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\right\}$$

$$D = \left\{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \mid i \leqslant j\right\}$$

Exercice. Soient A, B, C 3 événements d'un univers Ω. Écrire en fonction de A, B, C les événements suivants :

– "les événements A, B, C sont tous les 3 réalisés",
– "les événements A, B, C ne sont pas tous les 3 réalisés",
– "aucun des événements A, B, C n'est réalisé",
– "seul A est réalisé",
– "seul l'un des trois est réalisé",
– "au plus deux sont réalisés",
– "si A et B sont réalisés alors C aussi".

Résolution.

– "Les événements A, B, C sont tous les 3 réalisés" : $A \cap B \cap C$.
– "Les événements A, B, C ne sont pas tous réalisés" : $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.
– "Aucun des événements A, B, C n'est réalisé" : $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$.
– "Seul A est réalisé" : $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
– "Seul l'un des trois est réalisé" : $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B})$.
– "Au plus deux sont réalisés" : $\overline{A \cap B \cap C}$.
– "Si A et B sont réalisés alors C aussi" : $\overline{A \cap B} \cup C$.

Espace probabilisable fini - Système complet d'événements

Définition

On appelle espace probabilisable fini le couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ où Ω est un ensemble fini et $\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble de ses parties, ou évènements.

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. On appelle système complet d'évènement, ou partition de Ω, toute famille d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) vérifiant :

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,
- $\forall (i,j) \in [[1,n]]^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

Autrement dit une famille d'événements 2 à 2 incompatibles dont la réunion est l'univers Ω.

Exemples

– Pour tout événement A, la famille $A, \overline{A}$ forme un système complet d'événements.

– Trois urnes contiennent chacune des boules blanches et des boules noires. L'expérience consiste à choisir une urne au hasard et à tirer une boule dans l'urne. Prenons pour univers $\Omega = [\![1,3]\!] \times \{B, N\}$.

– $A_1 = \{1\} \times \{B, N\}$ est l'événement : "on choisit l'urne 1".
– $A_2 = \{2\} \times \{B, N\}$ est l'événement : "on choisit l'urne 2".
– $A_3 = \{3\} \times \{B, N\}$ est l'événement : "on choisit l'urne 3".

A_1, A_2, A_3 forment un système complet d'événements.
Durant l'expérience, un et un seul des événements A_1, A_2, A_3 sera réalisé.

Partition d'un événement

Plus généralement :

Définition

Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable et $A \subset \Omega$ un événement. Une <u>partition de l'événement A</u> est une famille $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'événements tels que :

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$,
- $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

Remarque. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ est un système complet d'événements, et si A est un événement, la famille $A \cap A_1, A \cap A_2, \dots, A \cap A_n$ est une partition de l'événement A. En effet : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap A_i) = A \cap \bigcup_{=1}^{n} A_i = A \cap \Omega = A$,

$$i \neq j \implies (A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = (A \cap A) \cap (A_i \cap A_j) = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Espace probabilisé fini

Définition

• *Soit* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *un espace probabilisable fini. On appelle* *probabilité sur* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *(ou probabilité sur* Ω*), toute application :*

$$\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2,\ A \cap B = \varnothing \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

• *On appelle* *espace probabilisé fini* *tout triplet* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *où* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *est un espace probabilisable fini et* $\mathbb{P}$ *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

• *Si* A *est un événement,* $\mathbb{P}(A)$ *est la* *probabilité de l'événement* A.
La probabilité de l'événement certain est $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
La probabilité de l'événement impossible est $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Probabilité uniforme

Proposition-Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisé fini ; l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_u : \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{Card\ A}{Card\ \Omega} \end{array}$$

est une probabilité appelée probabilité uniforme.

Démonstration. L'application $\mathbb{P}_u$ est bien définie car Ω est fini non vide donc $Card\ \Omega \neq 0$ et : $A \subset \Omega \implies 0 \leqslant Card\ A \leqslant Card\ \Omega \implies \dfrac{Card\ A}{Card\ \Omega} \in [0,1]$.

Montrons que $\mathbb{P}_u$ est une probabilité :

• $\mathbb{P}_u(\Omega) = \dfrac{Card\ \Omega}{Card\ \Omega} = 1$. • Soient A, B deux événements incompatibles. Alors $A \cap B = \varnothing \implies Card\ A \cup B = Card\ A + Card\ B$ donc :

$$\mathbb{P}_u(A \cup B) = \frac{Card\ A + Card\ B}{Card\ \Omega} = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} + \frac{Card\ B}{Card\ \Omega} = \mathbb{P}_u(A) + \mathbb{P}_u(B) \qquad \blacksquare$$

Remarque. Quand choisir la probabilité uniforme ?
Lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables (c'est-à-dire de même probabilité $\frac{1}{Card\ \Omega}$).
C'est le cas implicitement lorsque dans l'énoncé on a les locutions : "on choisit au hasard...", "on lance un dé non-pipé", "on lance une pièce équilibrée".

Exercice. On lance un dé 6 non-pipé. Quelle est la probabilité p d'obtenir un chiffre pair ?

