Espaces vectoriels

Exercice 1.

1) C'est un sev ; $(0,0) \in F$ et soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (x_1, 2x_1), v = (x_2, 2x_2) \in F$ alors

$$\lambda.u + v = (\lambda.x_1 + x_2, 2\lambda.x_1 + 2x_2) = (\lambda.x_1 + x_2, 2(\lambda.x_1 + x_2)) \in F$$

2) Ce n'est pas un sev : $(1,1),(1,-1) \in F$ tandis que $(1,1)+(1,-1) = (2,0) \notin F$.

3) Ce n'est pas un sev : $(0,0) \notin F$.

4) C'est un sev : $(0,0) \in F$ et soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in F$;

$$\lambda.u + v = (\lambda.x_1 + x_2, \lambda.y_1 + y_2)$$
$$\text{et } a(\lambda.x_1 + x_2) + b(\lambda.y_1 + y_2) = \lambda.(\underbrace{a.x_1 + b.y_1}_{=0}) + \underbrace{a.x_2 + b.y_2}_{=0} = 0$$
$$\implies \lambda.u + v \in F$$

5) Ce n'est pas un sev : $(1,1) \in F$ et $(-1).(1,1) = (-1,-1) \notin F$.

6) C'est un sev : $(0,0) \in F$ et soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in F$;

$$\lambda.u + v = (\lambda.x_1 + x_2, \lambda.y_1 + y_2, \lambda.z_1 + z_2)$$
$$(\lambda.x_1 + x_2) + (\lambda.y_1 + y_2) - (\lambda.z_1 + z_2) = \lambda.(\underbrace{x_1 + y_1 - z_1}_{=0}) + \underbrace{x_2 + y_2 - z_2}_{=0} = 0$$
$$\text{et } (\lambda.x_1 + x_2) + 2.(\lambda.z_1 + z_2) = \lambda.(\underbrace{x_1 + 2z_1}_{=0}) + \underbrace{x_2 + 2z_2}_{=0} = 0$$
$$\implies \lambda.u + v \in F$$

Exercice 2.

1) P est un sev car $(0,0,0) \in P$ et soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in P$;

$$\lambda.u + v = (\lambda.x_1 + x_2, \lambda.y_1 + y_2, \lambda.z_1 + z_2)$$
$$(\lambda.x_1 + x_2) + 2(\lambda.y_1 + y_2) - (\lambda.z_1 + z_2) = \lambda.(\underbrace{x_1 + 2y_1 - z_1}_{=0}) + \underbrace{x_2 + 2y_2 - z_2}_{=0} = 0$$
$$\implies \lambda.u + v \in F$$

D est un sev car $D = Vect((-1,1,2))$.

2) $(-1,1,2)$ est un vecteur générateur de D non nul, c'est donc une base de D :

$$u_1 = (-1,1,2)$$

Déterminons une famille génératrice de P :

$$u = (x,y,z) \in P \iff x - 2y - z = 0 \iff z = x - 2y$$
$$\iff u = (x, y, x - 2y) = x.(1,0,1) + y(0,1,-2)$$

Donc $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (0,1,-2)$ est une famille génératrice de P. Montrons que c'est une famille libre :

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

(puisque $rang(A) = rang({}^tA)$). Donc la famille est libre ; c'est une base de P.

3) Montrons que u_1, u_2, u_3 est libre :

$$rang \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 3$$

Donc la famille est libre.

4) Puisque c'est une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ ev de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $u \in \mathbb{R}^3$:

$$\exists!(a,b,c), u = \underbrace{au_1 + bu_2}_{\in P} + \underbrace{cu_3}_{\in D}$$

Ainsi u s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de P et d'un élément de D.

Exercice 6)

1) $u \in F \iff \exists x \in \mathbb{R}, u = (x, 2x) = x.(1,2)$; donc $(1,2)$ est une famille génératrice de F ; puisque $(1,2) \neq (0,0)$ c'est aussi une famille libre, donc une base de F.

2) $(u = (x,y,z) \in F \iff x + y + z = 0 \iff z = -x - y \iff u = (x, y, -x-y) = x.(1,0,-1) + y.(0,1,-1)$; ainsi $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre :

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

(puisque $rang(A) = rang({}^tA)$). Donc c'est une famille libre, donc une base de F.

