Les suites réelles
Partie 2

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Opérations sur les limites

On établit dans cette partie l'effet des opérations usuelles : somme, produit, et quotient de suites, sur leur limite. Lorsque c'est possible on donne la limite en fonction des limites des deux suites opérandes.

On regroupe ces résultats au sein de tableaux. une limite ℓ ou ℓ' désignera une limite finie. Une limite *IND* désignera une limite indéterminée, c'est à dire qu'on ne peut pas déduire en toute généralité (voire pas de limite du tout).

Pour établir chaque tableau, il y a beaucoup de points à démontrer. Afin de ne pas alourdir le cours, on ne démontrera que certains d'entre eux, les plus essentiels, les autres étant admis ; une preuve s'obtiendrait en appliquant des arguments analogues.

Limite d'une somme

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	IND

Remarque. Autrement dit, en étendant l'addition de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \left\{-\infty; +\infty\right\}$ en posant :

$$\begin{array}{ccc} \ell + (+\infty) = +\infty & ; & \ell + (-\infty) = -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty & ; & (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ (+\infty) + (-\infty) = IND & ; & (-\infty) + (+\infty) = IND \end{array}$$

la limite d'une somme est la somme des limites ; $(+\infty) + (-\infty)$ est indéterminé.

Démonstration. On se contente de montrer les deux premières. La preuve des restantes est analogue.

• Supposons que $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$. Montrons que $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$.

Par définition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1(\varepsilon) \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon \qquad \text{car } \lim u_n = \ell$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2(\varepsilon) \implies |v_n - \ell'| \leq \varepsilon \qquad \text{car } \lim v_n = \ell'$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |u_n - \ell + v_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \qquad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$; posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$; alors :

$$\exists N_1(\varepsilon') \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1(\varepsilon') \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon' \qquad (1)$$
$$\exists N_2(\varepsilon') \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2(\varepsilon') \implies |v_n - \ell'| \leq \varepsilon' \qquad (2)$$

Posons $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon'), N_2(\varepsilon'))$. Puisque

$$n \geq N(\varepsilon) \implies \begin{cases} n \geq N_1(\varepsilon') \\ \text{et} \\ n \geq N_2(\varepsilon') \end{cases}$$

d'après $(*)$, (1) et (2) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(\varepsilon) \implies |(u_n+v_n)-(\ell+\ell')| \underset{(*)}{\leq} |u_n-\ell|+|v_n-\ell'| \underset{(1)\text{ et }(2)}{\leq} \varepsilon'+\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(\varepsilon) \implies |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon$$

autrement dit : $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$. $\square$

• Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = +\infty$. Montrons que $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.

Puisque $\lim v_n = +\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_1(A) \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1(A) \implies v_n \geq A$$

Puisque $\lim u_n = \ell$ et qu'une suite convergente est bornée, (u_n) admet un minorant que nous noterons m :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m \qquad (1)$$

Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque ; posons $B = A - m$; alors :

$$\exists N_1(B) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1(B) \Longrightarrow v_n \geq B$$
$$\underset{(1)}{\Longrightarrow} u_n + v_n \geq m + A - m = A$$

Ainsi en posant $N(A) = N_1(B)$:

$$\exists N(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(A) \Longrightarrow u_n + v_n \geq A$$

On a donc établi que :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(A) \Longrightarrow u_n + v_n \geq A$$

autrement dit $\lim(u_n + v_n) = +\infty$. ■

Remarque. Cas d'indétermination : "$(+\infty)+(-\infty)$".

– Soit $u_n = n$ et $v_n = -n$; $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$. Alors $u_n + v_n = 0$ a une limite finie.

– Soit $u_n = 2n$ et $v_n = -n$; $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$. Alors $u_n + v_n = n$ a pour limite $+\infty$.

– Soit $u_n = n$ et $v_n = -n + (-1)^n$; $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$. Alors $u_n + v_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

On voit sur ces 3 exemples que dans le cas "$+\infty + (-\infty)$" on ne peut rien dire sur la limite : ni si elle existe, ni si elle est finie ou infinie.

Limite d'un produit

$\lim u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	IND

où le signe devant ∞ s'obtient à l'aide de la règle sur le signe d'un produit.

Remarque. Autrement dit, en étendant la multiplication de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \left\{-\infty; +\infty\right\}$ en respectant la règle des signes d'un produit et en posant :

$$\ell \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \ell > 0 \\ \mp\infty & \text{si } \ell < 0 \\ IND & \text{si } \ell = 0 \end{cases} \qquad ; \qquad \infty \times \infty = \infty$$

la limite d'un produit est le produit des limites ; $0 \times \infty$ est indéterminé.

Démonstration. On ne démontre que les deux premières ; les suivantes sont analogues.

• Supposons que $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$; montrons que $\lim u_n \times v_n = \ell \times \ell'$.

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n(v_n - \ell') + (u_n - \ell)\ell'| \leq |u_n| \cdot |v_n - \ell'| + |u_n - \ell| \cdot |\ell'| \qquad (*)$$

Or (u_n) et convergente donc borné ; ainsi il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M \qquad (**)$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; posons $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M} > 0$. Par définition, puisque $\lim v_n = \ell'$:

$$\exists N_1(\varepsilon_1) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1(\varepsilon_1) \implies |v_n - \ell'| \leq \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (1)$$

– 1^er cas : si $\ell' = 0$.

En posant $N(\varepsilon) = N_1(\varepsilon_1)$, d'après $(*)$ et $(**)$ et (1) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(\varepsilon) \implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leq |u_n| \cdot |v_n - \ell'| \leq M \times \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

et donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leq \varepsilon$$

autrement dit $\lim(u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$.

