Les suites réelles

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

Définitions de la limite d'une suite
Convergence et divergence
Limites infinies
Propriétés sur les limites

Suite réelle : définition

Définition

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'image de l'entier n est noté u_n.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$; une suite réelle $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une application de $\mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Plus généralement une suite réelle est une application d'une partie infinie I de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cours, toutes les suites considérées seront définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$. On pourra les noter (u_n) ou $(u_n)_n$ plutôt que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Tous les résultats établis restent vrais pour une suite réelle quelconque ; il suffira de changer dans les définitions et propriétés "$\forall n \in \mathbb{N}$" par "$\forall n \in I$".

Convergence d'une suite

Définition

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\geq n_0}$) a pour limite le réel ℓ si :

– Pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad ou \quad \lim u_n = \ell$$

Plus formellement : $\lim u_n = \ell$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Remarque.

- L'entier N dépend de ε ; on peut le noter $N(\varepsilon)$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(\varepsilon) \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

- Rappelons que :

$$u_n \in [\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon] \iff \ell-\varepsilon \leq u_n \leq \ell+\varepsilon \iff |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Exemples.

• Une suite (u_n) constante égale à $a \in \mathbb{R}$ (*i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a$) a pour limite a. En effet, soit $\varepsilon > 0$, en prenant $N = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0 \implies |u_n - a| = 0 \leq \varepsilon$.

• Plus généralement, une suite (u_n) stationnaire en $a \in \mathbb{R}$ (. *i.e.* $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n = a$, c'est à dire constante à partir d'un certain rang) a pour limite a. En effet, soit $\varepsilon > 0$, en prenant $N = n_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies |u_n - a| = 0 \leq \varepsilon$.

• Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. Montrons que $\lim u_n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons pour $N(\varepsilon)$ un entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, par exemple $N(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Alors soit $n \geq N(\varepsilon)$:

$$n \geq N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0 \implies 0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon \implies |u_n - 0| \leq \varepsilon$$

• Supposons que $\lim u_n = \ell$ et $a \in \mathbb{R}$; alors $\lim(u_n + a) = \ell + a$. En effet :

Soit $\varepsilon > 0$; par définition il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \implies |(u_n + a) - (\ell + a)| = |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |(u_n + a) - (\ell + a)| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, $\lim(u_n + a) = \ell + a$.

De même : $\lim u_n = \ell \implies \lim(a \times u_n) = a \times \ell$. En effet :

Si $a = 0$: la suite $0 \times u_n$ est constante égale à 0, et donc $\lim 0 \times u_n = 0 = 0 \times \ell$.

Si $a \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$; posons $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|a|} > 0$. Puisque $\lim u_n = \ell$:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|a|}$$

$$\implies |a \times u_n - a \times \ell| = |a| \times |u_n - \ell| \leq |a| \times \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

et donc on a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |a \times u_n - a \times \ell| \leq \varepsilon$.

On résume ces résultats :

Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante :

$$\lim u_n = \ell \Longrightarrow \lim(u_n + a) = \ell + a$$
$$\lim u_n = \ell \Longrightarrow \lim(a \times u_n) = a \times \ell$$

Définition

Une suite (u_n) ayant une limite $\ell \in \mathbb{R}$ est dite convergente. Elle converge vers ℓ.

Sinon on dit que (u_n) est divergente.

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente : En effet, sinon il existerait $\ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $N(\varepsilon)$ tel que :

$$n \geq N(\varepsilon) \implies u_n \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon].$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies (-1)^n \in \left[\ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2}\right]$$

Mais c'est impossible puisque $(-1)^n$ et $(-1)^{n+1}$ sont à distance 2 l'un de l'autre tandis que $\left[\ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2}\right]$ est un intervalle d'amplitude 1. Plus rigoureusement : d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$:

$$2 = \left|(-1)^n - (-1)^{n+1}\right| = \left|(-1)^n - \ell + \ell - (-1)^{n+1}\right| \leq \left|(-1)^n - \ell\right| + \left|\ell - (-1)^{n+1}\right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Remarque. Déterminer la nature d'une suite consiste à déterminer si elle est convergente ou divergente ; elle ne peut être que l'un ou l'autre.