3) On a :

$$u = (x, y, z) \in F \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases}$$

$$\iff u = (x, -x, -2x) = x.(1, -1, -2)$$

Ainsi $(1, -2, -2)$ engendre F ; or c'est une famille libre (car un seul vecteur et non nul), c'est donc une base de F.

Exercice 9.
1) Le vecteur nul appartient à F.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z, t)$, $v = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de F. Alors :

$$\lambda \cdot u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$$

Alors $\lambda \cdot u + v \in F$ car :

$$\lambda x + x' - (\lambda y + y') + \lambda z + z' - (\lambda t + t') = \lambda \underbrace{(x - y + z - t)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{(x - y' + z' - t')}_{=0 \text{ car } v \in F} = 0$$

Donc F est sev de $\mathbb{R}^4$.

Le vecteur nul appartient à G.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y, z, t)$, $v = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de G. Alors :

$$\lambda \cdot u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$$

Alors $\lambda \cdot u + v \in G$ car :

$$\lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z' + \lambda t + t' = \lambda \underbrace{(x + y + z + t)}_{=0 \text{ car } u \in G} + \underbrace{(x + y' + z' + t')}_{=0 \text{ car } v \in G} = 0$$

Donc G est sev de $\mathbb{R}^4$.

Déterminons une base de F ; soit $u = (x, y, z, t) \in F$ alors :

$$\begin{aligned} x - y + z - t = 0 &\implies t = x - y + z \\ &\implies u = (x, y, z, x - y + z) \\ &\implies u = x \cdot (1, 0, 0, 1) + y \cdot (0, 1, 0, -1) + z \cdot (0, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

et donc $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(0, 0, 1, 1)$ est une famille génératrice de 3 vecteurs de F. Or :

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

donc c'est aussi une famille libre, et donc une base de F.
Déterminons une base de G ; soit $u = (x, y, z, t) \in F$ alors :

$$\begin{aligned} x + y + z + t = 0 &\implies t = -x - y - z \\ &\implies u = (x, y, z, -x - y - z) \\ &\implies u = x \cdot (1, 0, 0, -1) + y \cdot (0, 1, 0, -1) + z \cdot (0, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

et donc $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(0, 0, 1, -1)$ est une famille génératrice de 3 vecteurs de G. Or :

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

donc c'est aussi une famille libre, et donc une base de G.

2) On sait que $F \cap G$ est un sev, inclus dans F et dans G, et donc $\dim F \cap G \leqslant 3$ avec égalité si et seulement si $F = G = F \cap G$.
Or $F \neq G$ puisque $(0, 1, 0, 1)$ est dans F mais pas dans G (il ne satisfait pas l'équation cartésienne de G). Ainsi $\dim F \cap G \leqslant 2$.
Déterminons une base de $F \cap G$; $u = (x, y, z, t) \in F \cap G$

$$\iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ \quad -2y \quad -2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases}$$

$$\iff u = (x, y, -x, -y) = x \cdot (1, 0, -1, 0) + y \cdot (0, 1, 0, -1)$$

La famille des 2 vecteurs $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0, -1)$ est donc génératrice. Elle est aussi libre puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, c'est une base de $F \cap G$

et $\dim F \cap G = 2$.

En la complétant avec $(1, 0, 0, 1) \in F \setminus G$ on obtient une base de F ; en la complétant avec $(1, 0, 0, -1) \in G \setminus F$ on obtient une base de G.

TD n°20 : Espaces Vectoriels — Correction des exos restants

Ex3 1) Familles libres, génératrices, de $\mathbb{R}^2$

a) (u) avec $u=(-1,1)$.

Un seul vecteur $\neq 0_{\mathbb{R}^2}$ $\Rightarrow$ famille libre

" " " et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ $\Rightarrow$ famille non génératrice

b) (u,v) avec $u=(-1,1)$ et $v=(2,-2)$

Le mieux est de remarquer que $v=(-2).u$: u et v sont colinéaires $\Rightarrow$ famille liée.

Famille liée de 2 vecteurs dans un e.v de dimension 2

$\Rightarrow$ famille non génératrice

c) (u,v) avec $u=(-1,1)$ et $v=(2,1)$

Famille de 2 vecteurs dans un e.v. de dim° 2.

Donc la famille est libre ssi elle est génératrice.

