

Cours : Variables aléatoires réelles

BCPST1 - Lycée Fénélon

Jean-Philippe Préaux

<http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux>

Variables aléatoires

Définitions et notations

Exemple : indicatrice d'une partie

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Fonction de répartition

Espérance, moments, variance

Espérance mathématique

Moments d'une variable aléatoire.

Variance - Écart-type

Variables aléatoires indépendantes

Variables aléatoires indépendantes

Variables mutuellement indépendantes

Lois usuelles

Loi certaine

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Définitions et notations

Définition

- Soit un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$; on appelle variable aléatoire réelle (en abrégé V.A.R) sur Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

- L'ensemble des images par X est noté :

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

et appelé l'univers image de X .

Remarque. Une V.A.R. est une quantité numérique qui varie en fonction des résultats d'une expérience aléatoire.

Exemples.

- On lance deux dés 6 ; on prend comme univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. Soit par exemple $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $\omega \in \Omega$ associe la somme des 2 dés :

$$X((1, 2)) = 3 ; X((3, 4)) = 7 ; \text{etc.} ; X((a, b)) = a + b \qquad X(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket.$$

- On tire successivement et sans remise 4 boules dans une urne en contenant initialement 5 blanches et 10 noires. On choisit pour univers l'ensemble des 4-listes sans répétition des 15 boules.

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $\omega \in \Omega$ associe le nombre de boules blanches obtenues. Son univers image est $X(\Omega) = \llbracket 0, 4 \rrbracket$.

Si on ne tire plus 4 boules, mais 6, l'univers image devient $X(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$: on ne peut pas obtenir plus de 5 blanches.

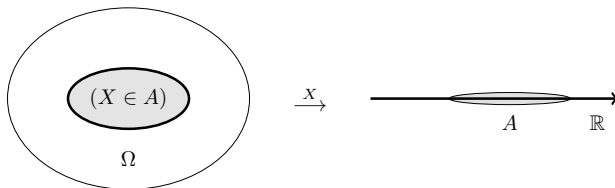
Si cette fois-ci on ne tire plus 6 boules mais 11, l'univers image devient $X(\Omega) = \llbracket 1, 5 \rrbracket$: on ne peut pas obtenir plus de 5 blanches. Mais on ne peut pas non plus obtenir plus de 10 noires ; on aura donc au moins une blanche.

Définition

Avec les mêmes notations, si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $(X \in A)$ l'événement de Ω :

$$(X \in A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$

Illustration.



Exemple. Reprenons l'exemple du lancer de deux dés ; X est la V.A.R. désignant la somme des deux dés.

Soit $A = \{2, 3\} \subset \mathbb{R}$;

$$(X \in A) = \{\omega \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \mid X(\omega) \in A\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\} \subset \Omega$$

est l'événement : "la somme des dés est ≤ 3 ".

Définition

Avec les mêmes notations ; soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $(X = a)$ désigne l'événement $(X \in \{a\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$,
 - $(X > a)$ désigne l'événement $(X \in]a, +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}$,
 - $(X \geq a)$ désigne l'événement $(X \in [a, +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq a\}$,
 - $(a \leq X \leq b)$ désigne l'événement $(X \in [a, b]) = \{\omega \in \Omega \mid a \leq X(\omega) \leq b\}$,
- etc.

Remarque. On pourra rencontrer aussi les notations $[X = a]$ ou $\{X = a\}$, etc.

Exercice. Reprenons l'exemple du lancer de deux dés ; X est la V.A.R. désignant la somme des deux dés.

$$\begin{aligned} X : \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (i, j) &\longmapsto i + j \end{aligned}$$

Décrire les éléments des événements $(X = 4)$, $(X \geq 10)$, $(2 \leq X \leq 3)$ et $(X \leq 1)$.

Résolution.

$$(X = 4) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 4\} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$(X \geq 10) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq 10\} = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5)\}$$

$$(2 \leq X \leq 3) = \{\omega \in \Omega \mid 2 \leq X(\omega) \leq 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$(X \leq 1) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1\} = \emptyset$$

Remarque. Une V.A.R. est une quantité numérique variant en fonction des résultats d'une expérience aléatoire. Bien choisie elle permet une description simple d'événements liés à cette quantité.

Exemple : indicatrice d'une partie

Définition

- Soit un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$; pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, on appelle indicatrice de A l'application notée χ_A ou $\mathbf{1}_A$ et définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

C'est une variable aléatoire sur Ω d'univers image

$$\mathbf{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$$

et vérifiant :

$$(\mathbf{1}_A = 1) = A \quad ; \quad (\mathbf{1}_A = 0) = \bar{A}$$

Propriété

Soient A et B deux parties de Ω ; alors les indicatrices de leur intersection, réunion et complémentaire s'obtiennent à partir de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ par les formules :

- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Démonstration.

- $\mathbb{1}_{A \cap B}$ et $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ sont deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$ et quelque soit $\omega \in \Omega$:

$$\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \iff \begin{cases} \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \\ \text{et} \\ \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \omega \in A \\ \text{et} \\ \omega \in B \end{cases} \iff \omega \in A \cap B \iff \mathbb{1}_{A \cap B}(\omega) = 1.$$

Ainsi $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

- $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ sont deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$ et quelque soit $\omega \in \Omega$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{1}_{\bar{A}}(\omega) = 1 \iff \omega \in \bar{A} \iff \omega \notin A \iff \mathbb{1}_A(\omega) = 0 \\ \mathbb{1}_{\bar{A}}(\omega) = 0 \iff \omega \notin \bar{A} \iff \omega \in A \iff \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \end{array} \right\} \implies \mathbb{1}_{\bar{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$$

Ainsi : $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

- D'après ce qui précède :

$$\mathbb{1}_{\bar{A} \cap \bar{B}} = \mathbb{1}_{\bar{A}} \mathbb{1}_{\bar{B}} = (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) = 1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

Puisque $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, on a alors :

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$



Exemple. On lance un dé 6 ; soit $\Omega = [[1, 6]]$ et les évènements :
 $A = [[3, 6]]$: "obtenir un résultat ≥ 3 ",
 $B = \{2, 4, 6\}$: "obtenir un résultat pair".

