

# Trigonométrie

BCPST1 - Lycée Fénelon

Jean-Philippe Préaux

<http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux>

## Définitions

- Le cercle trigonométrique
- Valeurs remarquables

## Formulaire de trigonométrie

- Formules de symétrie
- Formules d'addition et de duplication

## Application : transformation d'expressions trigonométriques

## Équations trigonométriques

# Notation

Pour 3 réels  $a, b, c$ , on écrit :

$$a \equiv b \ [c]$$

lu "  $a$  est congru à  $b$  modulo  $c$ ", pour :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + k \cdot c.$$

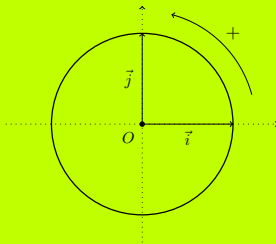
**Exemple.**

$$x \equiv \alpha \ [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \alpha + 2k\pi.$$

# Le cercle trigonométrique

## Définition

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le cercle trigonométrique est le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 1, muni d'une orientation dans le sens direct :



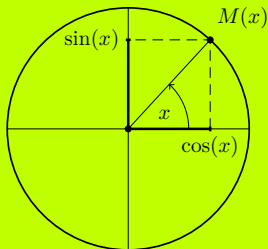
- À tout réel  $x \in \mathbb{R}$ , correspond un unique point  $M$  du cercle  $\mathcal{C}$ , tel que l'angle orienté  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$  soit congru à  $x$  modulo  $2\pi$  :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv x \quad [2\pi].$$

# Le cercle trigonométrique

On appelle :

- cosinus de  $x$ , noté  $\cos(x)$ , l'abscisse du point  $M$ ,
- sinus de  $x$ , noté  $\sin(x)$ , l'ordonnée du point  $M$ ,



# Mesure principale d'un angle

## Proposition-Définition

Pour tout point  $M$  du cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$ , il existe un unique réel  $x_0$  dans l'intervalle  $] -\pi, \pi]$  tel que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv x_0 \quad [2\pi]$ .

Ce réel  $x_0 \in ] -\pi, \pi]$  est la mesure principale de l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ .

**Démonstration.** Soit  $M \in \mathcal{C}$  associé au réel  $x$ . On a par définition de la partie entière :

$$\begin{aligned} \left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor \leq -\frac{x-\pi}{2\pi} < \left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor + 1 &\xrightarrow{\times(-1)} -\left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor - 1 < \frac{x-\pi}{2\pi} \leq -\left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor \\ \xrightarrow{+ \left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor} -1 < \frac{x-\pi}{2\pi} + \left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor \leq 0 &\xrightarrow{\times 2\pi} -2\pi < x - \pi + 2\pi \times \left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor \leq 0 \\ &\xrightarrow{+\pi} -\pi < x + 2\pi \times \underbrace{\left\lfloor -\frac{x-\pi}{2\pi} \right\rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \leq \pi \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=x_0} \end{aligned}$$

Ainsi  $x_0 \in ]-\pi, \pi]$  et  $x \equiv x_0 [2\pi]$ ; d'où l'existence.

Pour l'unicité, si l'on a  $x_0, x_1 \in ]-\pi, \pi]$  avec  $x_0 \equiv x_1 [2\pi]$ , alors :

$$\left. \begin{array}{l} -2\pi < x_1 - x_0 < 2\pi \\ x_1 - x_0 \in 2\pi\mathbb{Z} \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} -1 < \frac{x_1 - x_0}{2\pi} < 1 \\ \frac{x_1 - x_0}{2\pi} \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \implies \frac{x_1 - x_0}{2\pi} = 0 \implies x_1 = x_0$$