– 2^{eme} cas si $\ell' \neq 0$.

Posons $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|\ell'|} > 0$; par définition, puisque $\lim u_n = \ell$:

$$\exists N_2(\varepsilon_2) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2(\varepsilon_2) \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|\ell'|} \qquad (2)$$

Posons $N(\varepsilon) = \max(N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2))$; alors :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(\varepsilon) &\implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leq |u_n| \cdot |v_n - \ell'| + |u_n - \ell| \cdot |\ell'| && \text{d'après } (*)\\
&\implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|\ell'|} \cdot |\ell'| && \text{d'après } (**), (1), (2)\\
&\implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n v_n - \ell\ell'| \leq \varepsilon$$

autrement dit $\lim(u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$. $\square$

• Supposons que $\lim u_n = \ell \neq 0$ et $\lim v_n = +\infty$. Montrons que $\lim(u_n \times v_n) = +\infty$ ou $-\infty$ selon que $\ell > 0$ ou $\ell < 0$. (Le cas où $\lim v_n = -\infty$ se traiterait de manière analogue en changeant le sens de certaines inégalités).

Posons $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$; puisque $\lim u_n = \ell$, par définition :

$$\begin{aligned}
\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 &\Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2} \\
&\Longrightarrow \ell - \frac{|\ell|}{2} \leq u_n \leq \ell + \frac{|\ell|}{2} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{\ell}{2} \leq u_n \leq \dfrac{3\ell}{2} & \text{si } \ell > 0 \\ \dfrac{3\ell}{2} \leq u_n \leq \dfrac{\ell}{2} < 0 & \text{si } \ell < 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{\ell}{2} \leq u_n \leq \dfrac{3\ell}{2} & \text{si } \ell > 0 \\ 0 < -\dfrac{\ell}{2} \leq -u_n \leq -\dfrac{3\ell}{2} & \text{si } \ell < 0 \end{cases} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque. Posons $A_1 = \dfrac{2A}{\ell} \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim v_n = +\infty$:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \implies v_n \geq A_1 = \frac{2A}{\ell} \qquad (2)$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$; alors d'après (1) et (2) :

$$n \geq N \implies \begin{cases} \text{si } \ell > 0 : & \dfrac{\ell}{2} \times \dfrac{2A}{\ell} \leq u_n \times v_n & \implies u_n \times v_n \geq A \\ \text{si } \ell < 0 : & -\dfrac{\ell}{2} \times \dfrac{2A}{\ell} \leq -u_n \times v_n & \implies u_n \times v_n \leq A \end{cases}$$

Ainsi on a montré que :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies \begin{cases} u_n \times v_n \geq A & \text{si } \ell > 0 \\ u_n \times v_n \leq A & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$$

autrement dit :

$$\lim u_n \times v_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$$

■

Remarque. Cas d'indéterminé : "$0 \times \infty$" :

- Si $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n$ alors $\lim u_n v_n = 1$.
- Si $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n^2$ alors $\lim u_n v_n = +\infty$.
- Si $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$ alors $u_n v_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Exemple. De $\lim n = +\infty$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$ on déduit par produit :

Soit $p \in \mathbb{Z}$ un entier fixé, $$\lim n^p = \begin{cases} +\infty & si\ p > 0 \\ 1 & si\ p = 0 \\ 0 & si\ p < 0 \end{cases}$$

Méthode. Pour le calcul de la limite d'une somme, en cas d'indéterminé "$+\infty + (-\infty)$" on factorise le terme dominant (celui qui tend le plus rapidement vers ∞) pour appliquer ensuite la limite d'un produit :

Exemples :

- $u_n = n^2 - n^3 - 1 + \dfrac{1}{n^2}$.

$$u_n = -n^3 \times \underbrace{\left(-\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^5}\right)}_{\longrightarrow 1 \text{ par somme des limites}} \longrightarrow -\infty \quad \text{par produit des limites}$$

- Pour un polynôme, sa limite lorsque $n \to +\infty$ est celle de son monôme de plus haut degré :

$$u_n = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k = a_p n^p \times \underbrace{\left(1 + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a_k}{a_p} n^{k-p}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \qquad \text{si } a_p \neq 0$$

$$\boxed{u_n = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k \quad avec\ a_p \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_p n^p}$$

Exercice Déterminer les limites de :

$$u_n = \frac{n^3 - 2n^4 + n^3 \times \sin(n)}{n^2} \qquad ; \qquad v_n = -(2n-1)^6 - (1-3n)^7$$

- Pour u_n :

$$u_n = n - 2n^2 + n \times \sin(n) = n^2 \times \underbrace{\left(\frac{1}{n} - 2 + \frac{\sin(n)}{n}\right)}_{\longrightarrow(-2) \text{ par somme}} \longrightarrow -\infty$$

- Pour v_n : v_n est un polynôme en n, de monôme de plus haut degré :

$$-(-3n)^7 = 3^7 \times n^7 \longrightarrow +\infty$$

donc $\lim v_n = +\infty$.

Limite d'un quotient

Supposons que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

$\lim u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	*IND*	0	*IND*

où le signe devant ∞ s'obtient à l'aide de la règle sur le signe d'un produit.

Remarque. Attention, sans autre hypothèse de signe, lorsque $\lim v_n = 0$ la forme est indéterminée. Exemples :

– Si $u_n = 1$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $\lim u_n = 1$ et $\lim v_n = 0$ mais :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{(-1)^n} = (-1)^n n$$

n'a pas de limite car ses suites extraites de rangs pairs et impairs sont $2n$ et $-(2n+1)$ qui n'ont pas même limite.