Limite par valeur supérieure

Définition

• *Une suite (u_n) convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ est dite tendre vers ℓ par valeur supérieure, que l'on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell^+ \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \ell^+$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[\ell, \ell+\varepsilon]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.

Autrement dit, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \ell \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

Limite par valeur inférieure

- *Elle est dite tendre vers ℓ par valeur inférieure, que l'on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell^- \quad ou \quad \lim u_n = \ell^-$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.

Autrement dit, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell$$

Exemple.

• $\lim \frac{1}{n} = 0^+$; en effet : Soit $\varepsilon > 0$. Prenons pour $N(\varepsilon)$ un entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, par exemple $N(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Alors soit $n \geq N(\varepsilon)$:

$$n \geq N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Longrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 0 + \varepsilon$$

• $\lim 1 - \frac{1}{n} = 1^-$; en effet : en effet : Soit $\varepsilon > 0$. Prenons pour $N(\varepsilon)$ un entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, par exemple $N(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Alors soit $n \geq N(\varepsilon)$:

$$n \geq N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon \leq -\frac{1}{n} < 0 \Longrightarrow 1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

Unicité de la limite

Propriété

La limite d'une suite convergente est unique

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'il existe ℓ_1 et ℓ_2 deux réels, avec $\ell_1 \neq \ell_2$ et : $\lim u_n = \ell_1$; $\lim u_n = \ell_2$.

Ainsi par définition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1(\varepsilon) \implies \ell_1 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_1 + \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2(\varepsilon) \implies \ell_2 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_2 + \varepsilon$$

Puisque $\ell_1 \neq \ell_2$, on peut supposer sans perte de généralité que $\ell_1 < \ell_2$, ou autrement dit que $\ell_2 - \ell_1 > 0$. Alors en considérant $\varepsilon > 0$ tel que :

$$0 < \varepsilon < \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$$

pour tout $n \geq \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$:

$$u_n \leq \ell_1 + \varepsilon < \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} = \frac{\ell_2 + \ell_1}{2} = \ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} < \ell_2 - \varepsilon \leq u_n \implies u_n < u_n$$

ce qui est contradictoire.

Limites infinies

Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

- *La suite (u_n) a pour limite $+\infty$, ce que l'on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad ou \qquad \lim u_n = +\infty$$

lorsque :

Pour tout réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Autrement dit, si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \geq A$$

Limites infinies

- *La suite (u_n) a pour limite $-\infty$, ce que l'on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \qquad ou \qquad \lim u_n = -\infty$$

lorsque :

Pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty; A]$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Autrement dit, si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \leq A$$

Exemples.

• Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n$. Alors $\lim u_n = +\infty$; en effet :

Soit $A \in \mathbb{R}$; Des que N est un entier naturel supérieur ou égal à A, on a :

$$n \geq N \implies u_n = n \geq A$$

Il suffit de prendre $N = \max(0, \lfloor A \rfloor + 1)$ qui est bien un entier naturel $\geq A$.

• Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - 2n$. Alors $\lim u_n = -\infty$; en effet :

Soit $A \in \mathbb{R}$;

$$u_n \leq A \iff 1 - 2n \leq A \iff 2n - 1 \geq -A \iff n \geq \frac{1 - A}{2}$$

Dès que N est un entier naturel supérieur ou égal à $\frac{1 - A}{2}$, on a :

$$n \geq N \implies n \geq \frac{1 - A}{2} \implies u_n \leq A$$

Il suffit de prendre $N = \max\left(\left\lfloor \frac{1 - A}{2} \right\rfloor + 1, 0\right) \in \mathbb{N}$ qui est bien $\geq \frac{1 - A}{2}$.

• Soit (u_n) une suite ayant pour limite $\pm\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$ une contante ; alors $\lim(u_n + a) = \lim u_n$. En effet :

Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque ; considérons $A_1 = A - a \in \mathbb{R}$.

Si $\lim u_n = +\infty$ alors par définition il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que :

$$n \geq N \implies u_n \geq A_1 = A - a \implies u_n + a \geq A$$

donc pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N \implies (u_n + a) \geq A$; autrement dit : $lim(u_n + a) = +\infty$.