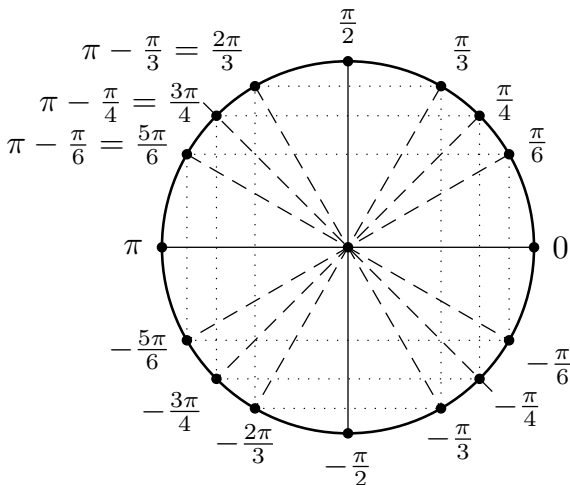
**Remarque.** Plus généralement : pour tout réel  $a$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! x_0 \in ]a, a + 2\pi], x \equiv x_0 [2\pi]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! x_0 \in [a, a + 2\pi[, x \equiv x_0 [2\pi]$$

**Remarque.** Angles remarquables :

On a représenté tous les angles remarquables, et leur mesure principale :





## Propriété

Soit  $x \in \mathbb{R}$  ; alors :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\sin(x) = 0 \iff x \equiv 0 \quad [\pi] \quad ; \quad \cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad ; \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

**Démonstration.** Un point  $M(x)$  de coordonnées  $(x_M, y_M)$  sur le cercle  $\mathcal{C}$  est à distance 1 de l'origine  $O$ , c'est-à-dire :

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = 1 \implies x_M^2 + y_M^2 = 1 \implies \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

puisque par définition,  $x_M = \cos(x)$  et  $y_M = \sin(x)$ .

Ainsi, puisque  $\cos^2(x) \geq 0$  et  $\sin^2(x) \geq 0$ , on a alors :

$$\begin{cases} \cos^2(x) \leq 1 \implies -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ \text{et} \\ \sin^2(x) \leq 1 \implies -1 \leq \sin(x) \leq 1 \end{cases}$$

On a  $\sin(x) = 0$  si et seulement si  $M \in (O, \vec{i})$  si et seulement si :

$$\begin{cases} x \equiv 0 \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi \quad [2\pi] \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = (2k+1)\pi \end{cases} \iff \exists n \in \mathbb{Z}, x = n\pi \iff x \equiv 0 \quad [\pi]$$

et  $\cos(x) = 0$  si et seulement si  $M \in (O, \vec{j})$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\ & \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \iff \exists n \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{2} + n\pi \\ & \iff x \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \end{aligned}$$

Finalement pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x + 2k\pi \equiv x \quad [2\pi]$  et donc  $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$   
et  $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ . ■

## Définition

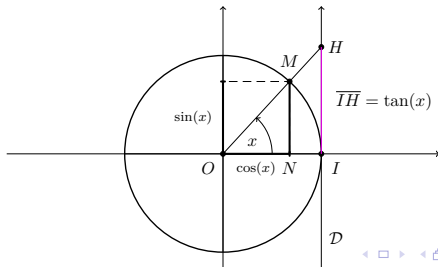
Soit  $x$  un réel, tel que  $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ . On note  $\tan(x)$ , appelée tangente de  $x$ , le réel :

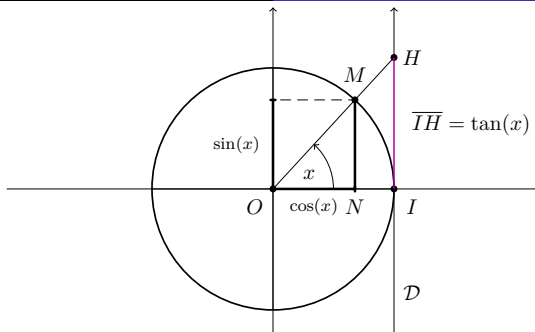
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

**Remarque.** Interprétation géométrique de  $\tan(x)$ .

Soit  $M(x)$  un point de  $\mathcal{C}$ . Notons  $I(1,0)$  le point de l'axe des abscisses tel que  $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$  et  $N$  le point de  $(O, \vec{i})$  d'abscisse  $\cos(x)$ .

