

Suites réelles usuelles

BCPST1 - Lycée Fénélon

Jean-Philippe Préaux

<http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux>

Introduction

Suites arithmétiques

Suites géométriques

Suites arithmetico-géométriques

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On étudie dans ce chapitre certaines suites réelles usuelles : les suites arithmétiques, géométriques, déjà rencontrées au Lycée, mais aussi les suites arithmético-géométriques et les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Les suites réelles et leur convergence seront étudiées de manière plus détaillée dans un chapitre ultérieur.

Introduction

Définition

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou plus simplement (u_n)) est la donnée pour chaque entier naturel n , d'un réel noté u_n . Le réel u_n est appelé terme de rang n de la suite (u_n) .

Remarque.

- Une suite peut être définie par l'expression en fonction de n de son terme de rang n :

$$u_n = f(n)$$

où f est une fonction réelle donnée par son expression.

Exemple : La suite des nombre pairs :

$$u_n = 2n$$

La suite des nombres impairs :

$$v_n = 2n + 1.$$

- Elle peut aussi être définie par une relation de récurrence (simple) et par la donnée de son premier terme :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

pour f une fonction réelle appelée fonction de récurrence. La suite (u_n) est bien définie si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n \in \mathcal{D}_f$.

Exemple : La suite :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

est bien définie (preuve par récurrence simple).

- Elle peut aussi être définie par une relation de récurrence à deux pas et pas la donnée de ses deux premiers termes :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases}$$

où f est une fonction de deux variables réelles.

Exemple : la suite de Fibonacci

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

a pour premiers termes :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = 2 \quad u_4 = 3 \quad u_5 = 5 \quad u_6 = 8 \quad u_7 = 13 \quad u_8 = 21$$

Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r lorsqu'elle vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Elle est définie par sa raison r et son premier terme u_0 .

Exemples. Les suites des nombres pairs (u_n) et impairs (v_n) sont arithmétiques de raison 2. La première a pour premier terme $u_0 = 0$, la seconde $v_0 = 1$.

Expression d'une suite arithmétique.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r ; alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \times r$$

Démonstration. Par récurrence.

En particulier une suite arithmétique a toujours une limite lorsque n tend vers $+\infty$ qui dépend de sa raison :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ; alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ u_0 & \text{si } r = 0 \\ -\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Remarque. Pourquoi cette terminologie : "arithmétique" ? Parce que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la moyenne arithmétique de ses termes adjacents u_{n-1} , u_{n+1} ; en effet :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} &= \frac{u_0 + (n-1)r + u_0 + (n+1)r}{2} \\ &= \frac{2u_0 + 2nr}{2} \\ &= u_0 + nr \\ &= u_n \end{aligned}$$

La somme des premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r ;

$$\sum_{k=0}^n u_k = \underbrace{\frac{u_0 + u_n}{2}}_{\text{moyenne des premier et dernier termes}} \times \underbrace{(n+1)}_{\text{nombre de termes}}$$

Plus généralement, la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et soient deux entiers $0 \leq p \leq n$;

$$\sum_{k=p}^n u_k = \underbrace{\frac{u_p + u_n}{2}}_{\text{moyenne des premier et dernier termes}} \times \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=p}^n u_k &= \sum_{k=p}^n (u_0 + kr) = u_0 \times \sum_{k=p}^n 1 + r \times \sum_{k=p}^n k \\
 &= (n - p + 1) \times u_0 + r \times \frac{p + n}{2} \times (n - p + 1) \\
 &= \frac{2u_0 + p \times r + n \times r}{2} \times (n - p + 1) \\
 &= \frac{u_p + u_n}{2} \times (n - p + 1)
 \end{aligned}$$

■

Exercice 1. Calculer la somme des 100 premiers entiers naturels impairs.

Il s'agit de calculer la somme des 100 premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2, de $u_0 = 1$ à $u_{99} = 199$.

$$\sum_{k=0}^{99} u_k = \frac{1 + 199}{2} \times 100 = 100^2 = 10\,000$$

Suites géométriques

Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison q lorsqu'elle vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$$

Elle est définie par sa raison q et son premier terme u_0 .

Exemples.

- La suite de terme $u_n = 2^n$ est géométrique de raison 2.
- Une population de bactéries double chaque heure. Le nombre de bactéries après n heures est une suite géométrique de raison 2 ; après n jours c'est une suite géométrique de raison 2^{24} .