– Si $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ alors $\frac{u_n}{v_n} = 1$ converge vers 1.

– Si $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ alors $\frac{u_n}{v_n} = n$ a pour limite $+\infty$.

Démonstration. On établit les deux premières ; les suivantes se traite de manière analogue.

• Supposons que $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell' \neq 0$. On pose $w_n = \frac{1}{v_n}$; montrons que $\lim w_n = \frac{1}{\ell'}$; à l'aide du résultat sur la limite d'une produit on aura alors $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$.

Puisque $\ell' \neq 0$, à partir d'un certain rang N_0, (v_n) garde un signe constant > 0 ou < 0.

D'autre part montrons qu'il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ pour lequel $(|v_n|)_{n \geq N_1}$ est minorée par un réel m strictement positif.

Puisque $\lim v_n = \ell' \neq 0$ en posant $\varepsilon = \frac{|\ell'|}{2} > 0$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N_1 \implies |v_n - \ell'| \leq \frac{|\ell'|}{2}$$

Or d'après l'inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N_1 \implies |v_n| = |v_n - \ell' + \ell'| \geq \big||v_n - \ell'| - |\ell'|\big| \geq |\ell'| - |v_n - \ell'| \geq |\ell'| - \frac{|\ell'|}{2} = \frac{|\ell'|}{2} > 0$$

Ainsi $|v_n|_{n \geq N_1}$ est minorée par $m = \frac{|\ell'|}{2} > 0$.

En particulier :

$$\forall n \geq N_1,\ |v_n| \geq m \implies \frac{1}{|v_n|} \leq \frac{1}{m}$$

Ainsi :

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \frac{|v_n - \ell'|}{|v_n||\ell'|} \leq \frac{|v_n - \ell'|}{m|\ell'|} \quad \text{dès que } n \geq N_1 \tag{1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; posons $\varepsilon_1 = \varepsilon \times m \times |\ell'| > 0$; puisque $\lim v_n = \ell'$:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \implies |v_n - \ell'| \leq \varepsilon \times m \times |\ell'| \tag{2}$$

En posant $N = \max(N_1, N_2)$, alors d'après (1) et (2) :

$$n \geq N \implies \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| \underset{(1)}{\leq} \frac{|v_n - \ell'|}{m|\ell'|} \underset{(2)}{\leq} \frac{\varepsilon m|\ell'|}{m|\ell'|} = \varepsilon$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| \leq \varepsilon$$

autrement dit $\lim \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'}$. □

• Si $\lim u_n = \ell \neq 0$ et $\lim v_n = 0^+$. Montrons que $\lim \frac{1}{v_n} = +\infty$; le résultat découlera alors par limite d'un produit.

Soit $A > 0$ quelconque ; posons $\varepsilon = \frac{1}{A} > 0$. Puisque $\lim v_n = 0^+$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \implies 0 \leq v_n \leq \varepsilon$$

Or (v_n) ne s'annule pas à partir d'une certain rang :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \implies v_n \neq 0$$

et donc en posant $N = \max(N_0, N_1)$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N &\implies 0 < v_n \leq \varepsilon \\ &\implies \frac{1}{v_n} \geq \frac{1}{\varepsilon} = A \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall A > 0,\ \exists N(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(A) \implies \frac{1}{v_n} \geq A$$

Lorsque $A \leq 0$, en particulier :

$$n \geq N(1) \Longrightarrow \frac{1}{v_n} \geq 1 \geq A$$

Ainsi :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow \frac{1}{v_n} \geq A$$

Autrement dit : $\lim \frac{1}{v_n} = +\infty$. ∎

Remarque. Indéterminé " $\frac{\infty}{\infty}$" :

– Si $u_n = n^2$ et $v_n = n$, alors $\frac{u_n}{v_n} = n \longrightarrow +\infty$.

– Si $u_n = n$ et $v_n = n^2$, alors $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

– Si $u_n = (2 + (-1)^n) \times n$ et $v_n = n$, alors $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$ et $\frac{u_n}{v_n} = (2 + (-1)^n)$ n'a pas de limite.

Exercice Calculer la limite de :

$$u_n = \frac{n^3(n^2+1)}{n^2(\sin(n) - n^3)} \quad ; \quad v_n = \frac{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n}}{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{(-1)^n}{n^3}}$$

- Pour (u_n) :

$$u_n = \frac{n^5\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^5\left(\frac{\sin(n)}{n^3} - 1\right)} = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\frac{\sin(n)}{n^3} - 1} \longrightarrow (-1)$$

- Pour (v_n) :

$$v_n = \frac{\frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n} - 2\right)}{\frac{1}{n^2} \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)} = n \times \frac{\frac{1}{n} - 2}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} \longrightarrow -\infty$$

Limites de référence

- Suites arithmétiques/géométriques

Nous avons deja établi :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\lim u_n = \begin{cases} +\infty & si\ r > 0 \\ u_0 & si\ r = 0 \\ -\infty & si\ r < 0 \end{cases}$$

Concernant les suites géométriques, leur nature s'obtient à l'aide du résultat :

Propriété

Soit $u_n = q^n$ une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q. Alors :

- *Si* $q > 1$: $\lim u_n = +\infty$
- *Si* $q = 1$: (u_n) *est constante*
- *Si* $-1 < q < 1$: $\lim u_n = 0$
- *Si* $q \leq -1$: (u_n) *n'a pas de limite*

Démonstration. Si $q = 1$ le résultat est évident. Montrons les autres cas.

– 1^{er} cas : si $q > 1$.

Alors $q = 1 + r$ avec $r > 0$. D'après la formule du binôme, si $n \geq 1$:

$$q^n = (1+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k = 1 + nr + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} r^k}_{\geq 0} \geq 1 + nr \longrightarrow +\infty$$

donc par comparaison (théorème 11), $\lim q^n = +\infty$.