Considérons  $D$  la droite verticale passant par  $I$ , et  $H$  le point intersection des droites  $(OM)$  et  $D$ ; lorsque  $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ ,  $(OM)$  et  $D$  ne sont pas parallèles, de sorte que leur point d'intersection  $H$  est bien définie.





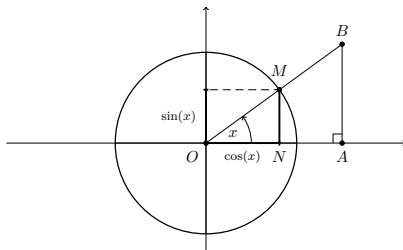
Alors  $O, N, I$  et  $O, M, H$  sont alignés dans cet ordre et  $(NM) \parallel (IH)$ . D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{IH}{OI} = \frac{NM}{ON} \xrightarrow{OI=1} IH = \frac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|} = |\tan(x)|$$

De plus le vecteur  $\overrightarrow{IH}$  est de même sens que  $\vec{j}$  si et seulement si  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  sont de même signe, si et seulement si  $\tan(x) \geq 0$ . Ainsi, une fois  $D$  muni d'une orientation vers le haut,  $\tan(x)$  est la longueur algébrique  $\overrightarrow{IH}$  (comptée positivement vers le haut, négativement vers le bas).

**Remarque.** Interprétation géométrique de  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  et  $\tan(x)$  dans un triangle rectangle.

Soit  $OAB$  un triangle rectangle en  $A$ , d'angle au sommet  $O$  :  $x = \widehat{AOB}$ .



Alors :

$$\sin(x) = \frac{\text{côté oppoSé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{OB}$$

$$\cos(x) = \frac{\text{côté adjaCent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{OA}{OB}$$

$$\tan(x) = \frac{\text{côté oppoSé}}{\text{côté adjaCent}} = \frac{AB}{OA}$$

Il suffit d'appliquer le théorème de Thalès dans les triangles  $ONM$  et  $OAB$ .

# Valeurs remarquables

## Propriété

| $x$       | 0 | $\pi/6$      | $\pi/4$      | $\pi/3$      | $\pi/2$     |
|-----------|---|--------------|--------------|--------------|-------------|
| $\sin(x)$ | 0 | $1/2$        | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1           |
| $\cos(x)$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$        | 0           |
| $\tan(x)$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1            | $\sqrt{3}$   | $\parallel$ |

**Démonstration.** Pour un réel  $x$ , on note  $M(x)$  le point du cercle trigonométrique correspondant,  $C$  son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses,  $S$  son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées, et  $I$  et  $J$  tels que  $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$  et  $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ . Lorsque  $x \in [0, \pi/2]$ , par définition  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  sont positifs, ainsi :

$$OS = \sin(x) \quad ; \quad OC = \cos(x) \quad ; \quad OI = OJ = OM = 1.$$

- Pour  $x = 0$  ou  $x = \frac{\pi}{2}$ .

D'après la propriété 1, on a  $\sin(0) = 0$  et  $\cos(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$ , donc  $\tan(0) = 0$ .

On a aussi  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$  et  $\sin(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{1-0^2} = 1$ ;  $\tan$  n'est pas définie en  $\frac{\pi}{2}$ .

- Pour  $x = \pi/3$ .