Expression d'une suite géométrique.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q ; alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

En particulier :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison q ; alors :

- *si $-1 < q < 1$: $\lim u_n = 0$.*
- *si $q = 1$: (u_n) est stationnaire.*
- *si $q > 1$: $\lim u_n = \pm\infty$ selon le signe de u_0 .*
- *si $q \leq -1$: (u_n) n'a pas de limite.*

Remarque. Pourquoi cette terminologie : "géométrique" ? Parce que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si la suite (u_n) est à termes positifs, u_n est la moyenne géométrique de ses termes adjacents u_{n-1} , u_{n+1} ; en effet, si $u_0 \geq 0$ et $q \geq 0$:

$$\begin{aligned}\sqrt{u_{n-1} + u_{n+1}} &= \sqrt{u_0 \times q^{n-1} \times u_0 \times q^{n+1}} \\ &= \sqrt{u_0^2 \times q^{2n}} \\ &= u_0 \times q^n \\ &= u_n\end{aligned}$$

- La moyenne arithmétique, ou plus simplement moyenne, de deux nombres a et b est :

$$\frac{a+b}{2}$$

c'est le réel dont le double est égal à la somme $a+b$.

- La moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b est :

$$\sqrt{a \times b}$$

c'est le réel positif dont le carré est égal au produit $a \times b$.

La somme des premiers termes d'une suite géométrique est donnée par la formule :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ;

$$\sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_0 \times (n + 1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Plus généralement, la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ;

$$\sum_{k=p}^n u_k = \begin{cases} u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_p \times (n - p + 1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Exercice 2.

Lors d'une épidémie, si chaque individu infecté contamine deux personnes saines, donner une estimation moyenne du nombre de personnes ayant contracté la maladie après 4 mois sachant qu'initialement un seul individu est contaminé, que la période de contagiosité est de 10 jours et que la maladie est immunisante. Combien de décès surviendront environ si la maladie a un taux de létalité de 0,5% ?

En moyenne la contagion devrait se produire au milieu de la période durant laquelle un malade est contagieux, soit environ après 5 jours. La propagation de l'épidémie peut alors se modéliser de manière simplifiée en considérant que le nombre de personnes u_n contractant la maladie après $5n$ jours est géométrique de premier terme 1 et de raison 2. En 4 mois, environ $4 \times 30 = 120$ jours se sont écoulés. L'estimation s'obtient en sommant les premiers termes de la suite u_n jusqu'à $n = \frac{120}{5} = 24$. Soit une nombre de personnes infectés de l'ordre de :

$$\sum_{k=0}^{24} 2^k = \frac{1 - 2^{25}}{1 - 2} = 2^{25} - 1 \approx (2^{10})^2 \times 2^5 > 1000^2 \times 32 = 32 \text{ millions d'infections}$$

Si 0,5% des personnes infectés décèdent, le nombre de morts sera environ de :

$$\frac{5}{10^3} \times 32 \times 10^6 = 160\,000 \text{ décès}$$

Suites arithmetico-géométriques

Définition

Une suite $(u_n)_n$ est dite arithmetico-géométrique lorsqu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

Remarques.

- La fonction de récurrence est $f(x) = ax + b$; c'est une fonction affine.
- Elles généralisent les suites arithmétiques et géométriques :
 - Lorsque $a = 1$, c'est une suite arithmétique de raison b .
 - Lorsque $b = 0$, c'est une suite géométrique de raison a .

Expression de u_n en fonction de n .

Lorsque $a \neq 1$ et $b \neq 0$ (sinon la suite est arithmétique ou géométrique et dans ce cas on sait faire), déterminer l'expression de u_n en fonction de n s'effectue par la méthode suivante.

On pose $v_n = u_n - l$ pour un réel l . Alors la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - l = a(u_n - l) + al + b - l = av_n + b + (a - 1) \times l.$$

$$v_{n+1} = a \times v_n + b + (a - 1) \times l$$

Maintenant on choisit l de sorte que la suite (v_n) soit géométrique de raison a , c'est à dire si et seulement si :

$$b + (a - 1)l = 0 \iff al + b = l \iff f(l) = l \iff l = \frac{b}{1 - a}.$$

Il y a une unique solution, appelée le point fixe de la fonction de récurrence. Pour cette valeur, (v_n) est géométrique de raison a et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n \times v_0 \quad \text{avec} \quad v_0 = u_0 - l$$

Et finalement :

$$u_n - l = a^n \times (u_0 - l)$$
$$\implies u_n = a^n \times (u_0 - l) + l \quad \text{avec} \quad l = \frac{b}{1-a}.$$

On obtient l'expression de u_n en fonction de n .