Si $\lim u_n = -\infty$ alors par définition il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que :

$$n \geq N \implies u_n \leq A_1 = A - a \implies u_n + a \leq A$$

donc pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N \implies (u_n + a) \leq A$; autrement dit : $lim(u_n + a) = -\infty$.

Soient $a \in \mathbb{R}$ une constante et (u_n) une suite ayant une limite infinie ; alors :

$$\lim u_n = +\infty \implies \lim(u_n + a) = +\infty$$
$$\lim u_n = -\infty \implies \lim(u_n + a) = -\infty$$

• Soit (u_n) une suite ayant pour limite $\pm\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$ une contante ; alors la suite $(a \times u_n)$ a pour limite

$$\lim u_n = \pm\infty \implies \lim(a \times u_n) = \begin{cases} \lim u_n = \pm\infty & \text{si } a > 0 \\ -\lim u_n = \mp\infty & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

En effet :

– Si $a = 0$: alors la suite $(a \times u_n)$ est constante égale à 0. Elle a donc pour limite 0.

– Si $a \neq 0$: Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque ; posons $A_1 = \frac{A}{a}$. Alors par définition :

$$\lim u_n = +\infty \implies \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \geq A_1 = \frac{A}{a} \implies \begin{cases} a \times u_n \geq A & \text{si } a > 0 \\ a \times u_n \leq A & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\lim u_n = -\infty \implies \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \leq A_1 = \frac{A}{a} \implies \begin{cases} a \times u_n \leq A & \text{si } a > 0 \\ a \times u_n \geq A & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

C'est vrai pour $A \in \mathbb{R}$, c'est donc vrai pour tout $A \in \mathbb{R}$, autrement dit :

$$\lim u_n = +\infty \Longrightarrow \begin{cases} \lim a \times u_n = +\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim a \times u_n = -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \lim u_n = -\infty \Longrightarrow \begin{cases} \lim a \times u_n = -\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim a \times u_n = +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante,

$$\lim u_n = \pm\infty \Longrightarrow \begin{cases} \lim(a \times u_n) = \pm\infty & \textit{si } a > 0 \\ \lim(a \times u_n) = 0 & \textit{si } a = 0 \\ \lim(a \times u_n) = \mp\infty & \textit{si } a < 0 \end{cases}$$

• Des résultats précédents, on déduit la limite d'une suite arithmétique :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\lim u_n = \begin{cases} +\infty & si\ r > 0 \\ u_0 & si\ r = 0 \\ -\infty & si\ r < 0 \end{cases}$$

• La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'a aucune limite, finie ou infinie. On a deja montré que (u_n) est divergente.

Soit $A = 2$; alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < A$; donc (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$.

Soit $A = -2$; alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > A$; donc (u_n) n'a pas pour limite $-\infty$.

Propriété

La limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique.

Démonstration. La propriété 1 établit deja que la limite d'une suite convergente est unique. Il reste donc à montrer que si une suite (u_n) admet une limite infinie, elle ne peut pas en admettre une autre, finie ou infinie.

Montrons d'abord que l'on ne peut pas avoir $\lim u_n = +\infty$ et $\lim u_n = -\infty$. Procédons par l'absurde. Dans le cas contraire on aurait :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_1(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1(A) \implies u_n \geq A \quad \text{car } \lim u_n = +\infty$$
$$\text{et } \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_2(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2(A) \implies u_n \leq A \quad \text{car } \lim u_n = -\infty$$

En appliquant la première assertion pour $A = 1$ et la deuxième pour $A = 0$ on a alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \implies u_n \geq 1$$
$$\text{et } \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \implies u_n \leq 0$$

Ainsi si $n \geq \max(N_1, N_2)$, alors $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$ et donc :

$$1 \leq u_n \leq 0 \implies 1 \leq 0$$

C'est contradictoire. Ainsi on ne peut pas avoir en même temps $\lim u_n = +\infty$ et $\lim u_n = -\infty$.