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A : \quad & 1 \mapsto 0 \\ & 2 \mapsto 0 \\ & 3 \mapsto 1 \\ & 4 \mapsto 1 \\ & 5 \mapsto 1 \\ & 6 \mapsto 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_B : \quad & 1 \mapsto 0 \\ & 2 \mapsto 1 \\ & 3 \mapsto 0 \\ & 4 \mapsto 1 \\ & 5 \mapsto 0 \\ & 6 \mapsto 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A \cap B} : \quad & 1 \mapsto 0 \\ & 2 \mapsto 0 \\ & 3 \mapsto 0 \\ & 4 \mapsto 1 \\ & 5 \mapsto 0 \\ & 6 \mapsto 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A \cup B} : \quad & 1 \mapsto 0 \\ & 2 \mapsto 1 \\ & 3 \mapsto 1 \\ & 4 \mapsto 1 \\ & 5 \mapsto 1 \\ & 6 \mapsto 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\bar{A}} : \quad & 1 \mapsto 1 \\ & 2 \mapsto 1 \\ & 3 \mapsto 0 \\ & 4 \mapsto 0 \\ & 5 \mapsto 0 \\ & 6 \mapsto 0\end{aligned}$$

Loi de probabilité d'une V.A.R.

Définition

Étant donné une V.A.R. X sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, on appelle loi de probabilité de X (ou loi de X) l'application :

$$\begin{aligned} f_X : X(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

Remarque. Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ les valeurs prises par X , alors donner la loi de X revient à donner l'univers image $X(\Omega)$ et les valeurs des probabilités :

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$$

pour tout $k = 1, \dots, n$.

On peut présenter la loi de X dans un tableau, le tableau de la loi de X :

x_k	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x_k)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

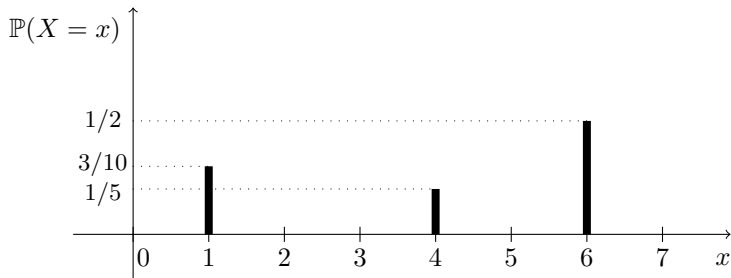
ou encore graphiquement par l'histogramme de la loi (voir plus loin).

Exemple. Une urne contient 3 boules portant le numéro 1, 2 boules portant le numéro 4 et 5 boules portant le numéro 6. On tire une boule dans l'urne au hasard ; on prend comme univers $\Omega = \llbracket 1, 10 \rrbracket$ (en supposant les boules identifiées à l'aide d'un autre numéro), muni de la probabilité uniforme. Soit X la V.A.R. qui associe à chaque boule tirée son numéro 1, 4 ou 6 ;
 $X(\Omega) : \{1, 4, 6\}$.

Le tableau de la loi de X est :

x_k	1	4	6
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

L'histogramme de la loi de X est :



Propriété

Soit X une variable aléatoire sur Ω . Posons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; la famille d'événements

$$(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_k), \dots, (X = x_n)$$

est un système complet d'événements.

En particulier :

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = x_k) = 1.$$

Démonstration.

Il s'agit de démontrer que les événements $(X = x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont 2 à 2 incompatibles et que leur réunion est Ω .

Soit $i \neq j$ et $\omega \in (X = x_i) \cap (X = x_j)$, c'est-à-dire $X(\omega) = x_i = x_j$. C'est impossible puisque $i \neq j \implies x_i \neq x_j$. Ainsi :

$$(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$$

Les événements sont 2 à 2 incompatibles.

Montrons que $\bigcup_{k=1}^n (X = x_k) = \Omega$. Puisque $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (X = x_k) \subset \Omega$, $\bigcup_{k=1}^n (X = x_k)$ est une partie de Ω :

$$\bigcup_{k=1}^n (X = x_k) \subset \Omega.$$

Montrons l'inclusion réciproque : $\Omega \subset \bigcup_{k=1}^n (X = x_k)$. Soit $\omega \in \Omega$, alors $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, donc $\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X(\omega) = x_k$, donc $\omega \in (X = x_k)$ donc $\omega \in \bigcup_{k=1}^n (X = x_k)$.

On a bien l'inclusion :

$$\Omega \subset \bigcup_{k=1}^n (X = x_k).$$

Ainsi $(X = x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forment un S.C.E. ; en particulier :

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = x_k) = 1.$$



Exemple.

$$\mathbb{P}((X = x_i) \text{ ou } (X = x_j)) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i) + \mathbb{P}(X = x_j) & \text{si } i \neq j \\ \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\mathbb{P}((X = x_i) \text{ et } (X = x_j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Remarquer que dans la description des événements il est autorisé de substituer les connecteurs "ou", "et", "non" en lieu et place des opérateurs ensemblistes $\cup$, $\cap$, $\complement$.