– 2^{eme} cas : si $-1 < q < 1$.

Si $q = 0$ le résultat est évident, aussi supposons que $q \neq 0$. On a alors :

$$0 < |q| < 1 \implies \frac{1}{|q|} > 1 \implies w_n = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \longrightarrow +\infty.$$

Or $|q|^n = \frac{1}{w_n}$ et donc par quotient des limites, $\lim |q|^n = 0$ et donc (propriété 3) $\lim q^n = 0$.

–3^{eme} cas : si $q \leq -1$.

Alors $q^2 \geq 1$ et donc la suite extraite de rangs pairs (q^{2n}) a pour limite 1 ou $+\infty$.

Mais la suite extraite de rangs impairs q^{2n+1} est à termes tous strictement négatifs, et ne peut donc pas avoir même limite que q^{2n} (propriété 5).

D'après le théorème 9, $u_n = q^n$ n'a donc aucune limite. ∎

Limite de suite et de fonctions

On admettra pour l'instant les résultats de cette partie ; ils seront démontrés indépendamment dans le chapitre "Limites de fonctions".

Propriété

Soit f une fonction réelle admettant une limite en $+\infty$.

$$u_n = f(n) \Longrightarrow \lim u_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Exemple. Puissance réelle :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $n^\alpha = \exp(\alpha \ln(n))$. Des limites usuelles de exp et ln aux bornes de leur ensemble de définition :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

et de $\lim_{x\to 0} e^x = 1$, on déduit la limite de $u_n = n^\alpha$ selon les valeur de la constante $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim n^\alpha = \begin{cases} +\infty & si\ \alpha > 0 \\ 1 & si\ \alpha = 0 \\ 0^+ & si\ \alpha < 0 \end{cases}$$

Le théorème suivant, appelé théorème de composition des limites est très utile :

Théorème

Soient (u_n) une suite réelle ayant une limite L finie ou infinie et f une fonction réelle admettant une limite L' lorsque x tend vers L. Alors la suite $(f(u_n))$ admet pour limite L' ; autrement dit :

$$\left.\begin{array}{r} \lim u_n = L \\ \lim\limits_{x \to L} f(x) = L' \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim f(u_n) = L'$$

Exemples.

- Avec $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim \left(n \times \sin \frac{1}{n}\right) = 1$$

- Avec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim \left(n \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1$$

- Avec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim \left(n \times \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right) = 1$$

Exercice Déterminer les limites de :

$$u_n = \frac{\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1}}{n} \quad ; \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- Pour (u_n) :

$$u_n = \frac{n\sqrt{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - n\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}{n} = \sqrt{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \longrightarrow \sqrt{2} - 1$$

en utilisant $\lim_{x \to 1} \sqrt{x}$ et $\lim_{x \to 2} \sqrt{x}$.

- Pour (v_n) :

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\underbrace{\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}_{\longrightarrow 1} \longrightarrow e$$

en utilisant $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim_{x \to 1} e^x$.

Croissance comparée des suites factorielle, géométriques et puissances

On compare les suites :

– factorielle : $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

$$\lim n! = +\infty \quad \text{car } n! \geq n$$

– géométriques : q^n.

$$\lim q^n = +\infty \quad \text{si } q > 1$$

– puissances : n^α.

$$\lim n^\alpha = +\infty \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

Informellement, les 3 suites tendent vers $+\infty$ (lorsque $q > 1$ et $\alpha > 0$), mais factorielle tend vers $+\infty$ plus vite que toute suite géométrique, elles-mêmes tendant vers $+\infty$ plus vite que toute suite puissance.

Croissance comparée de $n!$, q^n et n^α.

Propriété

- *Pour tout $q > 0$:*

$$\lim \frac{n!}{q^n} = +\infty$$

- *Pour tout $q > 1$:*

$$\lim \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$$

Démonstration. Pour la première ; soit $q > 0$, formons :

$$\frac{n!}{q^n} = \frac{\overbrace{1 \times 2 \times \cdots \times n}^{n \text{ termes}}}{\underbrace{q \times q \times \cdots \times q}_{n \text{ termes}}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{q}$$

Soit N un entier naturel fixé vérifiant $N > q$ (par exemple $N = \lfloor q \rfloor + 1$). Alors pour tout entier $n \geq N+1$:

$$\frac{n!}{q^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{q} = \prod_{k=1}^{N} \frac{k}{q} \times \prod_{k=N+1}^{n} \frac{k}{q} > \frac{N!}{q^N} \times \prod_{k=N+1}^{n} \frac{N}{q} = \underbrace{\frac{N!}{q^N}}_{\substack{\text{fixé} \\ >0}} \times \underbrace{\left(\frac{N}{q}\right)^{n-N}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

puisque $\left(\frac{N}{q}\right)^{n-N}$ est une suite géométrique de raison $\frac{N}{q} > 1$.