Montrons qu'elle est libre. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$\lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (-\lambda + 2\mu, \lambda + \mu) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \qquad \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0$$

Donc le système est de Cramer, donc

$\lambda = \mu = 0$

La famille est libre, et donc génératrice : c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

d) (u,v,w) avec $u=(-1,1)$, $v=(2,1)$, $w=(1,1)$

Famille de 3 vecteurs dans un e.v. de dim° 3 $\Rightarrow$ famille liée.

La famille est-elle génératrice ? oui ! D'après c) (u,v) est génératrice, et donc (u,v,w) l'est aussi.

2) Familles libres, génératrices, de $\mathbb{R}^3$

a) (u,v) avec $u=(1,1,0)$ et $v=(0,1,2)$

Famille de 2 vecteurs dans un e.v. de dim° 3

$\Rightarrow$ la famille n'est pas génératrice.

Vérifions que c'est une famille libre. Pour cela considérons la matrice de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{E}$.

$$M = Mat_{\mathcal{E}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$: elle est de rang $2 = \text{Card}(u,v)$

donc la famille est libre.

b) (u,v,w) avec $u=(1,0,0)$; $v=(1,1,0)$; $w=(1,1,1)$

Considérons la matrice de (u,v,w) dans la base canonique : $$Mat(u,v,w) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$: elle est de rang 3

Or $3 = \text{Card}(u,v,w) \Rightarrow$ famille libre

$= \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ famille génératrice

C'est une base de $\mathbb{R}^3$

c) (u,v,w) avec $u=(1,-1,0)$; $v=(0,1,-1)$ et $w=(-1,0,1)$

Le plus rapide serait de remarquer que :

$$u+v+w = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc la famille n'est pas libre.

De plus puisque c'est une famille de 3 vecteurs dans un e.v de dim 3, elle n'est donc pas non plus génératrice

d) (u,v,w) avec $u=(1,2,0)$, $v=(0,1,2)$, $w=(2,0,1)$

Famille de 3 vecteurs dans un e.v de dim 3 $\Rightarrow$

libre $\Leftrightarrow$ génératrice $\Leftrightarrow$ base de $\mathbb{R}^3$. Soit :

$$M = Mat_{\mathcal{E}}(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{9} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ rg $M = 3$.

Donc (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$

e) (u,v,w,t) avec $u=(1,0,0)$, $v=(1,1,0)$, $w=(1,1,1)$,
et $t=(2,1,-1)$

Famille de 4 vecteurs dans un e.v de dim 3 $\Rightarrow$ liée

On pourrait remarquer que la sous famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ (voir b)) donc la famille est génératrice.

∘ Autre méthode : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Existe-t-il $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y,z) = a.u + b.v + c.w + d.t$?

$\Leftrightarrow$ le système
$$\begin{cases} \boxed{a} + b + c + 2d = x \\ \boxed{b} + c + d = y \\ \boxed{c} - d = z \end{cases}$$
est compatible

ce qui est le cas puisqu'il est échelonné avec 3 pivots non nuls. $\Rightarrow$ La famille est génératrice.

Ex4 Il s'agit de déterminer une ou plusieurs équations cartésiennes de chaque s.e.v.

1) a) $F = \mathrm{Vect}((1,3))$

$(x,y) \in F \iff \exists a \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = a\cdot(1,3)$

$\iff$ le système d'inconnue a $\begin{cases} a = x \\ 3a = y \end{cases}$ est compatible

$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff} \begin{cases} a = x \\ \boxed{0 = y - 3x} \end{cases}$ est compatible $\iff \boxed{3x - y = 0}$

$\Rightarrow F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 0\}$.

b) $F = \mathrm{Vect}((3,2),(-4,1))$

$(x,y) \in F \iff \exists a,b \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = a(3,2) + b(-4,1)$

$\iff$ le système d'inconnues a,b $\begin{cases} 3a - 4b = x \\ 2a + b = y \end{cases}$ est compatible

$\underset{L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} \boxed{3a} - 4b = x \\ \boxed{11b} = 3y - 2x \end{cases}$ est compatible

Ce qui est le cas ! Donc tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ appartient à F

$\Rightarrow F = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

c) $F = \mathrm{Vect}((-\frac{2}{3}, 3) ; (1, -\frac{9}{2}))$

$(x,y) \in F \iff \exists a,b \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = a(-\frac{2}{3}, 3) + b(1, -\frac{9}{2})$