Propriété

Soient $a \leq b$ deux réels. Avec les mêmes notations :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < a)$$

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$$

$$\mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a)$$

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X \leq a)$$

Démonstration. Elles découlent (dans l'ordre) de :

$$(X \leq b) = (X < a) \cup (a \leq X \leq b) \xRightarrow{\text{incomp.}} \mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$

$$(X \leq b) = (X \leq a) \cup (a < X \leq b) \xRightarrow{\text{incomp.}} \mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{P}(a < X \leq b)$$

$$(X < b) = (X < a) \cup (a \leq X < b) \xRightarrow{\text{incomp.}} \mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(a \leq X < b)$$

$$(X < b) = (X \leq a) \cup (a < X < b) \xRightarrow{\text{incomp.}} \mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{P}(a < X < b)$$

Remarque. La propriété 2 admet une réciproque. Considérons un ensemble fini de réels $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et n réels positifs $p_1, p_2, \dots, p_n$ dont la somme vaut 1. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et une V.A.R. X sur cet espace vérifiant :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$

En effet, prenons par exemple $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$; puisque les p_i sont positifs et $\sum p_i = 1$, il est possible de munir l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ d'une probabilité $\mathbb{P}$ vérifiant $\mathbb{P}(i) = p_i$ (cf. Théorème 2, Chapitre "Espaces Probabilisés finis"). Définissons la V.A.R. X sur Ω par :

$$\begin{aligned} X : \llbracket 1, n \rrbracket &\longrightarrow \mathbb{R} \\ i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Elle vérifie bien : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{i\}) = p_i$.

Propriété

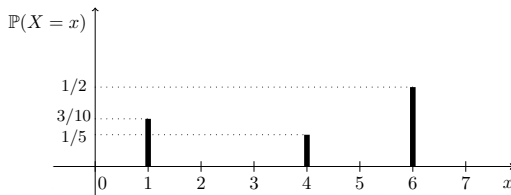
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite finie de réels et $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie de réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, alors il existe une V.A.R. X sur un espace probabilisé fini, tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i$.

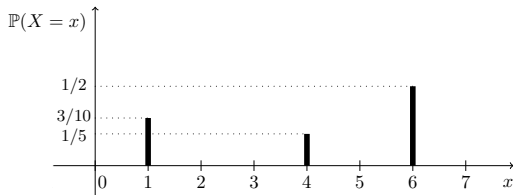
Définition

Soit X un V.A.R. sur Ω . La fonction de répartition de X est l'application notée F_X :

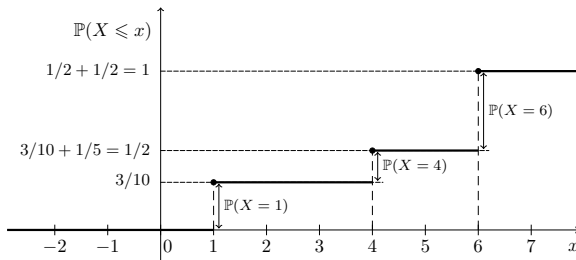
$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

Exemple. Reprenons l'histogramme de la loi de probabilité de X obtenu dans l'exemple ci-dessus :





La fonction de répartition de X a pour courbe représentative :



Propriété

L'application F_X est croissante.

Démonstration. Soient $a \leq b$ deux réels. L'événement $(X \leq a)$ implique l'événement $(X \leq b)$, donc $\mathbb{P}(X \leq a) \leq \mathbb{P}(X \leq b)$, c'est-à-dire $F_X(a) \leq F_X(b)$. ■

Les deux propriétés suivantes sont fondamentales. Tout d'abord, de la loi de X on peut déduire la fonction de répartition :

Propriété

En notant $x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n$ les différentes valeurs prises par X :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(X = x_i) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $x < x_1$ l'événement $(X \leq x)$ est impossible, donc $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0$.

Pour $x \in [x_k, x_{k+1}[$, l'événement $(X \leq x)$ est la réunion des événements $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_k)$, qui sont 2 à 2 incompatibles, donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k (X = x_i)\right) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(X = x_i)$$

Finalement, pour $x \geq x_n$, $(X \leq x) = \Omega$ donc $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. ■

Exercice. En reprenant l'exemple précédent de la V.A.R. X de loi :

x_k	1	4	6
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

déterminer la fonction de répartition de X .

Résolution.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 3/10 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 1/2 & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases} \quad \text{puisque :}$$

$$\mathbb{P}(X < 1) = 0 = F_X(x) \quad \text{pour tout } x \in]-\infty, 1[$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{10} = F_X(1) = F_X(x) \quad \text{pour tout } x \in [1, 4[$$

$$\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 4) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1}{2} = F_X(4) = F_X(x) \quad \text{pour tout } x \in [4, 6[$$

$$\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 = F_X(6) = F_X(x) \quad \text{pour tout } x \geq 6$$

Réciproquement, de la fonction de répartition on peut déduire la loi de X :

Propriété

Toujours en notant $x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n$ les différentes valeurs prises par X :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x_1) &= F_X(x_1) \\ \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = x_k) &= F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})\end{aligned}$$

Démonstration. On a $F_X(x_1) = \mathbb{P}(X \leq x_1)$; or

$(X \leq x_1) = (X < x_1) \cup (X = x_1) = (X = x_1)$ puisque $(X < x_1) = \emptyset$; donc

$F_X(x_1) = \mathbb{P}(X = x_1)$.

Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$: $(X \leq x_k) = (X = x_k) \cup (X < x_k) = (X = x_k) \cup (X \leq x_{k-1})$ car X ne prend aucune valeur dans $]x_{k-1}, x_k[$. De plus la réunion est disjointe donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x_k) &= \mathbb{P}(X = x_k) + \mathbb{P}(X \leq x_{k-1}) \\ F_X(x_k) &= \mathbb{P}(X = x_k) + F_X(x_{k-1}) \\ \implies \mathbb{P}(X = x_k) &= F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})\end{aligned}$$

Exemple. Toujours avec le même exemple $X(\Omega) = \{1, 4, 6\}$; à partir de la fonction de répartition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 3/10 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 1/2 & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

on déduit la loi de X :

$$\mathbb{P}(X = 1) = F_X(1) = \frac{3}{10}$$

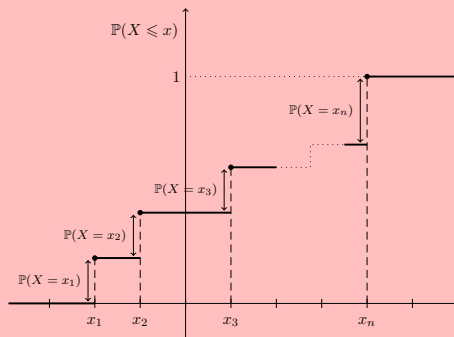
$$\mathbb{P}(X = 4) = F_X(4) - F_X(1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(X = 6) = F_X(6) - F_X(4) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Graphiquement on a l'interprétation suivante de la fonction de répartition :

- Courbe représentative de la fonction de répartition**

C'est une fonction en escalier. On retrouve la loi de X comme hauteur des marches aux abscisses dans l'univers image $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.