Pour la seconde :

$$\frac{q^n}{n^\alpha} = \frac{e^{n \ln q}}{e^{\alpha \ln n}} = \exp\left(n\left(\ln q - \alpha \frac{\ln n}{n}\right)\right)$$

Par croissance comparée des fonctions logarithme et puissance (cf. Chapitre "Fonctions usuelles") et avec le théorème de composition des limites :

$$\ln q - \alpha \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\longrightarrow 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln q > 0 \text{ car } q > 1$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim(n \ln q) = +\infty$, donc par composition des limites :

$$\lim \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$$

Exercice Déterminer les limites de :

$$u_n = \frac{n^{10}}{2^n} \quad ; \quad v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times n^{100} \quad ; \quad w_n = \frac{n!}{2^n \times n^{1000}}$$

- Pour (u_n) :

$$u_n = \frac{n^{10}}{2^n} = \frac{1}{\frac{2^n}{n^{10}}} \longrightarrow 0$$

- Pour (v_n) :

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times n^{100} = \frac{n^{100}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \frac{1}{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^{100}}} \longrightarrow 0$$

- Pour (w_n) :

$$w_n = \frac{n!}{2^n \times n^{1000}} = \frac{n!}{4^n} \times \frac{2^n}{n^{1000}} \longrightarrow +\infty$$

Suites monotones

Définition

- *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante lorsque :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} \geq u_n$$

- *Elle est de plus strictement croissante lorsque :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} > u_n$.

Définition

- *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante lorsque :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} \leq u_n$$

- *Elle est de plus strictement décroissante lorsque :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} < u_n$.

Exemples.

- Une suite arithmétique de raison r est :

$$\begin{cases} \text{strictement croissante} & \text{si } r > 0 \\ \text{strictement décroissante} & \text{si } r < 0 \\ \text{constante} & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

- La suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$\begin{cases} \text{strictement croissante} & \text{si } q > 1 \\ \text{strictement décroissante} & \text{si } 0 < q < 1 \\ \text{constante} & \text{si } q = 1 \\ \text{ni croissante ni décroissante} & \text{si } q < 0 \end{cases}$$

Remarque. Pour étudier la monotonie d'une suite, c'est à dire si elle est croissante ou décroissante (etc.) on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si la suite est à terme > 0, on peut aussi comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Exercice Étudier la monotonie des suites :

$$u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \qquad ; \qquad v_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \\ &= \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{2n+2}{2n+1} > 1\end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= (n+1) \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1 \quad \text{si } n > 0\end{aligned}$$

Donc (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 1.

Suite monotone

Définition

Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Une suite strictement croissante ou strictement décroissante est dite strictement monotone.

Exemple. La suite $(-1)^n$ n'est pas monotone.

Théorème de la limite monotone

C'est le résultat le plus important pour établir l'existence de la limite d'une suite.

Définition

• *Une suite réelle est majorée si le sous-ensemble* $\left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ *est majoré, autrement dit si :*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

• *Une suite réelle est minorée si le sous-ensemble* $\left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ *est minoré, autrement dit si :*

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

Théorème

Toute suite croissante et majorée, converge.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. Alors $A = \left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est majoré et donc admet une borne supérieure. Notons $\ell = \sup(A)$ et montrons que $\sup(A) = \lim u_n$.

Soit $\varepsilon > 0$; Puisque ℓ est le plus petit majorant de A, $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. Donc

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \ell - \varepsilon \leq u_{N_0} \leq \ell$$

Mais puisque (u_n) est croissante :

$$n \geq N_0 \implies \ell - \varepsilon \leq u_{N_0} \leq u_n \leq \ell$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell$$

Autrement dit $\lim u_n = \ell^-$. ∎

Remarque. Et la convergence se fait par valeur inférieure.

Corollaire

Toute suite décroissante et minorée converge.

Démonstration. Soit (u_n) une suite décroissante et minorée ; alors la suite $(-u_n)$ est croissante et majorée, et donc converge vers ℓ. La suite (u_n) converge donc vers $-\ell$. ∎

Propriété

Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration.

Supposons d'abord que (u_n) est croissante et non majorée.

Soit $A \in \mathbb{R}$; A n'est pas un majorant de (u_n) et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geq A$. Puisque (u_n) est croissante :

$$n \geq n_0 \implies u_n \geq u_{n_0} \geq A$$

Ainsi :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies u_n \geq A$$

c'est à dire $\lim u_n = +\infty$.

Supposons ensuite que (u_n) soit décroissante et non minorée, alors $(-u_n)$ est croissante et non majorée et donc diverge vers $+\infty$. Donc $\lim u_n = -\infty$. ■

Remarque. Ainsi pour une suite monotone, les possibilités peuvent être :

$$(u_n) \text{ monotone} \quad : \begin{cases} (u_n) \text{ croissante} \quad : \begin{cases} (u_n) \text{ majorée :} & (u_n) \text{ converge} \\ \text{ou} & \\ (u_n) \text{ non majorée :} & \lim u_n = +\infty \end{cases} \\ \text{ou} \\ (u_n) \text{ décroissante} : \begin{cases} (u_n) \text{ minorée :} & (u_n) \text{ converge} \\ \text{ou} & \\ (u_n) \text{ non minorée :} & \lim u_n = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

Exercice Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n! \times n}$$

Montrer que (u_n) est convergente. (On ne demande pas de déterminer sa limite).

On étudie la monotonie de (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)! \times (n+1)} \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n! \times n}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)! \times (n+1)} - \frac{1}{n! \times n} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{(n+1)! \times n! \times n} = \frac{-1}{(n+1)! \times n! \times n} < 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est décroissante ; elle est minorée par 0 et donc converge.

Méthode. Le théorème de la limite monotone donne l'existence d'une limite finie pour une suite croissante majorée (ou décroissante minorée). Comment déterminer ensuite cette limite ?

Le plus souvent son calcul s'obtient par un passage à la limite dans une relation suivie par la suite, en général un relation de récurrence.

• Exemple : Algorithme de Babylone.

Le calcul approché de $\sqrt{2}$ peut se faire par l'algorithme de Babylone, qui consiste à calculer jusqu'à un rang suffisant, les termes de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Montrons que cette suite converge vers $\sqrt{2}$.