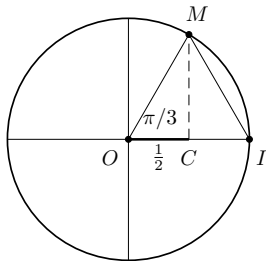
Le triangle  $OMI$  est isocèle en  $O$  puisque  $OM = OI$  et il a un angle au sommet  $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{3}$ . Il est donc équilatéral. Sa hauteur  $[MC]$  issue de  $M$  est donc aussi sa médiane.

$$\text{Donc } \cos(x) = OC = \frac{OI}{2} = \frac{1}{2}.$$

De  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  et  $\sin(x) \geq 0$ , on en retire :

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et donc } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{3}.$$



- Pour  $x = \pi/6$ .

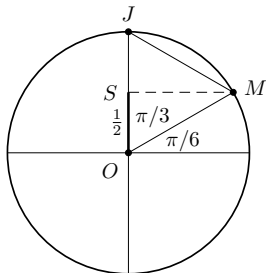
Le triangle  $OMJ$  est isocèle en  $O$ , puisque  $OM = OJ$  et il a un angle au sommet  $\widehat{MOJ} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ . Il est donc équilatéral. Sa hauteur  $[MS]$  issue de  $M$  est donc aussi sa médiane.

$$\text{Donc } \sin(x) = OS = \frac{OJ}{2} = \frac{1}{2}.$$

De  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$  et  $\cos(x) \geq 0$ , on en retire :

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et donc } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$





- Pour  $x = \pi/4$ .

Le rectangle  $OCMS$  a une diagonale  $[OM]$  qui est bissectrice de l'angle au sommet  $\widehat{SOC}$  puisque :

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{COM} + \widehat{MOS} = \frac{\pi}{2} \\ \widehat{COM} = \widehat{MOS} \end{array} \right\} \implies \widehat{COM} = \widehat{MOS} = \frac{\pi}{4}.$$

Le quadrilatère  $OCMS$  est donc un carré. Ainsi  $OC = OS$  soit :

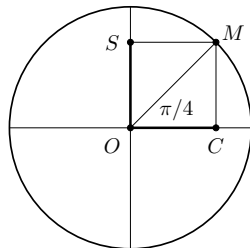
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

et donc :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \implies 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\implies \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{et } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1.$$



# Formulaire de trigonométrie

Pour calculer les valeurs de  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\tan(x)$  en d'autres valeurs de  $x$ , on tente de se ramener aux valeurs remarquables en appliquant les formules qui suivent.

# Formules de symétrie

Les formules qui suivent découlent de symétries remarquables du cercle trigonométrique.

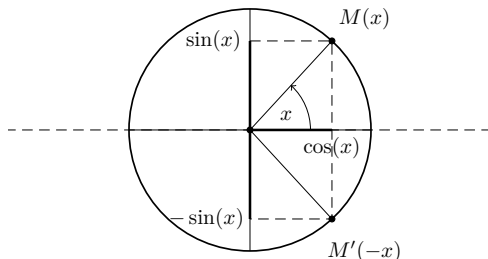
## Propriété

Pour tout réel  $x$ , lorsque bien définies :

- (i)  $\cos(-x) = \cos(x)$  ;  $\sin(-x) = -\sin(x)$  ;  $\tan(-x) = -\tan(x)$ .
- (ii)  $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$  ;  $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$  ;  $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ .
- (iii)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$  ;  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$  ;  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ .

**Démonstration.**

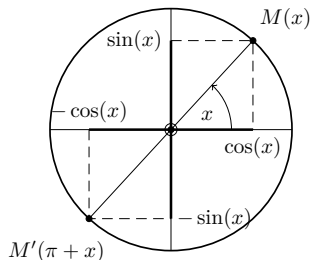
(i). La symétrie d'axe  $(O, \vec{i})$  envoie le point  $M(x_M, y_M)$  sur  $M'(x_M, -y_M)$  et change le point  $M(x)$  du cercle trigonométrique en  $M'(-x)$ .