Montrons ensuite que si $\lim u_n = \pm\infty$ alors la suite (u_n) est divergente ; pour cela procédons par l'absurde (on suppose $\lim u_n = +\infty$; l'autre cas est analogue) :

Supposons que $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et que (par exemple) $\lim u_n = +\infty$; alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1(\varepsilon) \implies \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$
$$\text{et}\quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_2(A) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2(A) \implies u_n \geq A$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et $A = \ell + 2\varepsilon$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq \max(N_1(\varepsilon), N_2(A)) \implies \begin{cases} n \geq N_1(\varepsilon) \\ \text{et} \\ n \geq N_2(A) \end{cases} \implies \begin{cases} \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon \\ \text{et} \\ u_n \geq A = \ell + 2\varepsilon \end{cases}$$

$$\implies u_n \leq \ell + \varepsilon < \ell + 2\varepsilon \leq u_n \implies u_n < u_n$$

Ce qui est contradictoire. ■

Remarque. Pour une suite réelle les possibilités sont :

$$\text{Suite réelle } (u_n) \begin{cases} \text{Convergente : } \exists\ \ell \in \mathbb{R},\ \lim u_n = \ell \\ \text{ou bien} \\ \text{Divergente : } \begin{cases} \text{Aucune limite} \\ \text{ou bien} \\ \text{Limite infinie : } \begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \text{ou bien} \\ \lim u_n = -\infty \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Remarque. Nature et limite d'une suite ne dépendent pas de ses premiers termes : si on modifie les premier termes d'une suite (u_n) on ne change ni sa nature (convergente/divergente) ni sa limite.

Autrement dit si deux suite (u_n) et (v_n) sont telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies u_n = v_n$, alors (u_n) et (v_n) ont même nature, et même limite, s'il en est.

Limites et valeur absolue

Propriété

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lim u_n = \ell \iff \lim |u_n - \ell| = 0$$

En particulier :

$$\lim u_n = 0 \iff \lim |u_n| = 0$$

Démonstration. Par définition :

$$\lim u_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Or $||u_n - \ell| - 0| = |u_n - \ell|$

$$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies ||u_n - \ell| - 0| \leq \varepsilon$$
$$\iff \lim |u_n - \ell| = 0$$

Propriété

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$; alors :

$$\lim u_n = \ell \implies \lim |u_n| = |\ell|$$

Démonstration. Par définition :

$$\lim u_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Or d'après l'inégalité triangulaire $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

$$\implies \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies ||u_n| - |\ell|| \leq \varepsilon$$
$$\implies \lim |u_n| = |\ell|$$

■

Remarque. Attention la réciproque est fausse :

Par exemple $u_n = (-1)^n$ diverge tandis que $|u_n| = 1$ converge.

Limite et signe d'une suite

Propriété

Soit (u_n) une suite réelle ayant pour limite :

$$\begin{cases} \lim u_n = \ell > 0 \\ \textit{ou} \\ \lim u_n = +\infty \end{cases}$$

Alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$. Autrement dit :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n > 0$$

Remarque. Autrement dit, une suite ayant une limite > 0 ou $+\infty$ est > 0 à partir d'un certain rang.

Démonstration. On distingue deux cas selon que (u_n) converge ou diverge vers $+\infty$.

1^{er} cas : $\lim u_n = +\infty$; par définition :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \geq A$$

en prenant $A > 0$, on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n \geq A > 0$$

on a donc la conclusion recherchée.

2^{eme} cas : $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^*$; par définition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$; alors $\exists N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \implies \underbrace{-\varepsilon \leq u_n - \ell} \leq \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leq u_n \implies \frac{\ell}{2} \leq u_n \underset{\ell > 0}{\implies} 0 < u_n$$

On a la conclusion recherchée. ■

Exemple. En particulier :

$$\lim u_n = +\infty \implies \lim |u_n| = +\infty$$

En effet, si $\lim u_n = +\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que :

$$n \geq N \implies u_n > 0 \implies u_n = |u_n|.$$

Les suites (u_n) et $(|u_n|)$ coincident donc à partir d'un certain rang, elle ont donc même limite.