• Par une récurrence immédiate (u_n) est bien définie et à termes tous > 0 :
Soit $\mathscr{P}(n)$: "u_n est défini et > 0".
(I) $\mathscr{P}(0)$ est vrai.
(H) Si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$ est bien définie et > 0 car somme de termes définis et > 0. Donc $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$. C'est clair pour u_0 et :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0$$

• La suite (u_n) est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1}{u_n} - \frac{u_n}{2} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{2} - u_n)(u_n + \sqrt{2})}{2u_n} \leq 0$$

• La suite (u_n) est décroissante et minorée (par $\sqrt{2}$) ; elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite ; puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$, nécessairement $\ell \geq \sqrt{2}$.

- On détermine sa limite par passage à la limite dans la relation de récurrence.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \qquad (*)$$

Puisque $\lim u_n = \ell$ on a $\lim u_{n+1} = \ell$ et par somme et quotient :

$$\lim \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$$

D'après $(*)$, par unicité de la limite :

$$\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell} \implies \ell^2 = \frac{\ell^2}{2} + 1 \implies \ell^2 = 2 \implies \ell = \pm\sqrt{2}$$

Or puisque $\ell \geq \sqrt{2}$:

$$\lim u_n = \sqrt{2}$$

• Code en Python.

```
def racine2(N):
    u = 2
    v = u/2 + 1/u
    while abs(u-v) >= 10**-N :
        u, v = v, v/2 + 1/v
    return int(v*10**N) / 10**N
```

L'algorithme convergeant très vite (admis), on peut supposer que lorsque deux termes successifs ont N décimales identiques, toutes ces décimales sont correctes.
Ainsi racine2(N) renvoie une approximation de $\sqrt{2}$ avec N décimales exactes.

Exemple :

```
>>> 2**.5
1.4142135623730951

>>> racine2(3)
1.414

>>> racine2(6)
1.414213

>>> racine2(15)
1.414213562373095
```

Suites adjacentes

Définition

Deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes si :

– l'une est croissante, l'autre décroissante, et

– leur différence tend vers 0 : $\lim(a_n - b_n) = 0$.

Propriété

Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante.

En posant $u_n = b_n - a_n$:

$$u_{n+1} - u_n = (b_{n+1} - a_{n+1}) - (b_n - a_n) = \underbrace{(b_{n+1} - b_n)}_{\leq 0} + \underbrace{(a_n - a_{n+1})}_{\leq 0} \leq 0$$

Donc (u_n) est décroissante, et par hypothèse converge vers 0. En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$$
$$\implies b_n - a_n \geq 0$$
$$\implies b_n \geq a_n$$

Mais puisque (a_n) est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq a_0$; donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geq a_n \geq a_0$$

et donc (b_n) est minorée par a_0. D'autre part puisque (b_n) est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}, b_0 \geq b_n$; donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_0 \geq b_n \geq a_n$$

Donc (a_n) est majorée par b_0.

En résumé :

(a_n) est croissante et majorée, et donc convergente vers ℓ.

(b_n) est décroissante et minorée et donc convergente vers ℓ'. Or :

$$\lim(a_n - b_n) = 0 = \ell - \ell' \implies \ell = \ell'.$$

$\blacksquare$

Exemple. On pose pour $n \geq 1$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad ; \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

On a (v_n) décroissante (voir exercice précédent) et :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc (u_n) est croissante. Or :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!n} \longrightarrow 0$$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes ; elles sont donc convergentes et ont même limite (qui s'avère être le nombre e ; mais pour l'instant on ne sait pas le démontrer.).

Exercice Soient les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_0 = 1 \quad ; \quad b_0 = 5 \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.

b) Prouver que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

c) En considérant la suite $(a_n + b_n)$, déterminer les limites de (a_n) et (b_n).

a) Par récurrence. C'est clair au rang 0.

(H) Supposons $a_n \leq b_n$ pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$a_n \leq b_n \implies a_n + a_n + b_n \leq a_n + b_n + b_n \implies 2a_n + b_n \leq a_n + 2b_n \implies a_{n+1} \leq b_{n+1}$$

b) On a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(2a_n + b_n - 3a_n) = \frac{1}{3}(b_n - a_n) \geq 0$$
$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n - 3b_n) = \frac{1}{3}(a_n - b_n) \leq 0$$

donc (a_n) est croissante et (b_n) décroissante. De plus :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n - a_n - 2b_n) = \frac{1}{3}(a_n - b_n)$$

Donc la suite $(a_n - b_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, ainsi $\lim(a_n - b_n) = 0$. Ainsi (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

c) La suite $(a_n + b_n)$ est constante puisque :

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n + a_n + 2b_n) = \frac{1}{3}(3a_n + 3b_n) = a_n + b_n$$

Puisque (a_n) et (b_n) sont adjacentes elles convergent vers une même limite ℓ. Donc $(a_n + b_n)$ converge vers $2\ell = a_0 + b_0 = 6$. Ainsi :

$$\lim a_n = \lim b_n = 3$$

Les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la moyenne de a_0 et b_0.

Suites équivalentes

Définition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles dont le terme général ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0.

On dit que $\underline{(u_n)\text{ est équivalente à }(v_n)}$, que l'on note :

$$u_n \sim v_n$$

lorsque : $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemples.