Ainsi par définition :

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin(x) \quad \implies \tan(-x) = -\tan(x).$$

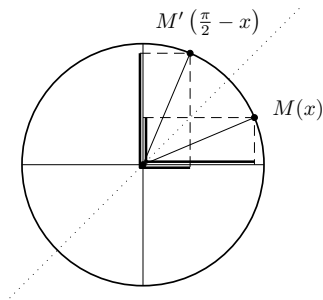
(ii). La symétrie de centre  $O$  envoie le point  $M(x_M, y_M)$  sur  $M'(-x_M, -y_M)$  et change le point  $M(x)$  du cercle trigonométrique en  $M'(\pi + x)$ .



Ainsi par définition :

$$\cos(\pi+x) = -\cos(x) \quad ; \quad \sin(\pi+x) = -\sin(x) \quad \implies \tan(\pi+x) = \tan(x).$$

(iii). La symétrie d'axe  $(O, \vec{i} + \vec{j})$  envoie le point  $M(x_M, y_M)$  sur  $M'(y_M, x_M)$  et change le point  $M(x)$  du cercle trigonométrique en  $M'(\frac{\pi}{2} - x)$ .



Ainsi par définition :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad \implies \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}.$$



On en déduit facilement les formules supplémentaires :

### Corollaire

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \quad ; \quad \sin(\pi - x) = \sin(x) \quad ; \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \quad ; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

### Démonstration.

$$\cos(\pi - x) = \cos(\pi + (-x)) = -\cos(-x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(\pi + (-x)) = -\sin(-x) = \sin(x)$$

$$\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\tan(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\frac{1}{\tan(x)}$$

**Exercice 1.** Compléter la tableau des valeurs remarquables :

| $x$       | 0 | $\pi/6$       | $\pi/4$       | $\pi/3$       | $\pi/2$     | $2\pi/3$      | $3\pi/4$      | $5\pi/6$      | $\pi$  |
|-----------|---|---------------|---------------|---------------|-------------|---------------|---------------|---------------|--------|
| $\sin(x)$ | 0 | $1/2$         | $\sqrt{2}/2$  | $\sqrt{3}/2$  | 1           | $\sqrt{3}/2$  | $\sqrt{2}/2$  | $1/2$         | 0      |
| $\cos(x)$ | 1 | $\sqrt{3}/2$  | $\sqrt{2}/2$  | $1/2$         | 0           | $-1/2$        | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | -1     |
| $\tan(x)$ | 0 | $\sqrt{3}/3$  | 1             | $\sqrt{3}$    | $\parallel$ | $-\sqrt{3}$   | -1            | $-\sqrt{3}/3$ | 0      |
| $x$       | 0 | $-\pi/6$      | $-\pi/4$      | $-\pi/3$      | $-\pi/2$    | $-2\pi/3$     | $-3\pi/4$     | $-5\pi/6$     | $-\pi$ |
| $\sin(x)$ | 0 | $-1/2$        | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | -1          | $-\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-1/2$        | 0      |
| $\cos(x)$ | 1 | $\sqrt{3}/2$  | $\sqrt{2}/2$  | $1/2$         | 0           | $-1/2$        | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | -1     |
| $\tan(x)$ | 0 | $-\sqrt{3}/3$ | -1            | $-\sqrt{3}$   | $\parallel$ | $\sqrt{3}$    | 1             | $\sqrt{3}/3$  | 0      |



# Formules d'addition et de duplication

## Propriété

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$$

**Démonstration.** On commence par établir le développement de  $\cos(a - b)$  dont on déduira les 3 autres formules. Soient  $A(a)$  et  $B(b)$  deux points du cercle trigonométrique. Alors :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a \quad ; \quad (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$$

et d'après la relation de Chasles :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = -(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a - b$$

Formons le produit scalaire des vecteurs  $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} &= \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a) \\ &= OB \times OA \times \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})}\right) \\ &= \cos(a - b) \end{aligned}$$

D'où  $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$ .