Ce résultat a pour principal intérêt le corollaire important suivant :

Corollaire

Passage à la limite dans une inégalité

Soient (u_n) une suite convergente et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- *Si à partir d'un certain rang $u_n \geq a$, alors* $\lim u_n \geq a$.
- *Si à partir d'un certain rang $u_n \leq b$, alors* $\lim u_n \leq b$.

Démonstration. Notons $\ell = \lim u_n$; on montre séparément les deux assertions.

- Si $\exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \geq a$.

Considérons la suite $a - u_n$; elle a pour limite le réel $a - \ell$. Si l'on avait $a - \ell > 0$, alors d'après la propriété, on aurait à partir d'un certain rang $a - u_n > 0$. Or $n \geq N \implies a - u_n \leq 0$. Donc nécessairement $a - \ell \leq 0$, c'est à dire $\lim u_n \geq a$.

- Si $\exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \leq b$.

Considérons la suite $u_n - b$; elle a pour limite le réel $\ell - b$. Si l'on avait $\ell - b > 0$, alors d'après la propriété, on aurait à partir d'un certain rang $u_n - b > 0$. Or $n \geq N \implies u_n - b \leq 0$. Donc nécessairement $\ell - b \leq 0$, c'est à dire $\lim u_n \leq b$. ■

Limites et suites bornées

Définition

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite <u>bornée</u> lorsque le sous-ensemble $\{u_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est borné.

C'est à dire si :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$$

ou de manière équivalente si :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq A.$$

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Alors par définition il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que :

$$n \geq N(\varepsilon) \implies \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

En particulier l'ensemble :

$$A = \left\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq N(\varepsilon) \right\}$$

est borné : il est minoré mar $m_1 = \ell - \varepsilon$ et majoré par $M_1 = \ell + \varepsilon$.

Considérons l'ensemble des termes restants de la suite :

$$B = \left\{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } n < N(\varepsilon) \right\}$$

c'est un ensemble fini de $\mathbb{R}$ et il est donc borné ; minoré par $m_2 = \min(B)$ et majoré par $M_2 = \max(B)$.

En posant : $m = \min(m_1, m_2)$ et $M = \max(M_1, M_2)$ on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} m \leq m_1 \leq u_n \leq M_1 \leq M \\ \text{ou} \\ m \leq m_2 \leq u_n \leq M_2 \leq M \end{cases} \implies m \leq u_n \leq M$$

Ainsi la suite (u_n) est bornée. ■

Propriété

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad \text{et} \qquad (v_n) \text{ est bornée}$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \times v_n) = 0$$

Démonstration. Puisque $\lim u_n = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n| \leq \varepsilon \tag{1}$$

et puisque (v_n) est bornée :

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq M \tag{2}$$

Montrons que $\lim u_n v_n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$; posons $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. Alors d'après (1) :

$$\exists N(\varepsilon_1) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(\varepsilon_1) \Longrightarrow |u_n| \leq \varepsilon_1$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} |u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq \varepsilon_1 \times M = \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n v_n| \leq \varepsilon$$

i.e. $\lim u_n v_n = 0$. ■

Exercice Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$.

La suite $(cos(n))$ est bornée puisque $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1$, et la suite $(\frac{1}{n})$ tend vers 0.

Donc $\lim u_n = 0$.

Caractérisation de la limite à l'aide des termes de rangs pairs et impairs

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

- *$(u_{2n})_n$ est la suite extraite des termes de rangs pairs,*
- *$(u_{2n+1})_n$ est la suite extraite des termes de rangs impairs.*

Exemples. Autrement dit :

$$(u_n) = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, \ldots)$$
$$(u_{2n}) = (u_0, u_2, u_4, u_6, u_8, u_{10}, u_{12}, u_{14}, u_{16}, \ldots)$$
$$(u_{2n+1}) = (u_1, u_3, u_5, u_7, u_9, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{17}, \ldots)$$

• Pour la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$. La suite extraite de rangs pairs, (u_{2n}), est constante égale à 1. La suite extraite de rangs impairs, (u_{2n+1}), est constante égale à -1. La suite (u_n) n'a pas de limite.

Théorème

Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$; une suite (u_n) a pour limite L si et seulement si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont pour limite L.