Résolution. On choisit comme univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$ que l'on munit de la probabilité uniforme (chaque issue étant équiprobable) ; alors :

$$p = \frac{Card\ \{2, 4, 6\}}{Card\ \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Exercice. On lance 2 dés 6 non-pipés. Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit égale à 2 ? à 3 ? à 4 ?

Résolution. On considère les dés discernables, et l'on prend comme univers $[\![1,6]\!]^2$; avec ce choix toutes les issues sont équiprobables ; on le munit donc de la probabilité uniforme.
Soit A_2 l'événement "la somme des dés vaut 2". Alors $A_2 = \{(1,1)\}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}_u(A_2) = \frac{Card\ A_2}{Card\ \Omega} = \frac{1}{36}.$$

Soit A_3 l'événement "la somme des dés vaut 3". Alors $A_3 = \{(1,2),(2,1)\}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}_u(A_3) = \frac{Card\ A_3}{Card\ \Omega} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Soit A_4 l'événement "la somme des dés vaut 4". Alors $A_4 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}_u(A_4) = \frac{Card\ A_4}{Card\ \Omega} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Exemple de probabilité non-uniforme

Exemple.

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher, 3 blanches et 2 noires. On tire une boule dans l'urne et on s'intéresse à sa couleur ; les issues possibles sont blanc et noir.

On choisit comme univers $\Omega = \{B, N\}$; quel espace probabilisé considérer ? (ou en d'autres termes de quelle probabilité $\mathbb{P}$ le munir ?)
Pour cela il faut définir l'image par $\mathbb{P}$ de tous les éléments de :

$$\mathscr{P}(\Omega) = \Big\{\varnothing, \{B\}, \{N\}, \{B, N\}\Big\}.$$

Par définition : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}\big(\{B, N\}\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
On définit $\mathbb{P}$ en posant :

$$\mathbb{P}\big(\{B\}\big) = \frac{3}{5} \qquad ; \qquad \mathbb{P}\big(\{N\}\big) = \frac{2}{5}.$$

Exemple de probabilité non-uniforme

En effet : changeons l'univers pour nous retrouver dans une situation d'équiprobabilité. En distinguant les boules noires et blanches à l'aide d'une numéro B_1, B_2, B_3 et N_1, N_2, et en considérant l'univers :

$$\Omega = \left\{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\right\},$$

chaque issue devient équiprobable.
On munit Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_u$. L'événement "Tirer une boule blanche" correspond à l'événement $\left\{B_1, B_2, B_3\right\}$, et l'événement "Tirer une boule noire" correspond à l'événement $\left\{N_1, N_2\right\}$.
Ainsi :

$$\mathbb{P}(\left\{B\right\}) = \mathbb{P}_u\left(\left\{B_1, B_2, B_3\right\}\right) = \frac{Card\ \left\{B_1, B_2, B_3\right\}}{Card\ \left\{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\right\}} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(\left\{N\right\}) = \mathbb{P}_u\left(\left\{N_1, N_2\right\}\right) = \frac{Card\ \left\{N_1, N_2\right\}}{Card\ \left\{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\right\}} = \frac{2}{5}$$

Propriétés

Toute probabilité vérifie les propriétés suivantes.

Propriété

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Alors :*

- $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2,\ A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
- $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2,\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- *Si* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *est une partition de l'événement* A *:*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration. On montre successivement les 5 propriétés :

• ? $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$?
A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événement : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
Donc :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) \Longrightarrow \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

• ? $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$?

D'après la propriété précédente :

$$\mathbb{P}(\varnothing) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\varnothing}) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

• ? $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$?

Si $A \subset B$, A et $B \setminus A$ forment une partition de B : $A \cup (B \setminus A) = B$ et $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

Or par définition $\mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant 0$, donc $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

• ? $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$?

On a :

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \underset{A \cap (B \setminus A) = \varnothing}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \qquad (1)$$

et

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) \underset{(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \varnothing}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) \qquad (2)$$

Ainsi de (1) et (2) découle :

$$\mathbb{P}(A \cup B) \underset{(1)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \underset{(2)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

• Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de l'événement A ; montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

(I) Pour $n = 1$, $A = A_1$ et $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) = \sum_{i=1}^{1} \mathbb{P}(A_i)$.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ une partition de A. Posons $B = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Ainsi $A_1, \ldots, A_n$ est une partition de B, donc par hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Mais d'autre part : $A = (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1} = B \cup A_{n+1}$ et $B \cap A_{n+1} = \varnothing$; en effet :

$$\begin{aligned} B \cap A_{n+1} &= (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} \\ &= (A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1}) \\ &= \varnothing \cup \cdots \cup \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

Ainsi par définition d'une probabilté :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \underset{HR}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$$

L'assertion reste donc vraie au rang $n+1$.
On conclut à l'aide du principe de récurrence. $\blacksquare$

Comment définir une probabilité ?

Théorème

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini avec $\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\right\}$ de cardinal n. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ une famille de n réels positifs.