$\iff$ le système d'inconnues a et b $\begin{cases} -\frac{2}{3}a + b = x \\ 3a - \frac{9}{2}b = y \end{cases}$ est compatible

$\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + 9L_1}{\iff} \begin{cases} -\frac{2}{3}a + b = x \\ \boxed{0 = 2y + 9x} \end{cases}$ est compatible

$\Rightarrow F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x + 2y = 0\}$

d) $F = \text{Vect}((\alpha,\beta))$ où $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

$(x,y) \in F \iff \exists a \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = a\cdot(\alpha,\beta)$

$\iff$ le système d'inconnue a : $\begin{cases} a\alpha = x \\ a\beta = y \end{cases}$ est compatible

- 1er cas : si $\alpha \neq 0$

$\iff$ '' '' $\begin{cases} a\alpha = x \\ \boxed{0 = \alpha y - \beta x} \end{cases}$ est compatible

$L_2 \leftarrow \alpha L_2 - \beta L_1$

$\Rightarrow$ $\underline{F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta x - \alpha y = 0\}}$.

- 2e cas : si $\alpha = 0$ $(\Rightarrow \beta \neq 0)$

$\iff$ le système $\begin{cases} \boxed{0 = x} \\ a = \frac{1}{\beta} y \end{cases}$ est compatible.

$\Rightarrow$ $\underline{F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}}$

2) <u>Même question dans $\mathbb{R}^3$</u>

a) $F = \text{Vect}((1,-1,2))$

$(x,y,z) \in F \iff \exists a \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = a(1,-1,2)$

$\iff$ le système d'inconnue a : $\begin{cases} a = x \\ -a = y \\ 2a = z \end{cases}$ est compatible

$\iff$ $\begin{cases} a = x \\ \boxed{0 = x + y} \\ \boxed{0 = z - 2x} \end{cases}$ est compatible

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$\Rightarrow$ $\underline{F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } 2x - z = 0\}}$

b) $F = \text{Vect}((1,-1,2),(2,0,1))$

$(x,y,z) \in F \iff \exists a,b \in \mathbb{R}$ tel que

$(x,y,z) = a\cdot(1,-1,2) + b\cdot(2,0,1)$

$\Leftrightarrow$ Le système d'inconnus a et b

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ -a = y \\ 2a + b = z \end{cases}$$ est compatible

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a + 2b = x \\ 2b = x + y \\ -3b = z - 2x \end{cases}$$ est compatible

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a + 2b = x \\ 2b = x + y \\ \boxed{0 = -x + 3y + 2z} \end{cases}$$ est compatible

$\Leftrightarrow \quad -x + 3y + 2z = 0$

$\Rightarrow \underline{F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 3y + 2z = 0\}}$

Ex 5 1) $u=(1,2,1)$; $v=(2,3,-1)$, $w=(1,1,m)$ $\quad m\in\mathbb{R}$

(u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3 \iff \mathcal{M}at_e(u,v,w)$ est de rang 3.

$$M=\mathcal{M}at_e(u,v,w)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&-1&m\end{pmatrix}\begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}$$

$$M\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\0&-3&m-1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\0&0&m+2\end{pmatrix}$$

Donc (u,v,w) est une <u>base</u> $\iff \operatorname{rg} M=3 \iff \boxed{m\neq -2}$

2) $u=(2-m,-1,0)$; $v=(-1,2-m,-1)$; $w=(0,-1,2-m)$

Par la même méthode :

$$M=\mathcal{M}at(u,v,w)=\begin{pmatrix}2-m&-1&0\\-1&2-m&-1\\0&-1&2-m\end{pmatrix}$$

<u>1er cas</u> : si $m=2$ $\quad M=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\sim}\begin{pmatrix}0&\boxed{-1}&0\\\boxed{-1}&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rg} M=2 \Rightarrow (u,v,w)$ n'est pas une base.