- Si $u_n = n^2 + n + 1$ et $v_n = n^2$ alors $u_n \sim v_n$ car :

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 1$$

• Si $u_n = \sqrt{n^2+n+1}$ et $v_n = n$ alors $u_n \sim v_n$ car :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} = \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$$

• Si $u_n = a_d n^d + a_{d-1}n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ et $a_d \neq 0$ alors $u_n \sim a_d n^d$, car :

$$\frac{u_n}{a_d n^d} = 1 + \underbrace{\frac{a_{d-1}}{a_d} \times \frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{a_d} \times \frac{1}{n^{1-d}} + \frac{a_0}{a_d} \times \frac{1}{n^d}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 1$$

Une suite polynômiale non nulle

$$u_n = \sum_{k=0}^{d} a_k n^k \qquad \text{avec } a_d \neq 0$$

est équivalente à son monôme de plus haut degré $a_d n^d$.

Le résultat fondamental des suites équivalentes est :

Propriété

Soit $L \in \mathbb{R} \cup \left\{ -\infty ; +\infty \right\}$ *:*

$$\left.\begin{array}{c} u_n \sim v_n \\ et \\ \lim v_n = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim u_n = L$$

Démonstration. Par produit des limites :

$$\left.\begin{array}{l} \lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1 \\ \lim v_n = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} \times v_n = L = \lim u_n$$

■

C'est la motivation principale des équivalents : le calcul de limite.

Mais il y a une autre motivation ; pour des suites tendant vers $+\infty$ ou vers 0, être équivalent signifie non seulement avoir même limite mais aussi avoir même rapidité de convergence.

Par exemple :

$$
\begin{array}{ccc}
n \sim n+1 & \text{tandis que} & n \not\sim n^2 \\
\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n+1} & \text{tandis que} & \dfrac{1}{n} \not\sim \dfrac{1}{n^2} \\
\sqrt{n^2+n+1} \sim n & \text{et} & \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \sim \dfrac{1}{n}
\end{array}
$$

Propriété

Si (u_n) converge vers un réel $\ell \neq 0$ alors (u_n) est équivalente à la suite constante égale à ℓ :

$$u_n \sim \ell$$

Démonstration. Par quotient des limites, sous ces hypothèses $\lim \dfrac{u_n}{\ell} = 1$. ■

Propriétés

Propriété

Soient $(u_n), (v_n), (w_n), \ldots$ *des suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.*

- *Réflexivité :*

$$u_n \sim u_n$$

Démonstration. Ces propriétés découlent de celles des limites :

– Refléxivité : $\frac{u_n}{u_n} = 1 \longrightarrow 1 \implies u_n \sim u_n$.

- *Symétrie :*

$$u_n \sim v_n \implies v_n \sim u_n$$

– Symétrie : $u_n \sim v_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \implies \lim \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = \frac{1}{1} = 1$ (par quotient des limites) $\implies \lim \frac{v_n}{u_n} = 1 \implies v_n \sim u_n$.

- *Transitivité :*

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ \textit{et} \\ v_n \sim w_n \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \sim w_n$$

– Transitivité : $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n \Longrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{v_n}{w_n} = 1 \Longrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} = 1$ (par produit des limites) $\Longrightarrow \lim \frac{u_n}{w_n} = 1 \Longrightarrow u_n \sim w_n$.

- *Multiplication par $\lambda \neq 0$:*

$$\forall \lambda \neq 0,\ u_n \sim v_n \Longrightarrow (\lambda.u_n) \sim (\lambda.v_n)$$

– Multiplication par $\lambda \neq 0$:
$u_n \sim v_n \Longrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \Longrightarrow \lim \frac{\lambda u_n}{\lambda v_n} = 1 \Longrightarrow \lambda u_n \sim \lambda v_n$.

• *Inverse :*

$$u_n \sim v_n \Longrightarrow \left(\frac{1}{u_n}\right) \sim \left(\frac{1}{v_n}\right)$$

– Inverse : $u_n \sim v_n \Longrightarrow v_n \sim u_n$ (par symétrie)
$\Longrightarrow \lim \frac{v_n}{u_n} = 1 \Longrightarrow \lim \frac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{v_n}} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.

• *Puissance :*

$$u_n \sim v_n \Longrightarrow \forall p \in \mathbb{Z},\ u_n^p \sim v_n^p$$

– Puissance : $u_n \sim v_n \Longrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \Longrightarrow \forall p \in \mathbb{Z},\ \lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^p = 1$ (car $\lim\limits_{x \to 1} x^p = 1$) $\Longrightarrow \lim \left(\frac{u_n^p}{v_n^p}\right) = 1 \Longrightarrow u_n^p \sim v_n^p$.

Si de plus (u_n) et (v_n) sont strictement positives à partir d'un certain rang :

$$u_n \sim v_n \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

– Puissance réelle : $u_n \sim v_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \implies \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^{\alpha} = 1$ (car $\lim\limits_{x \to 1} \exp(\alpha \ln(x)) = 1$) $\implies \lim \left(\frac{u_n^{\alpha}}{v_n^{\alpha}}\right) = 1 \implies u_n^{\alpha} \sim v_n^{\alpha}$.

- *Valeur absolue :*

$$u_n \sim v_n \implies |u_n| \sim |v_n|$$

– Valeur absolue : $u_n \sim v_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \implies \lim \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = 1$ (car $\lim u_n = \ell \implies \lim |u_n| = |\ell|$) $\implies \lim \frac{|u_n|}{|v_n|} = 1 \implies |u_n| \sim |v_n|$.

- *Produit :*

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right\} \implies u_n u'_n \sim v_n v'_n$$

– Produit : $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n \implies \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim \frac{u'_n}{v'_n} = 1 \implies \lim \frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = 1$ (par produit des limites) $\implies u_n u'_n \sim v_n v'_n$.