Pour qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\left(\left\{\omega_i\right\}\right) = p_i,$$

il faut et il suffit que :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

De plus, dans ce cas :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}\left(\left\{\omega_i\right\}\right)$$

Démonstration. On montre deux implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}\left(\left\{\omega_i\right\}\right) = p_i$, alors puisque la famille d'événements élémentaires $\left\{\omega_1\right\}, \left\{\omega_2\right\}, \dots, \left\{\omega_n\right\}$ est une système complet d'événements :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\left\{\omega_i\right\}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

De plus pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a bien :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ w_i \in A}} p_i = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}\left(\left\{\omega_i\right\}\right)$$

car la famille constituée des $\left\{\omega_i\right\}$ pour tout $w_i \in A$ forme une partition de A.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ et définissons l'application $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i.$$

Puisque les p_i sont tous positifs :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Ainsi, cela définit bien une application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$.

Montrons que c'est une probabilité sur Ω. Il y a deux points à vérifier :

•
$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in \Omega}} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

• Soient A et B deux événements incompatibles, *i.e.* $A \cap B = \varnothing$. Quitte à renuméroter les ω_i, on peut supposer que :

$$A = \left\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{\omega_{q+1}, \omega_{q+2}, \ldots, \omega_r\right\}$$

avec $(q, r) \in [\![0, n]\!]^2$ et $q \leqslant r$ (A ou B peut être vide).
Alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A \cup B}} p_i = \sum_{i=1}^{r} p_i = \sum_{i=1}^{q} p_i + \sum_{i=q+1}^{r} p_i = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Ainsi les deux point sont vérifiés : $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω. ■

Exercice

Exercice. On lance un dé 6 pipé de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle à la valeur de la face.

a) Quel espace probabilisé est à considérer ?

b) Quelle est la probabilité que le résultat du lancer soit un nombre pair ?

Résolution.

a) On choisit comme univers $\Omega = [\![1,6]\!]$. On note $p = \mathbb{P}\left(\{1\}\right) \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\forall k \in [\![1,6]\!],\ \mathbb{P}\left(\{k\}\right) = k \times p$. Alors $\mathbb{P}$ et une probabilité sur Ω si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}\left(\{k\}\right) = 1 \iff \sum_{k=1}^{6} k \times p = 1 \iff p \times \sum_{k=1}^{6} k = 1 \iff p \times 21 = 1 \iff p = \frac{1}{21}$$

Ainsi on considère l'espace probabilisé $\left([\![1,6]\!], \mathscr{P}\left([\![1,6]\!]\right), \mathbb{P}\right)$ défini par :

$$\forall k \in [\![1,6]\!],\ \mathbb{P}\left(\{k\}\right) = \frac{k}{21}.$$

b) L'événement "obtenir un résultat pair" s'écrit : $A = \left\{2,4,6\right\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\left\{2\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{4\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{6\right\}\right)\\ &= \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21}\\ &= \frac{12}{21} = \frac{4}{7}\end{aligned}$$

(il est plus probable d'obtenir un résultat pair qu'impair).

Exemple.

On lance deux dés 6 non-pipés et l'on s'intéresse à la somme des chiffres obtenus ; comme dans un exercice précédent. Mais cette fois on choisit comme univers $\Omega = [\![2, 12]\!]$. De quelle probabilité la munir ?
Notons les événement élémentaires $A_k = \{k\}$ pour tout $k \in \Omega$. On n'est pas en situation d'équiprobabilité puisque, comme déjà calculé plus haut, $\mathbb{P}(A_2) \neq \mathbb{P}(A_3)$.
Considérons l'univers $\Omega' = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$ muni de la probabilité uniforme.
Alors, dans cet univers :

$$A_k = \left\{(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid i + j = k\right\}$$

Calculons son cardinal.
– Premier cas : si $k \in [\![2, 7,]\!]$:
Alors i, j varient simultanément de 1 à $k-1$ et de $k-1$ à 1, et donc $Card \quad A_k = k - 1$. (Voir aussi une exercice déjà traité du chapitre "Dénombrements"). Ainsi :

$$\mathbb{P}_u(A_k) = \frac{Card \ A_k}{Card \ \Omega'} = \frac{k-1}{36}$$

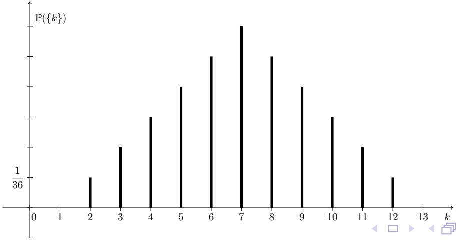
– Deuxième cas : si $k \in [\![8, 12,]\!]$:
Dans ce cas i, j varient simultanément de $k-6$ à 6 et de 6 à $k-6$, et donc $Card \quad A_k = 6-(k-6)+1 = 13-k$. Ainsi :

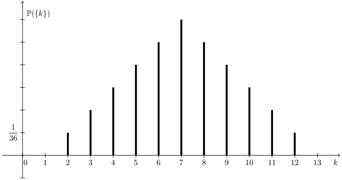
$$\mathbb{P}_u(A_k) = \frac{Card \ A_k}{Card \ \Omega'} = \frac{13-k}{36}.$$