En appliquant cette formule à  $a$  et  $(-b)$  avec  $\cos(-x) = \cos(x)$  et  $\sin(-x) = -\sin(x)$  :

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a - (-b)) = \cos(a) \cos(-b) + \sin(a) \sin(-b) \\ &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b). \end{aligned}$$

En utilisant la transformation  $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  :

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b) \\ &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\end{aligned}$$

En appliquant cette formule à  $a$  et  $(-b)$  avec  $\cos(-x) = \cos(x)$  et  $\sin(-x) = -\sin(x)$  :

$$\begin{aligned}\sin(a - b) &= \sin(a + (-b)) = \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a) \\ &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).\end{aligned}$$



**Remarque.** On peut condenser ces formules sous la forme :

$$\begin{aligned}\sin(a \pm b) &= \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

**Exercice 2.**

1) Exprimer en fonction de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos(x) \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(x) \times \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(x) \times \frac{1}{2} + \cos(x) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Que remarquez vous ? Est-ce étonnant ?

Ils sont égaux. Ce n'est pas étonnant, puisque :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

2) Calculer les cosinus, sinus et tangente de  $\frac{\pi}{12}$  :

On remarque que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ . Ainsi :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

On déduit des formules d'addition, les formules de duplication :

## Propriété

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2 \cos^2(a) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(a) \end{aligned}$$

**Démonstration.** Pour la première :

$$\sin(2a) = \sin(a + a) = \sin(a) \cos(a) + \sin(a) \cos(a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

Pour la seconde :

$$\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos(a) \cos(a) - \sin(a) \sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

Puis en utilisant  $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$  :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) + \sin^2(a) - 2 \sin^2(a) = 1 - 2 \sin^2(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 \blacksquare$$

**Exercice 3.** Exprimer en fonction de  $\cos(a)$  et  $\sin(a)$  :

$$\begin{aligned}\sin(4a) &= \sin(2 \times 2a) = 2 \sin(2a) \cos(2a) = 4 \sin(a) \cos(a) (\cos^2(a) - \sin^2(a)) \\ &= 4 \sin(a) \cos^3(a) - 4 \sin^3(a) \cos(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(4a) &= \cos(2 \times 2a) = \cos^2(2a) - \sin^2(2a) = (\cos^2(a) - \sin^2(a))^2 - 4 \sin^2(a) \cos^2(a) \\ &= \cos^4(a) + \sin^4(a) - 6 \sin^2(a) \cos^2(a)\end{aligned}$$

**Exercice 4.** Montrer que pour tout réels  $a, b$ , lorsque bien définies :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

Elles se déduisent toutes de la première :

$$\begin{aligned}
 \tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \\
 &= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \times \frac{\sin(b)}{\cos(b)}} \\
 &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}
 \end{aligned}$$

En l'appliquant à  $a$  et  $(-b)$  avec  $\tan(-x) = -\tan(x)$  :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) + \tan(-b)}{1 - \tan(a)\tan(-b)} = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

En l'appliquant à  $a$  et  $a$  :

$$\tan(2a) = \tan(a+a) = \frac{\tan(a) + \tan(a)}{1 - \tan(a)\tan(a)} = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$



# Application : transformation d'expressions trigonométriques

On considère une expression de la forme :

$$E = a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$$

pour  $a, b$  et  $\theta$  trois réels non nuls donnés. Nous allons voir comment elle peut toujours s'écrire sous la forme :

$$K \times \cos(\theta \pm \varphi) \quad \text{ou} \quad K \times \sin(\theta \pm \varphi).$$

Puisque  $a$  et  $b$  sont non nuls,  $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ , et donc :

$$E = \sqrt{a^2 + b^2} \times \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \cos(\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \sin(\theta) \right)$$

Or :

$$0 \leq a^2 \leq a^2 + b^2 \implies 0 \leq \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \implies 0 \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \implies \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$$

$$0 \leq b^2 \leq a^2 + b^2 \implies 0 \leq \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \implies 0 \leq |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \implies \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$$

Ainsi :

$$-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$$

considérons un point  $M(\phi)$  du cercle trigonométrique d'abscisse  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  ;  
c'est possible d'après l'inégalité précédente. Alors :

$$\begin{aligned}\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} &\implies \sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) = 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \\ &\implies \sin(\varphi) = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$

Quitte à changer  $\varphi$  en  $-\varphi$ , on a donc l'existence de  $\varphi \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{a^2 + b^2} \times (\cos(\varphi) \times \cos(\theta) + \sin(\varphi) \times \sin(\theta)) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(\theta - \varphi)\end{aligned}$$

on a obtenu la forme souhaitée.