De plus F_X a pour limites aux bornes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

Espérance mathématique

Définition

Soit X une V.A.R. sur l'espace probabilisé fini $(X, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

L'espérance mathématique de X , notée $E(X)$ est le réel :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x) .$$

Si l'on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k \times \mathbb{P}(X = x_k) .$$

Remarques. • La formule dans la définition s'appelle la formule de l'espérance.

- L'espérance mathématique est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leur probabilité.
- Intuitivement l'espérance de X est la moyenne attendue des valeurs prises par X lorsqu'on renouvelle un très grand nombre de fois l'expérience. On utilisera cette interprétation pour estimer empiriquement l'espérance d'une variable aléatoire à l'aide d'une simulation informatique de l'expérience répétée un très grand nombre de fois.

Exemple. En remplissant une grille de loto (cocher une combinaison de 6 numéros parmi 49), la probabilité de gagner, c'est à dire de cocher les 6 bons numéros est :

$$p = \mathbb{P}(\text{gagner}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{6! \times (49 - 6)!}{49!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44} \approx 7,15 \times 10^{-8}$$

Un ticket coûte 2 €, et le gain pour 6 bons numéros est de 1 million d'€. Soit la V.A.R. X qui à un ticket associe le gain en euros :

$$X(\text{gagnant}) = 10^6 \quad ; \quad X(\text{perdant}) = -2$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = 10^6 \times p + (-2) \times (1 - p) \approx -1,93$$

C'est le gain moyen : en moyenne, en jouant au loto, on perdra 1,93€.

Remarque. Dans tous les jeux d'argent, l'espérance du gain est négative, autrement la loterie nationale perdrait de l'argent quasiment à coup sûr ! On dit que c'est un jeu non-équitable ; l'espérance de gain est non-nulle. Dans un jeu équitable l'espérance du gain est nulle : en moyenne les deux protagonistes remporteraient un gain nul.

Propriété

Avec les mêmes notations :

- Si X est constante égale à c alors $E(X) = c$.
- Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.

Démonstration. Si X est constante égale à c (i.e. $X(\Omega) = \{c\}$) :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x) = c \times \mathbb{P}(X = c) = c \times P(\Omega) = c \times 1 = c$$

Si $X \geq 0$ (i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$) :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{x}_{\geq 0} \times \underbrace{\mathbb{P}(X = x)}_{\geq 0} \geq 0$$



Propriété

$$E(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$$

Démonstration. Par définition, puisque $\mathbf{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$:

$$E(\mathbf{1}_A) = \sum_{x \in \mathbf{1}_A(\Omega)} x \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = x) = 1 \times \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 1) + 0 \times \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 0) = \mathbb{P}(\mathbf{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$$



Espérance d'une composée : théorème de transfert

Définition

Soit X une V.A.R. sur l'espace probabilisé fini $(X; \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; alors on peut définir la V.A.R. composée : $\varphi \circ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Il est possible, mais pas facile, de déduire la loi de $\varphi \circ X$ à partir de la loi de X . Par contre, l'espérance de $\varphi \circ X$ se déduit aisément de la loi de X à partir de la formule de transfert :

Théorème de transfert

Avec les mêmes notations :

$$E(\varphi \circ X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \times \mathbb{P}(X = x).$$

Si l'on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$E(\varphi \circ X) = \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) \times \mathbb{P}(X = x_k).$$

Démonstration. Admise.

En corollaire, on obtient la propriété importante de linéarité de l'espérance :

Corollaire

Linéarité de l'espérance

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Démonstration. On applique la formule de transfert avec la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{x \in X(\Omega)} (ax + b) \times \mathbb{P}(X = x) \\ &= a \times \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x) + b \times \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) && \text{par linéarité de } \sum \\ &= a \times E(X) + b \times 1 && \text{d'après la propriété 2} \\ &= a \times E(X) + b \end{aligned}$$

■

Plus généralement, la linéarité de l'espérance s'exprime sous la forme :

Propriété

Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux V.A.R. sur un même espace probabilisé fini et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Démonstration. Admis.

Corollaire

Croissance de l'espérance

Soient X et Y deux V.A.R. sur un même espace probabilisé fini. Alors :

$$X \leq Y \implies E(X) \leq E(Y).$$

Démonstration. Supposons que $X \leq Y$, c'est-à-dire que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$. Alors la V.A.R. $Y - X$ ne prend que des valeurs positives : $Y - X \geq 0$, et donc $E(Y - X) \geq 0$ (propriété 8). D'après la linéarité de l'espérance :

$$E(Y - X) = E(Y) - E(X) \geq 0 \implies E(X) \leq E(Y) \quad \blacksquare$$

V.A.R. centrée

Définition

Une V.A.R. X est dite centrée si son espérance $E(X)$ est nulle.

On peut naturellement associer à toute V.A.R. une variable centrée en lui soustrayant son espérance :

Proposition-Définition

Si X est une V.A.R. alors $X - E(X)$ est une V.A.R. centrée. On l'appelle la variable aléatoire centrée associée à X .

Démonstration. l'application

$$\begin{aligned} X - E(X) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) - E(X) \end{aligned}$$

est une V.A.R. ; d'après la linéarité de l'espérance :

$$E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$$

Moments d'une variable aléatoire.