(Bien sûr, puisque A_2, A_3, ..., A_{12} forment un système complet d'événements (le résultat ne peut être que 2, 3,...,12), on a bien $\sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}_u(A_k) = 1$.)
Ainsi, on doit munir $\Omega = [\![2, 12]\!]$ de la probabilité $\mathbb{P}$ définie par :

$$\forall k \in [\![2, 12]\!],\ \mathbb{P}\left(\left\{k\right\}\right) = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{si } k \in [\![2, 7]\!] \\ \frac{13-k}{36} & \text{si } k \in [\![8, 12]\!] \end{cases}$$

Que l'on peut représenter graphiquement :





Exercice. Lors d'un jeu, deux dés sont lancés, et on vous demande de miser sur la parité du résultat : la somme des dés est-elle paire ou impaire ?

Votre ami vous conseille de miser sur les pairs : "car entre 2 et 12 il y a plus de nombres pairs qu'impairs", dit-il.

Que lui répondez-vous ? Devriez-vous miser plutôt sur les pairs ou les impairs ?

Résolution. Son argument est faux car les différents résultats ne sont pas équiprobables. D'ailleurs :

$$\mathbb{P}(pair) = \frac{(1+3+5)\times 2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Les deux choix pair/impair sont eux équiprobables.

Probabilités conditionnelles

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
Pour tout événement $B \subset \Omega$, on appelle probabilité de B sachant A, notée $\mathbb{P}(B/A)$ ou $\mathbb{P}_A(B)$, le réel :

$$\boxed{\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}}.$$

Exemples.

• On lance un dé 6 non pipé. Sachant que la face obtenue est paire, quelle est la probabilité que ce soit un 2 ? un 3 ?

Considérons l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]$ muni de la probabilité uniforme, et les événements :

– A : "le résultat est pair" ; $A = \{2,4,6\}$.

– B : "le résultat est 2" ; $B = \{2\}$.

– C : "le résultat est 3" ; $C = \{3\}$.

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{2\})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbb{P}(C/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0}{\frac{3}{6}} = 0.$$

La probabilité d'obtenir 2 sachant que le résultat est pair est $\frac{1}{3}$.
La probabilité d'obtenir 3 sachant que le résultat est pair est nulle.

• On considère une famille ayant 2 enfants. Sachant que l'un des enfants est une fille quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ? (on suppose qu'à la naissance, chaque genre est équiprobable).

Soit $\Omega = \Big\{(G,G),(G,F),(F,G),(F,F)\Big\}$ muni de la probabilité uniforme, et les événements :

– A : "l'un des enfants est une fille",

– B : l'un des enfants est un garçon".

On doit calculer $\mathbb{P}(B/A)$:

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(G,F),(F,G)\})}{\mathbb{P}(\{(F,F),(G,F),(F,G)\})} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Sachant que l'un des deux enfants est une fille, la probabilité que l'autre soit un garçon est de $\frac{2}{3}$.

Proposition-Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et soit* A *un événement tel que* $\mathbb{P}(A) \neq 0$. *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_A : \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \mathbb{P}(B/A) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω*, appelée* *probabilité conditionnée par* A.

Démonstration. Montrons d'abord que l'application est bien définie. Soit B un événement quelconque. Puisque $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est bien défini et positif. De plus

$$A \cap B \subset A \implies \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) \underset{\mathbb{P}(A)>0}{\implies} 0 \leqslant \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant 1$$

ainsi $\mathbb{P}_A(B) \in [0,1]$; l'application $\mathbb{P}_A$ est bien définie.

Il faut maintenant montrer que c'est une probabilité ; il y a deux conditions à vérifier.

- $\mathbb{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$; or $A \subset \Omega \implies \Omega \cap A = A \implies \mathbb{P}_A(\Omega) = 1$.
- Soient B et C deux événements incompatibles : $B \cap C = \varnothing$.

$$\mathbb{P}_A(B \cup C) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap (B \cup C)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left((A \cap B) \cup (A \cap C)\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Or B et C étant incompatibles, il en est de même de $A \cap B$ et $A \cap C$:

$$B \cap C = \varnothing \implies (A \cap B) \cap (A \cap C) = (A \cap A) \cap (B \cap C) = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}_A(B \cup C) = \frac{\mathbb{P}\left((A \cap B) \cup (A \cap C)\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C)$$

Ainsi $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur Ω. ■

En particulier, toutes les propriétés vérifiées pour une probabilité, le sont aussi pour une probabilité conditionnée.

Propriété

Sous les mêmes hypothèses :

- $\forall B \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.
- $\mathbb{P}_A(\varnothing) = 0$.
- $\forall (B, C) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $B \subset C \implies \mathbb{P}_A(B) \leqslant \mathbb{P}_A(C)$.
- $\forall (B, C) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$.
- *Si* $B_1, B_2, \dots, B_n$ *est une partition de l'événement* B *:*

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) + \cdots + \mathbb{P}_A(B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_A(B_i).$$

Formule de conditionnement

Il découle immédiatement de la formule des probabilités conditionnelles la formule suivante qui permet le calcul de la probabilité de l'intersection de deux événements.