- *Quotient :*

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\frac{u_n}{u'_n}\right) \sim \left(\frac{v_n}{v'_n}\right)$$

– Quotient : $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n \Longrightarrow \frac{1}{u'_n} \sim \frac{1}{v'_n}$ (par inverse d'équivalents) $\Longrightarrow \frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$ (par produit d'équivalents). ■

Remarque. Attention :

- On ne peut pas additionner des équivalents :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{array}\right\} \text{n'entraine pas en général que } \left(u_n + u'_n\right) \sim \left(v_n + v'_n\right)$$

Exemple :

$$u_n = \left(n + \sqrt{n}\right) \sim n \qquad \text{car } \frac{u_n}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 1$$

$$v_n = (1 - n) \sim (1 - n) \qquad \text{par réflexivité}$$

$$u_n + v_n = (1 + \sqrt{n}) \qquad \text{n'est pas équivalent à } (n + (1 - n)) = 1$$

• On ne peut pas composer des équivalents par une fonction :

Si (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ d'une fonction f,

$$u_n \sim v_n \text{ n'entraine pas en général que } f(u_n) \sim f(v_n)$$

Exemple :

$$(n+1) \sim n \quad \text{car } \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1$$

$$\exp(n+1) \not\sim \exp(n) \quad \text{car } \frac{e^{n+1}}{e^n} = e \longrightarrow e \neq 1$$

Exemples.

• Quotient de deux polynômes :

$$u_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots b_1 n + b_0} \qquad \text{avec } a_p \neq 0,\ b_q \neq 0$$

$$\Longrightarrow u_n \sim \frac{a_p n^p}{b_q n^q}$$

par quotient d'équivalents.

• Pour calculer l'équivalent d'une somme on ne peut pas faire la somme des équivalents de chaque terme. Il suffit de factoriser le terme "dominant" (intuitivement celui qui impose sa limite). Exemples :

$$u_n = 3n^2 - 2n + \sqrt{n} - \frac{2}{n} = 3n^2 \times \underbrace{\left(1 - \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n\sqrt{n}} - \frac{2}{3n^3}\right)}_{\longrightarrow 1} \sim 3n^2$$

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2\cos(n)}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \underbrace{\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{3\cos(n)}{n\sqrt{n}}\right)}_{\longrightarrow 1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exercice Calculer un équivalent simple de :

$$u_n = n^2\sqrt{n} - n^3\sqrt[3]{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$u_n = n^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{10}{3}} + n^{-2}$$

Le terme dominant est $-n^{\frac{10}{3}}$;

$$u_n = -n^{\frac{10}{3}} \times \underbrace{\left(1 + n^{-\frac{5}{6}} + n^{-\frac{16}{3}}\right)}_{\longrightarrow 1} \sim -n^{\frac{10}{3}} \sim -n^3\sqrt[3]{n}$$

Équivalents usuels

Les équivalents usuels suivants sont à très bien connaitre ; les utiliser simplifie grandement la levée de certaines indéterminées.

Propriété

Soit (u_n) une suite convergeant vers 0 et ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Alors :

$$\sin(u_n) \sim u_n \qquad \tan(u_n) \sim u_n \qquad 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$$

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n \qquad e^{u_n} - 1 \sim u_n$$

$$\sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2} \qquad \forall \alpha > 0, \quad (1 + u_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha u_n$$

Démonstration. Pour 3 des 5 premières il suffit d'appliquer les limites usuelles :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

avec le théorème de composition des limites : puisque $\lim u_n = 0$:

$$\lim \frac{\sin(u_n)}{u_n} = 1 \quad ; \quad \lim \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1 \quad ; \quad \lim \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} = 1$$

De $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$ on déduit par composition des limites $\lim \cos(u_n) = 1$ et donc $\cos(u_n) \sim 1$ et par quotient d'équivalents :

$$\tan(u_n) = \frac{\sin(u_n)}{\cos(u_n)} \sim \frac{u_n}{1} \sim u_n$$

Puisque :

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \implies 1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$$

$$\implies 1 - \cos(u_n) = 2\sin^2\left(\frac{u_n}{2}\right) \sim 2\left(\frac{u_n}{2}\right)^2 \sim \frac{u_n^2}{2}$$

Pour la dernière : $(1+u_n)^\alpha - 1 = e^{\alpha\ln(1+u_n)} - 1$. Puisque $\lim u_n = \lim \ln(1+u_n) = 0$ par composition des limites dans $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$:

$$\frac{e^{\alpha\ln(1+u_n)}-1}{\alpha u_n} = \underbrace{\frac{e^{\alpha\ln(1+u_n)}-1}{\alpha\ln(1+u_n)}}_{\longrightarrow 1} \times \underbrace{\frac{\alpha\ln(1+u_n)}{\alpha u_n}}_{\longrightarrow 1} \longrightarrow 1$$

d'où :

$$(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$$

L'avant dernière en est un cas particulier lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$. ■

Exemple. Calculer la limite de :

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

On a une indéterminée " $\frac{0}{0}$ ".

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{-\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}} \sim -\frac{1}{2n} \longrightarrow 0$$

Exercice Déterminer nature et limite éventuelle à l'aide d'un équivalent de :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \times \left(\sqrt{n^2-1} - n\right) \qquad ; \qquad v_n = \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{\tan \frac{(-1)^n}{n^2}}$$

- Pour (u_n) :

$$u_n \sim \frac{1}{n} \times \left(n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - n\right) \sim \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2} \longrightarrow 0^-$$

- Pour (v_n) :

$$v_n = \frac{\sqrt{1+\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1} - 1}{\tan \frac{(-1)^n}{n^2}} \sim \frac{1}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{(-1)^n}{n^2}} \sim \frac{1}{2} \times \frac{-\frac{1}{2n^2}}{\frac{(-1)^n}{n^2}} \sim -\frac{(-1)^n}{4}$$

(v_n) n'a pas de limite.