Définition

Soit X une V.A.R. sur un espace probabilisé fini $(X, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre r de X , noté $m_r(X)$, le réel défini par :

$$m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \times \mathbb{P}(X = x).$$

Si l'on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$m_r(X) = \sum_{k=1}^n (x_k)^r \times \mathbb{P}(X = x_k).$$

Remarques.

- $m_1(X) = E(X)$: le moment d'ordre 1 est l'espérance de X .
- Grâce au théorème de transfert :

$$m_r(X) = E(X^r).$$

- On appelle moment centré d'ordre r de X , noté $\mu_r(X)$, le moment d'ordre r de la variable centrée associée à X :

$$\mu_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^r \times \mathbb{P}(X = x).$$

Variance - Écart-type

Définition

- La variance d'une V.A.R. X , notée $V(X)$, est son moment centré d'ordre 2 :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x).$$

Si l'on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$V(X) = \sum_{k=1}^n (x_k - E(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x_k).$$

C'est un réel positif.

- L'écart-type de X , noté σ_X est la racine carrée de $V(X)$:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Remarque. Variance et écart-type mesurent la dispersion des valeurs prises par X autour de son espérance.

Exercice. Reprenons l'exemple de la loi :

x_k	1	4	6
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Déterminer l'espérance de X et la variance de X .

Résolution. L'espérance de X est :

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{1}{5} + 6 \times \frac{1}{2} = \frac{3 + 8 + 30}{10} = 4,1$$

Sa variance est :

$$V(X) = (-3,1)^2 \times \frac{3}{10} + (-0,1)^2 \times \frac{1}{5} + (1,9)^2 \times \frac{1}{2} = 4,69$$

$$V(X) = E(X - E(X))^2$$

Propriété

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Démonstration. D'après la formule de transfert :

$$E((X - E(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x) = V(X)$$



$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Propriété

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$V(aX + b) = a^2 \times V(X).$$

Démonstration. D'après la propriété 13 :

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E((aX + b - E(aX + b))^2) \\ &= E((aX + b - aE(X) - b)^2) && \text{linéarité de l'espérance} \\ &= E(a^2(X - E(X))^2) \\ &= a^2 \times E((X - E(X))^2) && \text{linéarité de l'espérance} \\ &= a^2 \times V(X) \end{aligned}$$



Remarque. Variance et écart-type mesurent la dispersion des valeurs prises par X autour de son espérance $E(X)$: intuitivement, avec la formule $V(X) = E((x - E(X))^2)$, la variance est la moyenne des carrés des écarts des valeurs prises par X autour de son espérance. On a aussi le résultat suivant :

Propriété

Une V.A.R. X a une variance nulle si et seulement si elle prend presque sûrement une valeur constante (égale à $E(X)$). Autrement dit :

$$V(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X = E(X)) = 1.$$

Démonstration. Puisque les événements $(X = E(X))$ et $(X \neq E(X))$ sont contraires, $\mathbb{P}(X = E(X)) = 1 - \mathbb{P}(X \neq E(X))$. Il suffit donc de montrer que :

$$V(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X \neq E(X)) = 0.$$

Par définition :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{(x - E(X))^2}_{\geq 0} \times \underbrace{\mathbb{P}(X = x)}_{\geq 0}.$$

Ainsi, puisque tous les termes de la somme sont positifs :

$$V(X) = 0 \iff \forall x \in X(\Omega), \begin{cases} x = E(X) \\ \text{ou} \\ \mathbb{P}(X = x) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$\Rightarrow$ Si $V(X) = 0$:

$$\mathbb{P}(X \neq E(X)) = \sum_{x \neq E(X)} \mathbb{P}(X = x) \stackrel{(*)}{=} \sum_{x \neq E(X)} 0 = 0$$

$\Leftarrow$ Si $\mathbb{P}(X \neq E(X)) = 0$:

$$\sum_{x \neq E(X)} \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

Puisqu'il s'agit d'une somme de termes tous positifs, ils sont nécessairement tous nuls : pour tout $x \in X(\Omega)$, $x \neq E(X) \implies \mathbb{P}(X = x) = 0$; autrement dit : $x = E(X)$ ou $\mathbb{P}(X = x) = 0$. Ainsi d'après $(*)$, $V(X) = 0$. ■

Variable centrée réduite

Remarque. Une V.A.R. est dite réduite lorsque sa variance est égale à 1.
Soit X une V.A.R. de variance non-nulle et $\sigma_X \neq 0$ son écart-type. Alors :

$$V\left(\frac{1}{\sigma_X}X\right) = \left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 V(X) = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$$

La variable $\frac{1}{\sigma_X}X$ est donc réduite : on l'appelle la variable réduite associée à X .

La variable centrée $X - E(X)$ a mêmes variance et écart-type que X .

Si X est de variance non-nulle, la variable centrée réduite associée à X est :

$$\frac{1}{\sigma_X}(X - E(X)).$$

Elle a une espérance nulle, et une variance égale à 1.

Formule de Koenig-Huygens

La variance peut se calculer à l'aide de la formule de Koenig-Huygens :

"La variance de X est l'espérance du carré moins le carré de l'espérance".

Propriété

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Démonstration. D'après la propriété 13 :

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 && \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$



Exercice. Reprenons l'exemple de la loi :

x_k	1	4	6
$\mathbb{P}(X = x_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Déterminer la loi de X^2 , puis $V(X)$ à l'aide de la formule de Koenig-Huygens.