Propriété

Formule de conditionnement.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini et* A *et* B *deux événements avec* $\mathbb{P}(A) \neq 0$. *Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B/A)}.$$

Démonstration. Sous ces hypothèses : $\mathbb{P}(B/A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ dont on déduit $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B/A)$. ∎

Exercice

Exercice. Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche suivie d'une noire ?

Résolution. Soit B_i (respectivement N_i) l'événement : la i-ème boule tirée est blanche (respectivement noire) ; avec $i \in \{1, 2\}$. On souhaite calculer la probabilité de l'événement $B_1 \cap N_2$. D'après le formule de conditionnement :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(N_2/B_1).$$

Puisqu'il y a initialement 3 blanches et 2 noires : $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{3}{5}$.
Sachant B_1, l'urne ne contient après le premier tir plus que 2 blanches et deux noires. Ainsi $\mathbb{P}(N_2/B_1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
Finalement :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

Remarque. En général on applique cette formule dans l'ordre chronologique : on calcule la probabilité du premier événement $\mathbb{P}(A)$ puis on calcule la probabilité du deuxième événement conditionnée par le premier, $\mathbb{P}(B/A)$ directement en se plaçant dans la situation où A est réalisé (on n'utilise pas la formule des probabilités conditionnées pour le calcul de $\mathbb{P}(B/A)$).

La formule de conditionnement se généralise pour le calcul de la probabilité de l'intersection de plusieurs événements. C'est la formule des probabilités composées :

Théorème

Formule des probabilités composées.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Soient* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$*, et des événements* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *tels que* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$*. Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)}.$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \geqslant 2$.

(I) pour $n = 2$ c'est la formule de conditionnement.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n \geqslant 2$ fixé. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$.
L'événement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ implique l'événement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ car :

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n \quad \subset \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$$

et donc :

$$0 < \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1});$$

en particulier $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

D'après la formule de conditionnement :

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) \\
= \ & \mathbb{P}\left((A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1}\right) \\
= \ & \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}(A_{n+1}) \\
\underset{(HR)}{=} \ & \underbrace{\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)}_{=\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)} \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}(A_{n+1})
\end{aligned}
$$

L'assertion reste donc vraie au rang $n+1$.

On conclut à l'aide du principe de récurrence. ■

Exemple

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 1 blanche, 2 vertes et 3 rouges. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne.
Quelle est la probabilité de tirer les boules dans l'ordre suivant : *BVRVRR* ?

Notons B_i (respectivement V_i, R_i) les événements : "la i-ème boule tirée est blanche (respectivement, verte, rouge)" ; $i \in \{1,6\}$.
On applique la formule des probabilités composées pour calculer la probabilité de l'événement :

$$B_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap R_5 \cap R_6.$$

L'évènement $B_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap R_5$ est de probabilité non-nulle donc :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(B_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap R_5 \cap R_6)\\ =&\mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(V_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap V_2}(R_3) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap V_2 \cap R_3}(V_4) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap V_4}(R_5)\\ &\times \mathbb{P}_{B_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap R_5}(R_6)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = \boxed{\frac{1}{60}}$$

Remarque : Autre méthode.

En numérotant les boules chaque issue est équiprobable et l'univers est l'ensemble des permutations de 6 éléments ; son cardinal est donc $6!$.

Mais il y a $2! = 2$ issues où les vertes sont à la même position et $3! = 6$ issues où les rouges sont aux mêmes positions ; donc 2×6 issues donnant le résultat recherché.

Soit une probabilité de $\dfrac{2 \times 6}{6!} = \dfrac{2}{5!} = \dfrac{2}{120} = \dfrac{1}{60}$.

Exercice. Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. on tire successivement et sans remise 4 boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 2 noires dans cet ordre ?

Résolution. Pour $i = 1, \dots, 4$, notons B_i (respectivement N_i) les événements "la i-ème boule tirée est blanche (respectivement noire)". On doit calculer $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4)$; à l'aide de la formule des probabilités composées :

$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) \neq 0$ donc :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap N_4) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(N_3) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2 \cap N_3}(N_4)$$
$$= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \boxed{\frac{3}{35}}$$

Exercice. Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. on tire successivement et sans remise 4 boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 2 noires dans cet ordre ?

Remarque : autre méthode.

En numérotant les boules chaque issue est équiprobable. L'univers Ω est l'ensemble des 4-listes sans répétitions dans un ensemble de cardinal 7. Son cardinal est donc

$$Card\ (\Omega) = \frac{7!}{(7-4)!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4.$$

Les issues favorables sont constituées (d'un couple) d'une deux liste sans répétition parmi les 4 blanches, et d'une 2-liste sans répétition parmi les 3 noires ; donc

$$\frac{4!}{2!} \times \frac{3!}{1!} = (4 \times 3) \times (3 \times 2)$$

issues donnant le résultat recherché.