Méthode. Pour obtenir l'expression de u_n en fonction de n .

Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$; sinon on se reporte aux résultats des suites arithmétiques ou géométrique.

- Soit l le point fixe de la fonction de récurrence, i.e. $f(l) = l$.
- La suite $v_n = u_n - l$ est géométrique de raison a et de premier terme $u_0 - l$.
- On en déduit l'expression, de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .

Exemple. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n lorsque :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Soit l point fixe de $f(x) = 2x + 1$:

$$l = 2l + 1 \implies l = -1$$

alors $v_n = u_n - l = u_n + 1$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 - l = 1 + 1 = 2$; ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_n &= 2^n \times v_0 = 2^{n+1} \\ \implies u_n + 1 &= 2^{n+1} \implies u_n = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Exercice 3. Une source alimente un réservoir d'eau ; son débit est de 200 ℓ par jour. À la fin de chaque journée on prélève la moitié de la réserve. Initialement la réserve contient 1224 ℓ . Combien en contient-elle après 10 jours révolus ?

Soit u_n la contenance de la réserve après n jours ; alors :

$$u_0 = 1224 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + 200}{2} = \frac{1}{2}u_n + 100.$$

On cherche à déterminer u_{10} , contenance du réservoir après 10 jours. La suite u_n est arithmético-géométrique, on détermine l'expression de u_n en fonction de n .

Soit l le point fixe de la fonction de récurrence :

$$l = \frac{1}{2}l + 100 \iff \frac{1}{2}l = 100 \iff l = 200$$

Alors $v_n = u_n - l$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - l = 1024$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 1024 \times \frac{1}{2^n} = \frac{2^{10}}{2^n} = 2^{10-n}$$

Ainsi :

$$u_n = v_n + l = 200 + 2^{10-n}$$

Finalement :

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 si il existe deux réels a et b , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Elle est bien définie par la donnée de cette relation de récurrence et de ses deux premiers termes u_0 et u_1 .

Exemple. La suite de Fibonacci :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

Expression de u_n en fonction de n .

On suppose que $(a, b) \neq (0, 0)$; sinon $u_n = 0$ dès que $n \geq 2$.

Nous allons chercher des suites particulières vérifiant la relation de récurrence et dont on sait donner l'expression en fonction de n , puis nous vérifierons que parmi la famille trouvée, une seule a pour premiers termes u_0 et u_1 ; ce sera donc la suite recherchée, et elle nous donnera l'expression de u_n en fonction de n .

Cherchons quelles sont les suites géométriques non nulles satisfaisant la relation de récurrence ; ainsi soit $u_n = u_0 \times r^n$ avec $u_0 \neq 0$ et $r \neq 0$ et telle que :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (*)$$

$$\iff u_0 \times r^{n+2} = a \times u_0 \times r^{n+1} + b \times u_0 \times r^n$$

$$\iff r^{n+2} = a \times r^{n+1} + b \times r^n$$

en divisant par u_0

$$\iff r^2 = ar + b$$

en divisant par r^n

On appelle équation caractéristique :

$$r^2 - ar - b = 0$$

Pour chaque solutions r_0 de l'équation caractéristique, toute suite géométrique de raison r_0 vérifie la relation de récurrence (*).

L'équation caractéristique a pour discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.

• Premier cas. Si $\Delta > 0$. L'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes. :

$$r_1 = \frac{a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad ; \quad r_2 = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2}$$

pour tous réels α et β les suites géométriques αr_1^n et βr_2^n vérifie la relation de (*) :

$$\alpha r_1^{n+2} = a \times \alpha r_1^{n+1} + b \times \alpha r_1^n$$

$$\beta r_2^{n+2} = a \times \beta r_2^{n+1} + b \times \beta r_2^n$$

Mais alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la suite $v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ satisfait aussi la relation de récurrence (*) puisque en ajoutant les deux relations précédentes :

$$\begin{aligned}\alpha r_1^{n+2} + \beta r_2^{n+2} &= a \times \alpha r_1^{n+1} + b \times \alpha r_1^n + a \times \beta r_2^{n+1} + b \times \beta r_2^n \\ &= a \times (\alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1}) + b \times (\alpha r_1^n + \beta r_2^n) \\ \implies v_{n+2} &= av_{n+1} + bv_n\end{aligned}$$

