Systèmes d'équations linéaires

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux
http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux

système linéaire de p équations à n inconnues

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, et soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq p}$ des familles d'éléments de $\mathbb{K}$.

Un <u>système linéaire</u> de p équations à n inconnues, est un système d'équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}\cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{1,j}\cdot x_j & + & \cdots & + & a_{1,n}\cdot x_n & = & b_1\\
\vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots\\
a_{i,1}\cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{i,j}\cdot x_j & + & \cdots & + & a_{i,n}\cdot x_n & = & b_i\\
\vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots\\
a_{p,1}\cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{p,j}\cdot x_j & + & \cdots & + & a_{p,n}\cdot x_n & = & b_p
\end{array}\right.$$

on peut encore écrire :

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j = b_1 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}x_j = b_p \end{array}\right.$$

Résoudre un tel système revient à déterminer tous les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *vérifiant les p équations.*

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ -2x + 3y - z = 4 \\ y + z = 2 \end{array}\right.$$

est un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues réelles. Le résoudre revient à déterminer le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ constitué des triplets (x, y, z) vérifiant les 3 équations.

Définition

• *Deux systèmes linéaires (S_1), (S_2) à n inconnues sont dits équivalents si ils ont mêmes solutions.*

On écrit alors :

$$(S_1) \iff (S_2)$$

• *Un système linéaire est dit compatible s'il admet au moins une (un n-uplet) solution. Sinon il est dit incompatible.*

Exemples.

• Les deux systèmes :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

sont équivalents ; ils ont tous les deux pour ensemble de solutions le singleton :

$$\mathscr{S} = \left\{(0,0)\right\}$$

• Le système $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ est incompatible : il n'a aucune solution puisque :

$$x - y = 1 \underset{\times(-1)}{\Longrightarrow} -x + y = -1 \neq 1.$$

Opérations élémentaires

Il s'agit de définir des opérations élémentaires qui transforment un système en un système équivalent.

Définition

Étant donné un système linéaire de p équations à n inconnues, dont on note les lignes/équations $L_1, \ldots, L_p$, on appelle opération élémentaire une transformation du système consistant à :

- *Intervertir les lignes L_i et L_j ; que l'on note : $L_i \leftrightarrow L_j$.*
- *Remplacer une ligne L_i par λL_i pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$; que l'on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.*
- *Ajouter à une ligne L_i, λL_j avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$; que l'on note : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.*

Propriété

Une opération élémentaire change un système linéaire en un système équivalent.

Démonstration. En deux étapes.

D'abord si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est solution d'un système (S_1), il est en particulier solution des équations L_i et L_j et donc des équations λL_i et $L_i + \lambda L_j$. Il est donc encore solution du système (S_2) obtenu en appliquant une opération élémentaire :

$$L_i \leftrightarrow L_j \quad \text{ou} \quad L_i \leftarrow \lambda L_i \quad (\text{avec } \lambda \neq 0) \quad \text{ou} \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

au système (S_1).

Ensuite, si l'on passe du système (S_1) au système (S_2) par une opération élémentaire :

$$L_i \leftrightarrow L_j \quad \text{ou} \quad L_i \leftarrow \lambda L_i \quad (\text{avec } \lambda \neq 0) \quad \text{ou} \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

alors on peut passer du système (S_2) au système (S_1) par l'une des opérations élémentaires (respectivement) :

$$L_i \leftrightarrow L_j \quad \text{ou} \quad L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i \quad (\text{avec } \frac{1}{\lambda} \neq 0) \quad \text{ou} \quad L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$$

Ainsi tout n-uplet solution de (S_1) est aussi solution du système (S_2) obtenu après opération élémentaire, et réciproquement. Ainsi les systèmes (S_1) et (S_2) ont mêmes solutions : ils sont équivalents. ■

Remarque. On utilise aussi souvent l'opération élémentaire :

$$L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$$

qui revient à appliquer $L_i \leftarrow \lambda L_i$ suivi de $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$.

Méthode. Pour résoudre un système linéaire on peut appliquer une suite d'opérations élémentaires qui le transforment en un système équivalent dont les solutions sont évidentes.

Exemple. Résoudre le système linéaire :

$$(S)\left\{\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ -2x+3y-z=4 \\ y+z=2 \end{array}\right.$$

$$(S) \underset{L_2 \leftarrow L_2+2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 7y+z=6 \\ y+z=2 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2-7L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ -6z=-8 \\ y+z=2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ y+z=2 \\ -6z=-8 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{6}L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ y+z=2 \\ z=\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

On obtient un système sous forme triangulaire supérieur.