Démonstration. Montrons deux implications :

$(\Rightarrow)$ Supposons que $\lim u_n = L$ et montrons que $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = L$.

- 1^{er} cas : si $L \in \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - L| \leq \varepsilon$$

$$\text{en particulier : } \quad n \geq N \implies \begin{cases} 2n \geq N \\ 2n+1 \geq N \end{cases} \implies \begin{cases} |u_{2n} - L| \leq \varepsilon \\ |u_{2n+1} - L| \leq \varepsilon \end{cases}$$

et donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_{2n} - L| \leq \varepsilon \quad \textit{i.e.} \quad \lim u_{2n} = L$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_{2n+1} - L| \leq \varepsilon \quad \textit{i.e.} \quad \lim u_{2n+1} = L$$

- 2^{eme} cas : si $L = +\infty$.

$$\begin{aligned}
&\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \geq A \quad \textit{i.e.} \quad \lim u_n = +\infty \\
\implies &\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_{2n} \geq A \quad \textit{i.e.} \quad \lim u_{2n} = +\infty \\
\implies &\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_{2n+1} \geq A \quad \textit{i.e.} \quad \lim u_{2n+1} = +\infty
\end{aligned}$$

- 3^{eme} cas : si $L = -\infty$.

$$\begin{aligned}
&\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \leq A \quad \textit{i.e.} \quad \lim u_n = -\infty \\
\implies &\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_{2n} \leq A \quad \textit{i.e.} \quad \lim u_{2n} = -\infty \\
\implies &\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_{2n+1} \leq A \quad \textit{i.e.} \quad \lim u_{2n+1} = -\infty
\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = L$ et montrons que $\lim u_n = L$.

- 1^{er} cas : si la limite est finie, $L \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition, puisque $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = L$:

$$\begin{aligned}
\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 &\implies |u_{2n} - L| \leq \varepsilon \\
\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 &\implies |u_{2n+1} - L| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Posons $N = \max(2N_0, 2N_1 + 1)$ et soit $n \geq N$.

– Si n est pair : $n = 2k$; alors :

$$n \geq N \implies n \geq 2N_0 \implies 2k \geq 2N_0 \implies k \geq N_0 \implies |u_{2k} - L| \leq \varepsilon$$
$$\implies |u_n - L| \leq \varepsilon$$

– Si n est impair : $n = 2k + 1$; alors :

$$n \geq N \implies n \geq 2N_1 + 1 \implies 2k + 1 \geq 2N_1 + 1 \implies k \geq N_1 \implies |u_{2k+1} - L| \leq \varepsilon$$
$$\implies |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies |u_n - L| \leq \varepsilon$, et donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies |u_n - L| \leq \varepsilon$$

autrement dit $\lim u_n = L$.

• 2^{eme} cas : si $L = +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque. Par définition, puisque $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = L$:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \implies u_{2n} \geq A$$
$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \implies u_{2n+1} \geq A$$

Posons $N = \max(2N_0, 2N_1 + 1)$ et soit $n \geq N$.

– Si n est pair : $n = 2k$; alors :

$$n \geq N \implies n \geq 2N_0 \implies 2k \geq 2N_0 \implies k \geq N_0 \implies u_{2k} \geq A \implies u_n \geq A$$

– Si n est impair : $n = 2k + 1$; alors :

$$n \geq N \implies n \geq 2N_1 + 1 \implies 2k + 1 \geq 2N_1 + 1 \implies k \geq N_1 \implies u_{2k+1} \geq A \implies u_n \geq A$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies u_n \geq A$, et donc :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \geq A$$

autrement dit $\lim u_n = L$.

• 3^{eme} *cas* : si $L = -\infty$.

Le même argument que précédemment s'applique (changer toutes les inégalités $u_* \geq A$ en $u_* \leq A$). ■

Exercice Soit : $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

1) Montrer que la suite extraite (u_{2n}) est convergente.

2) Montrer que la suite extraite (u_{2n+1}) est divergente.

3) En déduire la nature de (u_n).

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \sin(n\pi) = 0$, donc $\lim u_{2n} = 0$; (u_{2n}) est convergente.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = v_n$.