Résolution. L'espérance de X est : $E(X) = \frac{41}{10}$. La loi de X^2 est :

y_k	1	16	36
$\mathbb{P}(X^2 = y_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Donc : $E(X^2) = 1 \times \frac{3}{10} + 16 \times \frac{1}{5} + 36 \times \frac{1}{2} = \frac{3 + 32 + 180}{10} = \frac{215}{10}$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, la variance de X est donc :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{215}{10} - \frac{41^2}{100} = \frac{2150 - 1681}{100} = \frac{469}{100} = 4,69.$$

Variables aléatoires indépendantes

Définition

Soient X et Y deux V.A.R. sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et notons :

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}, \quad Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_s\}.$$

Les V.A.R. X et Y sur Ω sont dites indépendantes si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, s \rrbracket, \quad \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j)$$

c'est à dire si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, s \rrbracket$, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

Exemple. On lance deux fois un dé 6 ; X est le résultat du premier lancer, Y le résultat du second. Les deux lancers étant indépendants, les variables X et Y le sont aussi.

Propriété

Si X et Y sont deux V.A.R. indépendantes et si f et g sont des fonctions réelles définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors les deux V.A.R. $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration. Admis.

Remarque. Propriété très utile !

Propriété

Pour deux V.A.R. X et Y indépendantes :

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y) \quad ; \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Démonstration. Montrons que si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$. Posons :

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\} \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_s\}.$$

Alors la V.A.R. XY a pour univers image :

$$XY(\Omega) = \{x_i \times y_j \mid i \in \llbracket 1, r \rrbracket, j \in \llbracket 1, s \rrbracket\}$$

ainsi :

$$\forall x \in XY(\Omega), (XY = x) = \bigcup_{x_i \times y_j = x} (X = x_i) \cap (Y = y_j)$$

et c'est une réunion d'évènement deux à deux incompatibles ; on a donc :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x \in XY(\Omega)} x \times \mathbb{P}(XY = x) \\ &= \sum_{x \in XY(\Omega)} \sum_{x_i \times y_j = x} x_i \times y_j \times \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} x_i \times y_j \times \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} x_i \times y_j \times \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j) && \text{par indépendance} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{1 \leq j \leq s} x_i \times y_j \times \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} \left(x_i \times \mathbb{P}(X = x_i) \times \sum_{1 \leq j \leq s} y_j \times \mathbb{P}(Y = y_j) \right) \\ &= \left(\sum_{1 \leq i \leq r} x_i \times \mathbb{P}(X = x_i) \right) \times \left(\sum_{1 \leq j \leq s} y_j \times \mathbb{P}(Y = y_j) \right) \\ &= E(X) \times E(Y) \end{aligned}$$

Appliquons-le maintenant pour calculer la variance de la somme, avec Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
 V(X + Y) &= E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 && \text{Koenig-Huygens} \\
 &= E(X^2 + Y^2 + 2XY) - E(X + Y)^2 \\
 &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) \\
 &\quad - (E(X)^2 + E(Y)^2 + 2E(X)E(Y)) && \text{par linéarité de l'espérance} \\
 &= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 \\
 &\quad + 2 \underbrace{(E(XY) - E(X)E(Y))}_{=0} && \text{par indépendance} \\
 &= V(X) + V(Y) && \text{par Koenig-Huygens}
 \end{aligned}$$



La notion d'indépendance se généralise à plus de deux V.A.R. :

Définition

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; n variables aléatoires sur Ω , $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarques. C'est le cas notamment lorsque $X_1, X_2, \dots, X_n$ décrivent les résultats de n épreuves $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ indépendantes.

Comme dans l'exemple de 3 lancers d'une pièce équilibrée ; les lancers sont indépendants.

Propriété

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des V.A.R. sur Ω mutuellement indépendantes.

- Toutes sous-familles de V.A.R. sont aussi mutuellement indépendantes.
- Si pour tout $i = 1, \dots, n$, f_i est une fonction réelle définie sur $X_i(\Omega)$, alors $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ sont des V.A.R. sur Ω mutuellement indépendantes.
- (Lemme des coalitions) Si f et g sont des fonctions réelles définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_p(\Omega)$ et $X_{p+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont deux V.A.R. sur Ω indépendantes.

Démonstration. Admis.

Remarque. Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors elles sont aussi 2 à 2 indépendantes (appliquer le premier point à tout sous-famille de 2 V.A.R.).

Loi certaine

Il faut connaître les lois usuelles et apprendre à reconnaître les situations où elles s'appliquent.

- **Loi certaine - Définition**

Définition

Une V.A.R. certaine est une V.A.R. constante ; autrement dit :

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega, X(\omega) = c$$

ou encore :

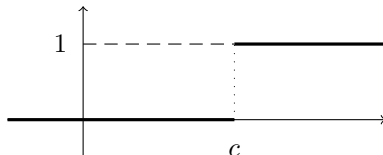
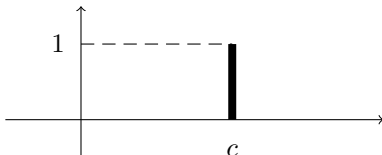
$$L'univers image est un singleton : X(\Omega) = \{c\}.$$

On dit aussi que X suit une loi certaine.

L'événement $(X = c)$ est l'événement certain donc $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

Loi certaine

- Histogramme et fonction de répartition d'une loi certaine



- Situation type

Lorsque l'issue est certaine : une seule issue.

- Espérance et variance

$$E(X) = c$$

;

$$V(X) = 0$$

Loi uniforme

- Définition

Définition

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$ de cardinal n .

Une V.A.R. X suit la loi uniforme sur E si :

- $X(\Omega) = E$,
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}$.

Dans ce cas on écrit : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$.

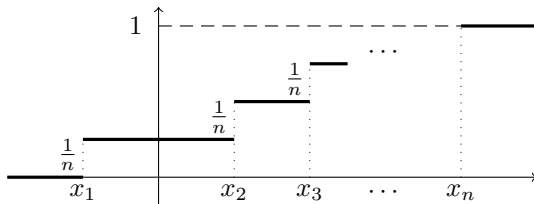
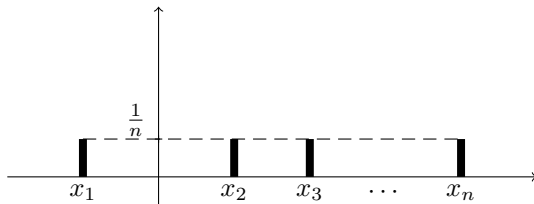
Lorsque $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ on note plus simplement $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.