Pour terminer la résolution, on peut poursuivre avec des opérations élémentaires :

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ y = 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array} \right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{r} x = 1 - 2 \times \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array} \right.$$

ou procéder par substitution :

$$\left\{ \begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ y = 2 - z = 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = 1 - 2y - z = 1 - 2 \times \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3} = 1 - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array} \right.$$

Ainsi il y a un unique triplet solution :

$$\mathscr{S} = \left\{ \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right) \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

résolution par la méthode du pivot de Gauss

Problème : Soit un système (S) de p équations linéaires à n inconnues dans $\mathbb{K}$, à résoudre.

On suppose qu'il possède au moins un coefficient $a_{i,j}$ non nul ; sinon $\mathscr{S} = \mathbb{K}^n$ ou $\varnothing$ selon que les seconds membres soient tous nuls ou pas.

Etape 1. On choisit un coefficient non nul sur la première colonne, c'est à dire $a_{i,1} \neq 0$. Quitte à permuter les colonnes en renumérotant les variables, c'est toujours possible.

On applique l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_i$, pour que l'élément choisi se trouve ligne 1. Cet élément $a_{1,1} \neq 0$ est appelé le pivot :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{a_{1,1}}\cdot x_1 & + & a_{1,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}\cdot x_n & = & b_1\\
a_{2,1}\cdot x_1 & + & a_{2,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}\cdot x_n & = & b_2\\
\vdots & & & & & & & & \vdots\\
a_{i,1}\cdot x_1 & + & a_{i,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}\cdot x_n & = & b_i\\
\vdots & & & & & & & & \vdots\\
a_{p,1}\cdot x_1 & + & a_{p,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{p,n}\cdot x_n & = & b_p
\end{array}\right.$$

Etape 2. On effectue pour tout $i \in [\![2, p]\!]$ l'opération élémentaire :

$$L_i \leftarrow \underbrace{a_{1,1}}_{\text{pivot}} L_i - a_{i,1} L_1 \quad \text{ou} \quad L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$$

de façon à ce que les coefficients de la première colonne soient tous nuls de la ligne 2 à la ligne p. On obtient le système équivalent :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}
\boxed{a_{1,1}}\cdot x_1 & + & a_{1,2}\cdot x_i + \cdots + a_{1,n}\cdot x_n = b_1\\
 & & \boxed{\begin{array}{ccccccc}
a'_{2,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a'_{2,n}\cdot x_n & = & b'_2\\
\vdots & & & & & & \vdots\\
a'_{i,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a'_{i,n}\cdot x_n & = & b'_i\\
\vdots & & & & & & \vdots\\
a'_{p,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a'_{p,n}\cdot x_n & = & b'_p
\end{array}} \quad (S')
\end{array}\right.$$

Le sous-système (S') constitué des lignes 2 jusqu'à p, a $(p-1)$ équations et $(n-1)$ inconnues, et soit :

– Le sous-système (S') est constitué d'une seule équation : le système est réduit ; on passe à l'étape suivante.

– Tous les coefficients $a'_{i,j}$ de (S') sont nuls : le système est réduit ; on passe à l'étape suivante.

– Au moins un coefficient de (S') est non nul. On reprend à l'étape 1 sur le sous-système (S').

Puisque le nombre d'équation et d'inconnue du sous-système diminue strictement à chaque répétition des étapes 1 et 2, on finira nécessairement (après au plus $(p-1)$ répétitions) par se retrouver à l'étape 3 suivante.

Étape 3. Après avoir répété les étapes 1 et 2 autant de fois que nécessaire, on finit par se retrouver avec un système équivalent et <u>réduit</u> de l'une des deux formes suivantes :

- Un système triangulaire supérieur :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
\boxed{\alpha_{1,1}} \cdot x_1 & + & \alpha_{1,2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \alpha_{1,n} \cdot x_n & = & \beta_1 \\
 & & \boxed{\alpha_{2,2}} \cdot x_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \alpha_{2,n} \cdot x_n & = & \beta_2 \\
 & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{\alpha_{n,n}} \cdot x_n & = & \beta_n
\end{array}\right.$$

avec $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \ldots, \alpha_{n,n}$ tous non nuls.