La suite (v_n) a pour suites extraites de rangs pairs et impairs :

$$v_{2n} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \; ; \; v_{2n+1} = \sin\left((2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Ainsi (u_{2n+1}) diverge.

3) La suite (u_n) n'a pas de limite puisque (u_{2n}) converge tandis que (u_{2n+1}) diverge.

Théorèmes de limites par encadrement

Dans le cas d'une limite finie, c'est le théorème des gendarmes :

Théorème

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim u_n = \lim w_n = \ell$$

et un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N_0 \implies u_n \leq v_n \leq w_n$$

alors la suite (v_n) est convergente et $\lim v_n = \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition :

$$\exists N_u \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_u \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$
$$\exists N_w \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_w \implies |w_n - \ell| \leq \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$$

et par hypothèse :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \implies u_n \leq v_n \leq w_n$$

Posons $N = \max(N_0, N_u, N_w)$; pour tout entier $n \geq N$:

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leq v_n \leq \ell + \varepsilon \implies |v_n - \ell| \leq \varepsilon$$

par définition, $\lim v_n = \ell$. ■

Exercice

Appliquer le théorème des gendarmes pour montrer que les suites suivantes sont convergentes et déterminer leur limite :

$$u_n = \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n} \quad ; \quad v_n = \frac{\lfloor 1 - n/3 \rfloor}{n} \quad ; \quad w_n = \frac{\sqrt{n^2 - n + 100}}{n}$$

• Pour (u_n) ; de $\lfloor n/2 \rfloor \leq n/2 < \lfloor n/2 \rfloor + 1$ on déduit l'encadrement $n/2 - 1 < \lfloor n/2 \rfloor \leq n/2$ puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n/2 - 1}{n} < \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n} \leq \frac{1}{2}$$

En appliquant le théorème des gendarmes :

$$\lim \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\lim u_n = \frac{1}{2}}$$

• Pour (v_n) : par le même argument : $-n/3 < \lfloor 1 - n/3 \rfloor \leq 1 - n/3$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{3} < \frac{\lfloor 1 - n/3 \rfloor}{n} \leq \frac{1 - n/3}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{3}$$

En appliquant le théorème des gendarmes :

$$\lim -\frac{1}{3} = \lim \frac{1}{n} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{\lim v_n = -\frac{1}{3}}$$

• Pour (w_n) : puisque $n \geq 0$: $n^2 - n + 100 \geq n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$. Pour $n \geq N_0 = 100$, $n^2 - n + 100 \leq n^2$. Donc par croissance de la fonction racine carrée :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies n - 1 \leq \sqrt{n^2 - n + 100} \leq n$$

On en déduit l'encadrement :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \leq \frac{\sqrt{n^2 - n + 100}}{n} \leq 1$$

En appliquant le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim w_n = 1}$.

Dans le cas d'une limite infinie, le résultat devient :

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\exists N \in \mathbb{N}_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \implies u_n \leq v_n$$

Alors :

$$\lim u_n = +\infty \implies \lim v_n = +\infty$$
$$\lim v_n = -\infty \implies \lim u_n = -\infty$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\lim u_n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \implies u_n \geq A$$

Posons $N = \max(N_0, N_1)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N \implies v_n \geq u_n \geq A$$

et donc $\lim v_n = +\infty$.

Supposons ensuite que $\lim v_n = -\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \implies v_n \leq A$$

Posons $N = \max(N_0, N_1)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N \implies u_n \leq v_n \leq A$$

et donc $\lim u_n = -\infty$. ■

Exercice

Déterminer nature et limite éventuelle de :

$$u_n = (2 + (-1)^n)n \qquad v_n = (-2 + (-1)^n)n \qquad w_n = (1 + (-1)^n)n$$

- $u_n \geq (2-1)n = n$ et $\lim n = +\infty \implies \lim u_n = +\infty$.
- $v_n \leq (-2+1)n = -n$ et $\lim -n = -\infty \implies \lim v_n = -\infty$.
- $w_{2n} = 2n$, $w_{2n+1} = 0$ ont des limites différentes, donc (w_n) n'a pas de limite.