- Situation type

On choisit au hasard (de manière équiprobable) un objet parmi n . Par exemple : on lance une pièce équilibré ; on lance un dé 6 non pipé ; on tire au hasard une boule dans une urne...

Loi uniforme

- Histogramme et fonction de répartition



Loi uniforme

• Espérance de la loi uniforme

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$. L'espérance de X est la moyenne de $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Exercice. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.

1. Calculer $E(X)$.
2. Calculer $V(X)$.

Résolution.

1)

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n+1}{2}}.$$

2) On applique la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 \times \mathbb{P}(X = k) && \text{formule de transfert} \\
 &= \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{(n+1)(2 \times (2n+1) - 3 \times (n+1))}{12} \\
 &= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \boxed{\frac{n^2-1}{12}}
 \end{aligned}$$

Loi de Bernoulli

Définition

Une V.A.R. X est dite de Bernoulli lorsqu'elle ne prend que deux valeurs 0 et 1, et avec des probabilités non nulles.

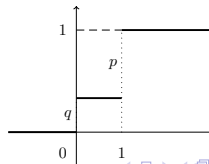
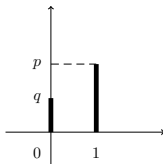
On note habituellement $p = \mathbb{P}(X = 1)$ et $q = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Ainsi X suit une loi de Bernoulli si :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$,
- $\mathbb{P}(X = 1) = p \in]0, 1[$
- $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$; $p \in]0, 1[$ est la paramètre de la loi de Bernoulli.

• Histogramme et fonction de répartition



Loi de Bernoulli

- **Situation type**

C'est la situation d'un choix binaire, vrai/faux, codifié par 1/0.

- On lance une pièce équilibrée ; X vaut 1 si l'on obtient face et 0 sinon. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, mais aussi $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.
- Si la pièce n'est pas équilibrée, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où p est la probabilité d'obtenir face.
- Une urne contient $b > 0$ boules blanches et $n > 0$ boules noires. On tire une boule dans l'urne ; soit X le nombre de boules blanches obtenues. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+n}\right)$.

- Soit A un événement d'un espace probabilisé avec $p = \mathbb{P}(A) \in]0, 1[$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A dans Ω :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Réciproquement, si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , en posant $A = (X = 1)$, X est l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A dans Ω .

Une variable de Bernoulli X , est l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de l'évènement $A = (X = 1)$.

Loi de Bernoulli

• Espérance et variance

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$; alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q$.
Ainsi :

$$E(X) = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$$

Pour le calcul de la variance on utilise la définition (moment centré d'ordre 2) :

$$V(X) = (1-p)^2 \times \mathbb{P}(X = 1) + (0-p)^2 \times \mathbb{P}(X = 0) = q^2 \times p + p^2 \times q = pq \underbrace{(p + q)}_{=1} = pq.$$

En résumé :

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $q = 1 - p$;

$$E(X) = p$$

;

$$V(X) = pq.$$

Loi binomiale

- **Situation type : schéma de Bernoulli**

On considère une expérience qui conduit à deux issues possibles : le succès S avec probabilité $p \in]0, 1[$, et l'échec E avec probabilité $q = 1 - p \in]0, 1[$.

On répète cette expérience n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de manière indépendante ; soit X le nombre de succès obtenus.

Un tel contexte s'appelle un schéma de Bernoulli : répéter n fois et de manière indépendante une expérience menant à deux issues possibles succès/échec ; compter le nombre de succès.

- Espace probabilisé.

On prend comme univers $\Omega = \{S, E\}^n$, l'ensemble des n -listes de $\{S, E\}$.

Chaque issue est une n -liste de $\{S, E\}^n$; si elle comporte exactement $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ succès, par indépendance des épreuves, sa probabilité est $p^k q^{n-k}$.

- Déterminons la loi de X .

X peut prendre toute valeur entière entre 0 (aucun succès) et n (que des succès). L'univers image est donc $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Loi binomiale

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$; calculons $\mathbb{P}(X = k)$:

L'événement $(X = k)$ se partitionne en tous les événements élémentaires ayant exactement k succès ; chacun de ces événements élémentaires a pour probabilité $p^k q^{n-k}$. Or il y en a exactement $\binom{n}{k}$; en effet une issue comportant exactement k succès est déterminée par les rangs d'apparition des succès (aux 1ère, 2ème, ..., ou n -ième épreuves). Il y en a donc autant que de k -combinaisons dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Cela détermine la loi de X .

Exemple. On lance 10 fois un dé 6 non-pipé ; soit X le nombre de 6 obtenus. Alors $X(\Omega) = \llbracket 0, 10 \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} \times \frac{5^{10-k}}{6^{10}}$$

Exemple : la probabilité de n'obtenir que des 6 est :

$$\mathbb{P}(X = 10) = \binom{10}{10} \times \frac{5^0}{6^{10}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

Loi binomiale

• Définition

Définition

On dit qu'une V.A.R. suit la loi binomiale de paramètres n et p si :

- $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$,
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

avec $q = 1 - p$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque. Avec la formule du binôme, on retrouve bien que :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1.$$

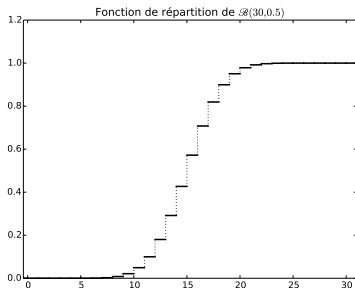
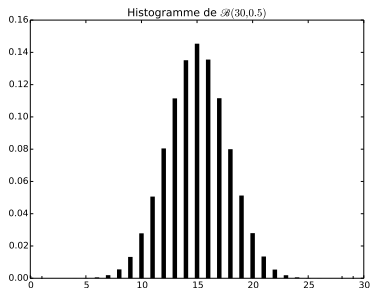
Loi binomiale

• Histogramme et fonction de répartition

L'histogramme d'une loi binomiale s'appuie sur une courbe en cloche, centrée lorsque $p = \frac{1}{2}$, et décalé vers la gauche (respectivement vers la droite) lorsque $p < \frac{1}{2}$ (respectivement $p > \frac{1}{2}$).