Dans ce cas le nombre d'équations est nécessairement égal au nombre d'inconnues, c'est à dire $p = n$.

- Un système trapézoidal :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\boxed{\alpha_{1,1}}\cdot x_1 & + & \alpha_{1,2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \alpha_{1,n}\cdot x_n & = & \beta_1 \\
 & & \boxed{\alpha_{2,2}}\cdot x_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & \alpha_{2,n}\cdot x_n & = & \beta_2 \\
 & & & \ddots & & & & & \vdots & & \\
 & & & & \boxed{\alpha_{r,r}}\cdot x_r & + & \cdots & + & \alpha_{r,n}x_n & = & \beta_r \\
 & & & & & & & & 0 & = & \beta_{r+1} \\
 & & & & & & & & 0 & = & \beta_{r+2} \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & 0 & = & \beta_p
\end{array}\right.
\quad \begin{array}{l} (*) \\ \\ (**) \end{array}$$

avec : $r \leq p$, $r \leq n$ et $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \ldots, \alpha_{r,r}$ tous non nuls et :

$(*)$ Les équations principales (il y en a moins que le nombre d'inconnues).

$(**)$ Les équations auxiliaires (il peut ne pas y en avoir).

- Dans le cas d'un système triangulaire :

Le système a une unique solution. On l'obtient par substitution en remontant de la dernière à la première ligne.

Le rang du système est défini comme étant égal à n : c'est le nombre d'équations du système réduit. Dans ce cas c'est aussi le nombre d'inconnues.

• Dans le cas d'un système trapézoidal :

Il y a deux cas dépendant des équations auxiliaires : elles peuvent former un système :

– compatible : lorsqu'il n'y en a aucune ou lorsque leurs seconds membres sont tous nuls :

$$\beta_{r+1} = \beta_{r+2} = \cdots = \beta_p = 0$$

– incompatible : lorsqu'au moins un des seconds membres est non nul :

$$\exists i \in [\![r+1, p]\!],\ \beta_i \neq 0$$

• *Si les équations auxiliaires sont incompatibles, alors le système n'a aucune solution.*

• *Si les équations auxiliaires sont compatibles, alors le système admet :*
– Une seule solution lorsque r = n, c'est à dire lorsque le nombre d'équations principales est égal au nombre d'inconnues.

– Une infinité de solutions sinon. On les explicite alors en fonction des variables auxiliaires $x_{r+1}, \dots, x_n$*, que l'on fait passer au second membre, et en procédant par substitution de la ligne r jusqu'à la première ligne.*

Le rang du système est défini comme étant égal à l'entier r, c'est à dire au nombre d'équations principales. Le nombre de variables auxiliaires est alors égal à $n - r$ *(nombre de variables moins le rang).*

Exemples. Trois systèmes de 3 équations à 3 inconnues réelles.

- $$(S)\left\{\begin{array}{r} 2x+y+z=2 \\ x-y+z=3 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$$

$$(S) \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} \boxed{x}+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ -2y=2 \\ -y-z=0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow -L_2 \\ L_3\leftarrow -L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2y=-2 \\ y+z=0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ \boxed{y}+z=0 \\ 2y\quad=-2 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y+z=0 \\ -2z=-2 \end{array}\right.$$ réduit triangulaire supérieur

Il y a une unique solution, obtenue par substitution :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-y-z=1 \\ y=-z=-1 \\ z=1 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S}=\left\{(1,-1,1)\right\}$$

-
$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{r} \boxed{x} + y + z = 0 \\ -y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{array} \right. \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ y + z = -1 \\ -y - z = 1 \end{array} \right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ \boxed{y} + z = -1 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

Le système est trapézoidal et compatible. Il y a une infinité de solutions, exprimées en fonction de la variable auxiliaire $z \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -y - z = 1 + z - z = 1 \\ y = -1 - z \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S} = \left\{ (1, -1 - z, z) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

- $$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 0 \\ -y - z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ -y - z = 1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \boxed{y} + z = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Le système est trapézoidal et incompatible. Il n'y a aucune solution :

$$\mathscr{S} = \varnothing$$

Exercice Résoudre par la méthode du pivot de Gauss :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{r} 2x-y+2z=6\\ x+2y-z=2\\ x-y+z=2\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=4\\ x-y+z-t=0\\ x+y-z-t=0\end{array}\right.$$