**Remarques.** On aurait pu tout aussi bien choisir  $\varphi$  tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \implies E = \sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(\theta + \varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \implies E = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sin(\theta + \varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \implies E = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sin(\theta - \varphi)$$

**Méthode.** Lorsque l'on peut déterminer  $\varphi$ , cette méthode permet de transformer toute expression de la forme  $a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$  en  $K \times \cos(\theta \pm \varphi)$  ou  $K \times \sin(\theta \pm \varphi)$ .

En Physique : la superposition de deux signaux sinusoidaux de même fréquence est un signal sinusoidal, de même fréquence et déphasé ;  $\varphi$  est le déphasage.

**Exemple.** Écrire  $\cos(\theta) + \sin(\theta)$  sous la forme  $K \times \cos(\theta + \varphi)$ .

$$\begin{aligned}\cos(\theta) + \sin(\theta) &= \sqrt{1^2 + 1^2} \times \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \right) \\ &= \sqrt{2} \times \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(\theta) \right) \\ &= \sqrt{2} \times \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

**Exercice 5.** Écrire  $E = \sqrt{3}\sin(x) - \cos(x)$  sous la forme  $K \times \sin(x + \varphi)$ .

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{3 + 1} \times \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x) \right) \\ &= 2 \times \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(x) \right) \\ &= 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

# Équations trigonométriques

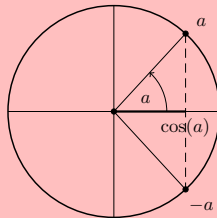
Nous admettrons pour l'instant les résultats de cette partie. On pourra les démontrer plus tard.

Pour la résolution d'équations, la propriété suivante est fondamentale :

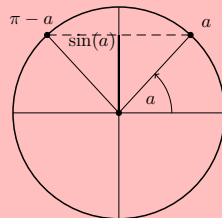
## Propriété

Soit  $a \in \mathbb{R}$  ; alors :

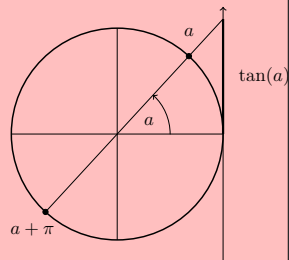
$$\cos(x) = \cos(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$$



$$\sin(x) = \sin(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$$



$$\tan(x) = \tan(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + k\pi$$



**Exercice 6.** Résoudre les équations :

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{3} \quad (2)$$

(1) On a  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , donc :

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

ainsi :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

(2) On a montré dans l'exercice précédent que :

$$\sqrt{3} \sin(x) - \cos(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin(x) - \cos(x) = \sqrt{3} &\iff \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$



Lorsque le second membre de l'équation n'est pas une valeur remarquable, on peut utiliser les notations suivantes :

### Proposition-Définition

- Pour tout  $a \in [-1, 1]$ , l'équation  $\cos(x) = a$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . Cette solution est notée  $\arccos(a)$ .
- Pour tout  $a \in [-1, 1]$ , l'équation  $\sin(x) = a$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Cette solution est notée  $\arcsin(a)$ .
- Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'équation  $\tan(x) = a$  admet une unique solution dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Cette solution est notée  $\arctan(a)$ .

**Exemple.** Résoudre l'équation :

$$\cos(2x) = \frac{1}{4} \quad (E)$$

$$(E) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} 2x = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi, -\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \right\}.$$