La probabilité est donc :

$$\frac{4 \times 3 \times 3 \times 2}{7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{3}{35}.$$

Formule des probabilités totales

Le calcul d'une probabilité nécessite souvent une partition de cas, que l'on avait coutume de schématiser dans le secondaire à l'aide d'un arbre. Le plus souvent, ce calcul sur un arbre revient à effectuer le calcul en partitionnant sur un système complet d'événement et à appliquer la formule des probabilités totales :

Théorème

Formule des probabilités totales.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *un système complet d'événements. Alors pour tout événement* B *:*

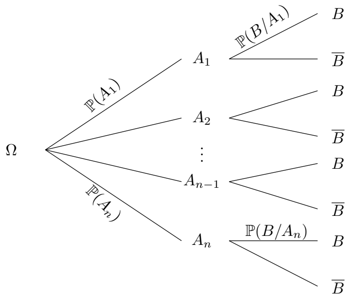
$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)}.$$

Si de plus $\forall i \in [[1, n]],\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$ *:*

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i)}.$$

Remarque. Schématisons à l'aide d'un arbre, la formule

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i):$$



On veillera bien à perdre l'habitude du calcul à l'aide d'un arbre, au profit de cette formule ; sauf éventuellement lorsque le SCE contient entre 2 et 4 événements.

Démonstration. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est un système complet d'événement alors $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$,..., $A_n \cap B$ est une partition de B ; en effet :

$$\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \Omega \cap B = B$$

$$i \neq j \implies (A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = (A_i \cap A_j) \cap (B \cap B) = \varnothing \cap B = \varnothing.$$

par associativité et commutativité de $\cap$ et distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

Ainsi (cf. propriété 1) : $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)$.

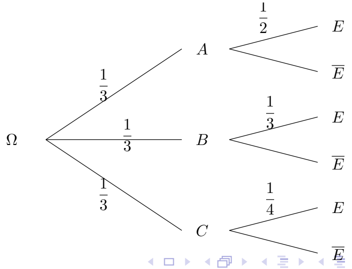
Si de plus pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors d'après la formule de conditionnement $\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i)$. Ainsi :

$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B/A_i)$. ■

Exemple. 3 urnes a, b, c contiennent des boules blanches et noires :
– a contient 1 boule blanche et 1 noire,
– b contient 1 boule blanche et 2 noires,
– c contient 1 boule blanche et 3 noires.

On choisit une urne au hasard, et on tire une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
Soit A (respectivement B, C) l'événement : "on choisit l'urne a" (respectivement b,c) ; A, B, C est un système complet d'événement. Soit E l'événement "on tire une boule blanche". D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(E/A)\\ &+\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(E/B)\\ &+\mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(E/C)\\ &=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\\ &=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{6+4+3}{36}=\boxed{\frac{13}{36}}\end{aligned}$$



Formule de Bayes

Théorème

Formule de Bayes.

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *une système complet d'événements tels que* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$*. Soit* B *un événement tel que* $\mathbb{P}(B) \neq 0$ *; alors pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$ *:*

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}}$$

Démonstration. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, par définition d'une probabilité conditionnée : $\mathbb{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(B)}$ et d'après la formule de conditionnement :

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}$$

D'après la formule des probabilités totales, avec pour SCE $A_1, A_2, \ldots, A_n$: $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$, et donc :

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}.$$

■

Un cas particulier récurrent est donné par :

Corollaire

Soient A un événement tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \times \mathbb{P}(\overline{A})}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème avec pour SCE A, $\overline{A}$. ∎

Exercice

Exercice. Le quart d'une population a été vacciné contre la grippe. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades 1 vacciné pour 4 non-vaccinés.

1. Le vaccin est-il efficace ?
2. On sait en outre que parmi les vaccinés 1 personne sur 12 est malade. Quelle est la probabilité de tomber malade pour une personne non vaccinée ?

Résolution.

Dans la population considérons les événements :

– V : "être vacciné",

– M : "être malade".

Les données de l'énoncé peuvent alors se retranscrire :

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}_M(\overline{V}) = 4 \times \mathbb{P}_M(V)$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(\overline{V}) = 1 - \mathbb{P}(V) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}_M(\overline{V}) + \mathbb{P}_M(V) = 1 \implies 4 \times \mathbb{P}_M(V) + \mathbb{P}_M(V) = 1 \implies \begin{cases} \mathbb{P}_M(V) = \frac{1}{5} \\ \mathbb{P}_M(\overline{V}) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

1) Il s'agit de comparer $\mathbb{P}_V(M)$ et $\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)$. D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_M(V) = \frac{1}{5} = \frac{\mathbb{P}_V(M) \times \mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{1}{4} \times \frac{\mathbb{P}_V(M)}{\mathbb{P}(M)}$$

$$\mathbb{P}_M(\overline{V}) = \frac{4}{5} = \frac{\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) \times \mathbb{P}(\overline{V})}{\mathbb{P}(M)} = \frac{3}{4} \times \frac{\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)}{\mathbb{P}(M)}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}_V(M) = \frac{4}{5} \times \mathbb{P}(M) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{16}{15} \times \mathbb{P}(M)$$

Or $\frac{16}{15} > \frac{4}{5} \iff 16 \times 5 > 15 \times 4 \iff 4 > 3$. Donc le vaccin est efficace.