• Résolution de (S_1) :

$$\left\{\begin{array}{r} 2x-y+2z=6\\ x+2y-z=2\\ x-y+z=2\end{array}\right. \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x-y+z=2\\ x+2y-z=2\\ 2x-y+2z=6\end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} \boxed{x}-y+z=2\\ 3y-2z=0\\ y\quad\ =2\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x-y+z=2\\ y\quad\ =2\\ 3y-2z=0\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x-y+z=2\\ \boxed{y}\quad\ =2\\ -2z=-6\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+y-z=1\\ y=2\\ z=3\end{array}\right.$$

Ainsi il y a un unique triplet solution :

$$\mathscr{S}=\left\{(1,2,3)\right\}$$

• Résolution de (S_2) :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=4 \\ x-y+z-t=0 \\ x+y-z-t=0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x&+&y&+&z&+&t&=&4 \\ &-&2y&&&-&2t&=&-4 \\ &&&-&2z&-&2t&=&-4 \end{array}\right.$$

Le système est réduit sous forme trapézoidal, on choisit t comme variable auxiliaire.

$$\left\{\begin{array}{l} x=4-y-z-t=2t-t=t \\ y=2-t \\ z=2-t \end{array}\right.$$

Il y a une infinité de solution :

$$\mathscr{S}=\left\{(t,2-t,2-t,t)\mid t\in\mathbb{R}\right\}$$

Nombre de solutions

Propriété

Un système d'équations linéaires admet zéro, une ou une infinité de solutions.

Démonstration. Découle de la résolution par la méthode du pivot de Gauss. ∎

Remarque. Pour un système d'équations à n inconnues, une solution est un n-uplet, c'est à dire un élément de $\mathbb{K}^n$.

Rang d'un système

Définition

Pour un système réduit, on appelle pivot chaque premier coefficient non nul de ses équations principales. Le rang du système est défini comme le nombre de ses pivots.

Remarque.

– Pour un système réduit triangulaire, le rang est égal à n, nombre d'équations et nombre d'inconnues. (Toutes ses équations sont dites principales.)

– Pour un système réduit trapézoidal, Le rang est égal au nombre de ses équations principales ; le nombre de variables auxiliaires est égal au nombre de variables moins le rang.

L'intérêt de cette notion de rang est qu'elle ne dépend pas de la manière de réduire le système.

Proposition-Définition

Pour un système, tous les systèmes réduits obtenus par des opérations élémentaires ont même rang. Aussi on définit le rang d'un système comme étant le rang d'un système obtenu après réduction.

Démonstration. Sera démontré dans le chapitre "Applications linéaires". ■

Remarque. L'algorithme du pivot de Gauss permet de calculer le rang de n'importe quel système.

Système échelonné

On peut étendre ces notions au systèmes dits échelonnés.

Définition

Un système linéaire est dit <u>échelonné</u> si le nombre de coefficients nuls en début de lignes augmente strictement ligne après ligne.

Exemples.

• Le système suivant est échelonné et réduit (triangulaire) :

$$\left\{\begin{array}{rl} x - y + z &= 1 \\ y + z &= 2 \\ 2z &= 3 \end{array}\right.$$

• Le système suivant est échelonné :

$$\left\{\begin{array}{rl} x - y + z &= 1 \\ z &= 2 \end{array}\right.$$

Il n'est pas réduit, mais échanger l'ordre des variables y et z donne un système réduit (trapézoidal).

• Le système suivant n'est pas échelonné :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \phantom{x - {}} y + z = 2 \\ \phantom{x - {}} y \phantom{{} + z} = 3 \end{cases}$$

La transformation $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ le réduirait en un système échelonné (triangulaire). Échanger l'ordre des variables y et z le transformerait en un système échelonné.

Remarque. Un système échelonné admet des solutions si et seulement si il ne contient aucune équation auxiliaire incompatible, c'est à dire de la forme $0 = \beta_j$ avec $\beta_j \neq 0$. Les solutions s'obtiennent de la même façon que dans la dernière étape du pivot de Gauss, par substitution, après avoir choisi d'éventuelles variables auxiliaires. Bref, échelonner un système suffit à le résoudre.

Proposition-Définition

Le premier coefficient non nul sur le membre de gauche de chaque ligne d'un système échelonné, est appelé un pivot.

Le rang d'un système échelonné est égal à son nombre de pivots.