Peut-on trouver des valeurs de α et β telles que la suite (v_n) ait pour premiers termes $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$? C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}v_0 &= \alpha r_1^0 + \beta r_2^0 = \alpha + \beta = u_0 \\ v_1 &= \alpha r_1^1 + \beta r_2^1 = \alpha r_1 + \beta r_2 = u_1\end{aligned}$$

Pour cela on cherche à résoudre le système d'inconnues α et β :

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ r_1\alpha + r_2\beta = u_1 \end{cases} &\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ (r_2 - r_1)\beta = u_1 - r_1 u_0 \end{cases} \quad L_2 - r_1 L_1 \\ \iff_{r_2 - r_1 \neq 0} \begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \beta = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha = u_0 - \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \\ \beta = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \\ \beta = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi il existe un unique couple de réels (α, β) tels que $v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ vérifie la relation de récurrence $(*)$ et ait pour premiers termes $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$. Pour ces valeurs de (α, β) , les suites (v_n) et (u_n) sont égales. Cela fournit l'expression de u_n en fonction de n .

Lorsque $\Delta > 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \times r_1^n + \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \times r_2^n$$

• Deuxième cas : Si $\Delta < 0$.

L'équation caractéristique : $r^2 - ar - b = 0$ a deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{a + i\delta}{2} \quad ; \quad r_2 = \frac{a - i\delta}{2} \quad \text{avec } \delta^2 = \Delta.$$

Alors il existe $\rho = |r_1| = |r_2| \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$r_1 = \rho \times e^{i\theta} \quad ; \quad r_2 = \rho \times e^{-i\theta}$$

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$. Le même système que dans le cas $\Delta > 0$ montre que pour :

$$\alpha = \frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \quad ; \quad \beta = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}$$

$v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$. Mais α et β sont des complexes. Aussi obtenons une expression réelle de u_n en fonction de n .

Remarquons que puisque r_1 et r_2 sont conjugués, α et β sont aussi conjugués. En effet :

$$\overline{\alpha} = \overline{\left(\frac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} \right)} = \frac{\overline{r_2} u_0 - u_1}{\overline{r_2} - \overline{r_1}} = \frac{r_1 u_0 - u_1}{r_1 - r_2} = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \beta$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha r_1^n + \beta r_2^n \\ &= \alpha \rho^n \times e^{i n \theta} + \beta \rho^n \times e^{-i n \theta} \\ &= \rho^n \left(\alpha e^{i n \theta} + \beta e^{-i n \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_n &= \rho^n \left(\alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} \right) \\
 &= \rho^n \left(\underbrace{\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right)}_{=\alpha} e^{in\theta} + \underbrace{\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)}_{=\beta} e^{-in\theta} \right) \\
 &= \rho^n \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \times \left(e^{in\theta} + e^{-in\theta} \right) + \frac{\alpha - \beta}{2} \times \left(e^{in\theta} - e^{-in\theta} \right) \right) \\
 &= \rho^n \left(\underbrace{\frac{\alpha + \beta}{2}}_{=Re(\alpha) \in \mathbb{R}} \times 2 \times \cos(n\theta) + \underbrace{\frac{\alpha - \beta}{2}}_{=i Im(\alpha) \in i\mathbb{R}} \times 2i \times \sin(n\theta) \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi en posant :

$$A = \alpha + \beta \in \mathbb{R} \quad ; \quad B = (\alpha - \beta) \times i \in \mathbb{R}$$

il existe deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \rho^n \times (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

avec : $\rho = |r_1|$ et $\theta \equiv \arg(r_1) \in [2\pi]$.

- Troisième cas. Si $\Delta = 0$.

Dans ce cas l'équation caractéristique a une unique solution $r_0 = \frac{a}{2}$. Alors $v_n = \alpha r_0^n$ vérifie la relation (*), mais $v_0 = \alpha$ et $v_1 = \alpha r_0$ ne permet pas général de choisir α pour que $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.