2) On a $\mathbb{P}_V(M) = \frac{1}{12}$; il s'agit de calculer $\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)$.

$$\mathbb{P}_V(M) = \frac{1}{12} = \frac{4}{5} \times \mathbb{P}(M) \Longrightarrow \mathbb{P}(M) = \frac{5}{12 \times 4} = \frac{5}{48}$$

$$\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{16}{15} \times \mathbb{P}(M) = \frac{16}{15} \times \frac{5}{48} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

Événements indépendants

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On dit que deux événements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exemple. On lance un dé 6 non pipé ; on considère les deux événements :

– A : "obtenir un chiffre pair",

– B : "obtenir un chiffre $\geqslant 3$".

A et B sont-ils indépendants ? On calcule $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap B)$:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card\ \{2,4,6\}}{Card\ [\![1,6]\!]} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{Card\ \{3,4,5,6\}}{Card\ [\![1,6]\!]} = \frac{2}{3} \quad ;$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{Card\ \{4,6\}}{Card\ [\![1,6]\!]} = \frac{1}{3} \implies \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Oui les événements A et B sont indépendants.

Propriété

Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A et B deux événements.

- *Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, A et B sont indépendants $\iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.*
- *Si A et B sont incompatibles et si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors A et B ne sont pas indépendants.*
- *A et $\varnothing$ sont indépendants ; A et Ω sont indépendants.*
- *Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Démonstration. On les démontre dans l'ordre.

• Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, d'après la formule de conditionnement $P(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$. Ainsi A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ ssi $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$.

• Soient A et B incompatibles : $A \cap B = \varnothing \implies \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ puisque $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

• A et $\varnothing$ sont indépendants : $\mathbb{P}(A \cap \varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 = \mathbb{P}(A) \times 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\varnothing)$.
A et Ω sont indépendants : $\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \times 1 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\Omega)$.

• Supposons que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$; montrons que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

$$B = \Omega \cap B = (A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Or $(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ sont incompatibles puisque A et $\overline{A}$ le sont. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A)) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B)$$

Ainsi $\overline{A}$ et B sont indépendants.
Puisque A et B jouent le même rôle, par symétrie A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. Mais alors d'après ce que l'on vient d'établir $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

Exemple. On reprend l'exemple précédent :

– A : "obtenir un chiffre pair",

– B : "obtenir un chiffre $\geqslant 3$".

• Les événements B et C : "Obtenir un chiffre impair" sont ils indépendants ?

Oui, car A et B sont indépendants et $C = \overline{A}$.

• Les événements A : "obtenir un chiffre pair" et C : "obtenir un chiffre impair" sont-ils indépendants ?

Non, car ils sont incompatibles : $A \cap C = A \cap \overline{A} = \varnothing$ et de probabilités non nulles.

Expériences indépendantes

Définition

Soient deux expériences $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ d'univers associés Ω_1 et Ω_2 munis respectivement des probabilités $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$.
L'expérience consistant à réaliser les deux expériences $\mathscr{E}_1$ suivi de $\mathscr{E}_2$ a pour univers associé $\Omega_1 \times \Omega_2$.
On dit que les expériences $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont <u>*indépendantes*</u> *si $\Omega_1 \times \Omega_2$ peut être muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ telle que ;*

$$\forall A \subset \Omega_1, \forall B \subset \Omega_2,\ \mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}_1(A) \times \mathbb{P}_2(B).$$

Remarque.

Autrement dit : $\forall A \subset \Omega_1, \forall B \subset \Omega_2$, les événements : $A \times \Omega_2$ et $\Omega_1 \times B$ sont indépendants dans $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{P}(\Omega_1 \times \Omega_2), \mathbb{P})$.

En effet :

$$\begin{aligned} A \times B &= \Big\{(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid a \in A, b \in B\Big\} \\ &= \Big\{(a, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid a \in A\Big\} \cap \Big\{(\omega, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid b \in B\Big\} \\ &= (A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B) \end{aligned}$$

et :

$$\mathbb{P}(A \times \Omega_2) = \mathbb{P}_1(A) \quad ; \quad \mathbb{P}(\Omega_1 \times B) = \mathbb{P}_2(B).$$

Dans la pratique deux événements décrivant les issues de deux expériences indépendantes sont eux-mêmes indépendants.

Remarque. Deux expériences dont les issues de l'une n'influent pas sur l'autre sont implicitement considérés comme indépendantes ; exemples :
– on lance deux fois un dé 6 ; les deux lancers sont indépendants,
– on tire successivement et avec remise deux boules dans une même urne ; les deux tirages sont indépendants,
– on tire successivement et sans remise deux boules dans une même urne ; les deux tirages ne sont pas indépendants : le contenu de l'urne a changé à la suite du premier tirage.
Exemples. On lance deux fois un dé 6 non pipé. Quelle est la probabilité d'obtenir un double 6.