Démonstration. Appliquer la méthode du pivot de Gauss à un système échelonné non réduit consistera à permuter l'ordre de certaines variables pour le transformer en un système réduit trapézoidal. Son rang sera alors son nombre d'équations principales, c'est à dire son nombre de pivots. ■

Exemples.

• Le système échelonné suivant est de rang 3 :

$$\left\{\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ y + z &= 2 \\ 2z &= 3 \end{aligned}\right.$$

• Le système échelonné suivant est de rang 2 :

$$\left\{\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}\right.$$

Exercice Échelonner les systèmes suivants puis en déduire leur rang et leur nombre de solutions (on ne demande pas de déterminer ces solutions).

$$(S_1)\left\{\begin{array}{r} 2x+2y+z+t=2\\ 2x+2y+3z-2t=3\\ x+y-z+t=0\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{r} 2x+y+2z=2\\ x-y+z=3\\ x+2y-z=0\\ 4x+2y+4z=4\end{array}\right.$$

$$(S_1)\underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{r} x+y-z+t=0\\ 2x+2y+3z-2t=3\\ 2x+2y+z+t=2\end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{r} x+y-z+t=0\\ 5z-4t=3\\ 3z-t=2\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow 5L_3-3L_2}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{r} x+y-z+t=0\\ 5z-4t=3\\ 7t=-6\end{array}\right.$$ rang $= 3$; il y a une infinité de solutions.

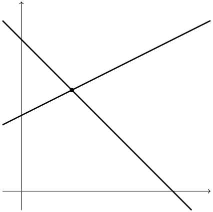
$$(S_2) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{r} x - y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + 2y + 4z = 4 \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z &=& 3 \\ 3y \qquad &=& -4 \\ 3y - 2z &=& -3 \\ 6y \qquad &=& -8 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z &=& 3 \\ 3y \qquad &=& -4 \\ -2z &=& 1 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right.$$

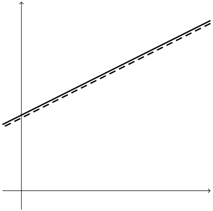
rang $= 3$; il y a une unique solution

Géométriquement

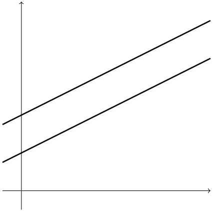
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 2$, chaque équation est une équation de droite. Un système de deux équations peut avoir :



Une solution unique : Deux droites sécantes.

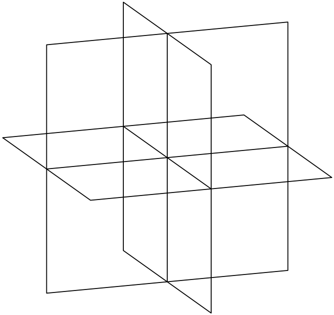


Une infinité de solutions : Deux droites confondues.

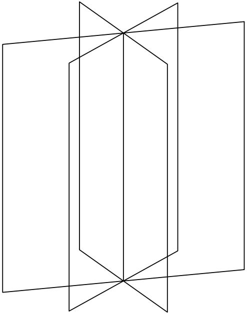


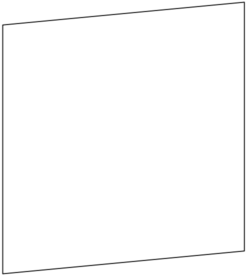
Aucune solution : Deux droites parallèles.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 3$, chaque équation est une équation de plan. Un système de trois équations peut avoir :



Une solution unique : Trois plans s'intersectant en un point.

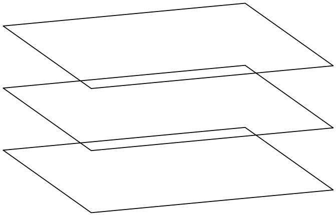


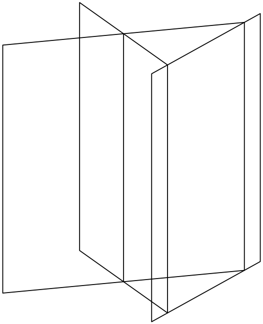


Une infinité de solutions :

Trois plans s'intersectant
le long d'une droite.
(1 variable auxiliaire).

Trois plans confondus.
(2 variables auxiliaires).





Aucune solution :

Trois plans parallèles.

Deux plans sécants en une droite parallèle au troisième.