Aussi cherchons une autre suite satisfaisant (*). Soit β un réel quelconque et $w_n = \beta \times nr_0^n$. Alors :

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \beta(n+2)r_0^{n+2}, \quad \text{et} \\ aw_{n+1} + bw_n &= a\beta(n+1)r_0^{n+1} + b\beta nr_0^n \\ &= \beta r_0^n \times (a(n+1)r_0 + bn) \\ &= \beta r_0^n \times \left(\underbrace{n(ar_0 + b)}_{=r_0^2} + \underbrace{a}_{=2r_0} r_0 \right) \\ &= \beta r_0^n \times (nr_0^2 + 2r_0^2) \\ &= \beta(n+2)r_0^{n+2} = w_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi (w_n) satisfait (*) pour tout réel β . Et donc $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $v_n = \alpha r_0^n + \beta \times nr_0^n$ satisfait la relation de récurrence (*).

Déterminons s'il existe des réels α et β tels que (v_n) ait pour premiers termes u_0 et u_1 .

$$\begin{cases} \alpha r_0^0 + \beta \times 0 \times r_0^0 = u_0 \\ \alpha r_0^1 + \beta \times 1 \times r_0^1 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \alpha r_0 + \beta \times r_0 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta \times r_0 = u_1 - u_0 r_0 \end{cases}$$

Premier sous-cas : si $r_0 \neq 0$ alors :

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = \frac{u_1 - u_0 r_0}{r_0} \end{cases}$$

Deuxième sous-cas : si $r_0 = 0$ alors $a = 0$ et $r_0 = a/2$ est racine de $r^2 - b$ donc $b = 0$. Ainsi $(a, b) = (0, 0)$; cas que l'on a exclu.

Ainsi lorsque $\Delta = 0$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \alpha r_0^n + \beta \times n \times r_0^n$$

Finalement nous venons d'établir :

Théorème

Soient $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On considère l'équation caractéristique associée :

$$r^2 - ar - b = 0 \quad (*)$$

et son discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.

- Si $\Delta > 0$; soient r_1, r_2 les deux solutions réelles distinctes de (EC). Il existe un unique couple de réels (α, β) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \alpha \times r_1^n + \beta \times r_2^n$$

- Si $\Delta < 0$; soient r_1, r_2 les deux solutions complexes conjuguées de (EC). Il existe un unique couple de réels (α, β) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \rho^n \times (\alpha \times \cos(n\theta) + \beta \times \sin(n\theta))$$

où $\rho = |r_1|$ et $\theta \equiv \arg(r_1) [2\pi]$.

- Si $\Delta = 0$; soit r_0 l'unique solution de (EC). Il existe un unique couple de réels (α, β) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (\alpha + \beta \times n) \times r_0^n$$

Exemple. Expression en fonction de n de la suite de Fibonacci :

$$(u_n)_n : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - r - 1 = 0 \quad (EC)$$

qui admet pour discriminant $\Delta = (-1)^2 + 4 = 5 > 0$ et pour racines :

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad ; \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Ainsi il existe deux réels α, β tels que $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$; déterminons α et β :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha \times \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \beta \times \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \sqrt{5} \times (\alpha - \beta) = 2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 2\sqrt{5} \times \alpha = 2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Exercice 4. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

a)

$$u_0 = -1, \quad u_1 = 2, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

b)

$$u_0 = 4, \quad u_1 = 5, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

c)

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \sqrt{3} - \frac{1}{2}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$$

a)

$$u_0 = -1, \quad u_1 = 2, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4$ pour laquelle :

$$\Delta = 0 \quad ; \quad r_0 = 2$$

Ainsi il existe deux réels α, β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (\alpha + n\beta) \times 2^n$.
Déterminons α et β :

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ 2\alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (2n - 1) \times 2^n$$

b)

$$u_0 = 4, \quad u_1 = 5, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2$ pour laquelle :

$$\Delta > 0 \quad ; \quad r_1 = 1 \quad ; \quad r_2 = 2 \quad (\text{car } 3 = 1 + 2 \text{ et } 2 = 1 \times 2)$$

Ainsi il existe deux réels α, β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \alpha + \beta \times 2^n$.
Déterminons α et β :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha + 2\beta = 5 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{matrix} \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \beta = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 3 + 2^n$$

c)

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \sqrt{3} - \frac{1}{2}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$$

L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1$ pour laquelle :

$$\Delta = -3 < 0 \quad ; \quad r_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Or :

$$|r_2| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(r_2) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

Ainsi il existe deux réels α, β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = 1^n \times \left(\alpha \cos \frac{2n\pi}{3} + \beta \sin \frac{2n\pi}{3} \right)$. Déterminons α et β :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \cos \frac{2n\pi}{3} + 2 \sin \frac{2n\pi}{3}$$