Les deux lancers sont indépendants ; soit A l'événement : "le premier dé donne 6" et B l'événement : "le deuxième dé donne 6". Les événements A et B sont indépendants, donc : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Indépendance mutuelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A_1, A_2, \dots A_n$ une famille d'événements. On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour toute partie $I \subset [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques.

• Si les événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants, il en est de même des événements $(A_i)_{i \in J}$ quelque soit $J \subset [\![1, n]\!]$.

• Les événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont 2-à-2 indépendants si pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, tels que $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.
Si les événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants alors ils sont aussi 2 à 2 indépendants. La réciproque est fausse (voir exemple plus loin).

Définition

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et n expériences aléatoires $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \dots, \mathscr{E}_n$ d'univers associés $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ munis respectivement des probabilités $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots, \mathbb{P}_n$.
L'expérience consistant à réaliser les n expériences $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \dots, \mathscr{E}_n$ a pour univers associé $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.
On dit que les expériences $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \dots, \mathscr{E}_n$ sont <u>indépendantes</u> si $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ peut être muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ telle que ;

$$\forall A_1 \subset \Omega_1, \forall A_2 \subset \Omega_2, \dots, \forall A_n \subset \Omega_n,$$
$$\mathbb{P}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i(A_i).$$

Remarque.

Autrement dit : $\forall A_1 \subset \Omega_1, \forall A_2 \subset \Omega_2, \dots, \forall A_n \subset \Omega_n$, les événements :

$$\begin{gathered} A_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \\ \Omega_1 \times A_2 \times \cdots \times \Omega_n \\ \vdots \\ \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times A_n \end{gathered}$$

sont mutuellement indépendants dans $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ muni de $\mathbb{P}$.

En effet :

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = (A_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n) \cap (\Omega_1 \times A_2 \times \cdots \times \Omega_n) \\ \cap \cdots \cap (\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times A_n) \qquad \text{et :} \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n) = \mathbb{P}_1(A_1) \\ \mathbb{P}(\Omega_1 \times A_2 \times \cdots \times \Omega_n) = \mathbb{P}_2(A_2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{P}_n(A_n) \end{gathered}$$

Dans la pratique n événements décrivants les issues de n expériences indépendantes sont mutuellement indépendants.

Exemple. On tire successivement et avec remise n boules dans une urne contenant une boule blanche et une boules noire. Quelle est la probabilité de ne tirer que des blanches ?
Soit B_i l'événement : "la i-ième boule tirée est blanche". Les tirages se faisant avec remise ils sont indépendants. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

La probabilité de ne tirer que des boules blanches est $\dfrac{1}{2^n}$.

Exercice.

Pour une famille de deux enfants on considère les événements :

– A : "la fratrie est mixte",

– B : "l'ainé est une fille",

– C : "le cadet est un garçon".

On suppose chaque genre à la naissance équiprobable et les naissances indépendantes.

1. Montrer que les 3 événements A, B, C sont 2 à 2 indépendants mais pas mutuellement indépendants.
2. Montrer que B et C ne sont plus indépendants pour la probabilité conditionnée $\mathbb{P}_A$.

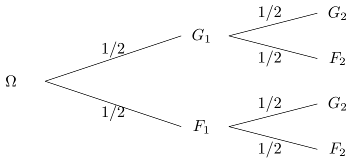
Résolution.

1) On considère les événements ($i = 1, 2$) :

– F_i : "obtenir une fille à la i-ème naissance",

– G_i : "obtenir un garçon à la i-ème naissance",

ainsi :



On a $A = (G_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap G_2)$; donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(G_1 \cap F_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap G_2) && \text{par incompatibilité} \\
&= \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(G_2) && \text{par indépendance} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(F_1) = \boxed{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(G_2) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Établissons que A, B, C sont 2 à 2 indépendants :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(F_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(F_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(F_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$

et montrons que A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(B \cap C) && \text{car } B \cap C \subset A \\
&= \mathbb{P}(F_1 \cap G_2) && \\
&= \frac{1}{4} && \text{par indépendance} \\
&\neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8} && \text{d'après le calcul précédent}
\end{aligned}$$

Les événements A, B, C sont donc 2 à 2 indépendants mais pas mutuellement indépendants.

2) Puisque $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{P}_A$ est bien défini. Calculons à l'aide de la définition :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}_A(C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}_A(B \cap C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $\mathbb{P}_A(B \cap C) \neq \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}_A(C)$; autrement dits les événements B et C ne sont pas indépendants dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}_A)$ alors qu'ils le sont dans $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Remarque. La notion d'indépendance dépend de l'espace probabilisé considéré, et notamment de la probabilité dont l'univers est muni. Deux événements indépendants dans $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ne le sont plus nécessairement si l'on change $\mathbb{P}$, par exemple par $\mathbb{P}_A$.