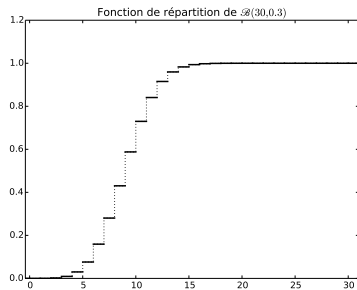
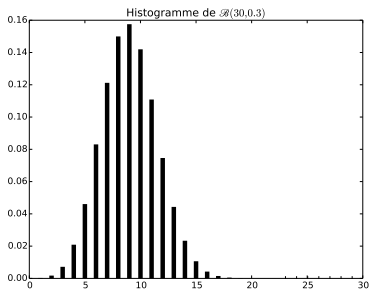
Par exemple, pour $n = 30$:

• Pour $p = \frac{1}{2}$:



Loi binomiale

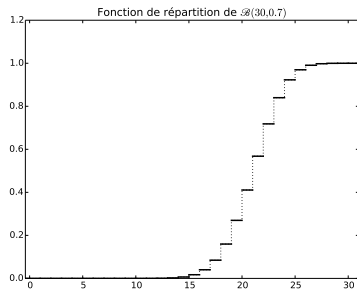
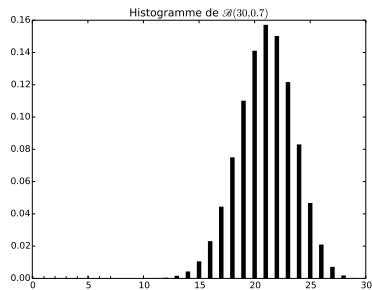
- Pour $p < \frac{1}{2}$:



Décalage à gauche

Loi binomiale

- Pour $p > \frac{1}{2}$:



Décalage à droite

Loi binomiale

- **Espérance et variance**

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$; on pose $q = 1 - p$.

L'espérance de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ est :

$$E(X) = n \times p .$$

Démonstration. Puisque $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, d'après la formule de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Loi binomiale

$$E(X) = 0 + \sum_{k=1}^n \underbrace{k \binom{n}{k}}_{=}$$

décrochage pour $k = 0$

$$= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

formule du pion

$$= n \times \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

Linéarité de $\sum$

$$= n \times \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} q^{n-1-j}$$

$$j \leftarrow k - 1$$

$$= n \times p \times \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j}$$

$$p^{j+1} = p \times p^j$$

$$= n \times p \times (p + q)^{n-1}$$

formule du binôme

$$= n \times p$$

$$p + q = 1$$

Loi binomiale

La variance de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ est :

$$V(X) = n \times p \times q.$$

Démonstration. Calculons d'abord l'espérance de $E(X(X-1))$ de deux façons (astuce de calcul).

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{formule de transfert}$$

$$= 0 + 0 + \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{décrochages pour } k=0, 1$$

$$= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \quad \text{formule du pion}$$

$$= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} \quad \text{re-formule du pion}$$

Loi binomiale

$$\begin{aligned}
 E(X(X-1)) &= n \times (n-1) \times \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} && \text{linéarité de } \sum \\
 &= n \times (n-1) \times \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^{j+2} q^{n-2-j} && j \leftarrow k-2 \\
 &= n \times (n-1) \times p^2 \times \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j q^{n-2-j} && p^{j+2} = p^2 \times p^j \\
 &= n \times (n-1) \times p^2 \times (p+q)^{n-2} && \text{formule du binôme} \\
 &= n \times (n-1) \times p^2 && p+q=1
 \end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
 E(X(X-1)) &= E(X^2) - E(X) && \text{linéarité de l'espérance} \\
 \implies E(X^2) &= E(X(X-1)) + E(X)
 \end{aligned}$$

Loi binomiale

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
 &= \underbrace{E(X(X-1))}_{=} + E(X) - E(X)^2 \\
 &= \underbrace{n \times (n-1) \times p^2}_{=} + n \times p - n^2 \times p^2 && \text{car } E(X) = n \times p \\
 &= n^2 \times p^2 - n \times p^2 + n \times p - n^2 \times p^2 \\
 &= n \times (p - p^2) \\
 &= n \times p \times (1 - p) \\
 &= n \times p \times q
 \end{aligned}$$



Somme de V.A.R. indépendantes de Bernoulli

Considérons $X_1, X_2, \dots, X_n$ des V.A.R. sur Ω mutuellement indépendantes et suivant toutes une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Déterminons la loi de leur somme $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Puisque $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$, $Y(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$(Y = k)$ = "exactement k des X_i valent 1, $n - k$ valent 0"

$$= \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left(\bigcap_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} (X_i = 1) \cap \bigcap_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} (X_i = 0) \right)$$

C'est une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} (X_i = 1) \cap \bigcap_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} (X_i = 0) \right)$$

par indépendance mutuelle

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} \mathbb{P}(X_i = 1) \times \prod_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \mathbb{P}(X_i = 0) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} p^k q^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\end{aligned}$$

puisque'il y a exactement $\binom{n}{k}$ k -combinaisons $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ dans $[[1, n]]$. Ainsi Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Le résultat est à connaître :

Propriété

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des V.A.R. sur Ω mutuellement indépendantes et suivant toutes une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Alors leur somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.