<u>2e cas</u> si $m\neq 2$: $M\underset{C_1\leftarrow C_1-C_3}{\sim}\begin{pmatrix}2-m&-1&0\\0&2-m&-1\\m-2&-1&2-m\end{pmatrix}$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_1}{\sim}\begin{pmatrix}2-m&-1&0\\0&2-m&-1\\0&-2&2-m\end{pmatrix}\quad L_3\leftarrow(2-m)L_3+2L_2$$

$$\sim\begin{pmatrix}2-m&-1&0\\0&2-m&-1\\0&0&*\end{pmatrix}\text{ avec } *=(2-m)^2-2=2-4m+m^2$$

$\Delta=16-8=8=(2\sqrt{2})^2 \qquad x_1=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

$x_2=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

$\Rightarrow \operatorname{rg} M<3 \iff *=0$ et $m\neq 2 \iff m\neq 2,\ 2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}$

<u>Conclusion</u> : (u,v,w) est une <u>base ssi $m\notin\{2\,;\,2-\sqrt{2}\,;\,2+\sqrt{2}\}$</u>

Ex 8 1) $u_1=(\alpha,1,1)$; $u_2=(1,\alpha,1)$; $u_3=(1,1,\alpha)$

$M=Mat(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{pmatrix}$

1er cas : si $\alpha=-1$: $L_2\leftarrow L_2+L_1$; $L_3\leftarrow L_3+L_1$ $\sim\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}\underset{C_2\leftrightarrow C_3}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{\alpha}&1&1\\0&\boxed{2}&0\\0&0&\boxed{2}\end{pmatrix}$

$rg\, M=3$

2e cas : si $\alpha\neq-1$: $L_2\leftarrow\alpha L_2-L_1$; $L_3\leftarrow\alpha L_3-L_1$

$M\sim\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\0&\alpha^2-1&\alpha-1\\0&\alpha-1&\alpha^2-1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow(\alpha+1)L_3-L_2}{\sim}\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\0&\alpha^2-1&\alpha-1\\0&0&*\end{pmatrix}$

avec $*=(\alpha-1)(\alpha+1)^2-(\alpha-1)$
$=(\alpha-1)\left((\alpha+1)^2-1\right)$
$=(\alpha-1)(\alpha+2)\alpha$.

$\longrightarrow$ si $\alpha=1$ $M\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rg\,M=1$.

$\longrightarrow$ si $\alpha=-2$ ou $\alpha=0$ $\Rightarrow$ $rg\,M=2$.

Conclusion :

si $\alpha=1$	: $rg(u_1,u_2,u_3)=1$
si $\alpha=0$ ou $\alpha=-2$	: $rg(u_1,u_2,u_3)=2$
sinon	$rg(u_1,u_2,u_3)=3$.

2) $u_1=(0,\gamma,-\beta)$; $u_2=(-\gamma,0,\alpha)$; $u_3=(\beta,-\alpha,0)$

$M=Mat(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix}0&-\gamma&\beta\\\gamma&0&-\alpha\\-\beta&\alpha&0\end{pmatrix}\begin{matrix}L_2\\L_3\\L_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-\beta&\alpha&0\\0&-\gamma&\beta\\\gamma&0&-\alpha\end{pmatrix}$

si $\beta\neq0$ $L_3\leftarrow\beta L_3+\gamma L_1$ $\qquad L_3\leftarrow L_3+\alpha L_2$

$\sim\begin{pmatrix}-\beta&\alpha&0\\0&-\gamma&\beta\\0&\alpha\gamma&-\alpha\beta\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-\beta&\alpha&0\\0&-\gamma&\beta\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\boxed{-\beta}&0&\alpha\\0&\boxed{\beta}&-\gamma\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ si $\beta\neq0$, alors $\boxed{rg(u_1,u_2,u_3)=2}$

• si $\beta=0$: $M \sim \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\alpha \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$

↳ si $\gamma \neq 0$: $L_3 \leftarrow \gamma L_3 + \alpha L_2$

$M \sim \begin{pmatrix} \boxed{\gamma} & 0 & -\alpha \\ 0 & \boxed{-\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ si $\beta=0$ et $\gamma \neq 0$ $\operatorname{rg} M = 2$

↳ si $\gamma = 0$: $M \sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

↳ si $\alpha \neq 0$: $\operatorname{rg} M = 2$

↳ si $\alpha = 0$: $\operatorname{rg} M = 0$.

<u>Conclusions</u>:

- si $\beta \neq 0$: $\operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$
- si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$ $\operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$
- si $\beta = \alpha = \gamma = 0$: $\operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3) = 0$.

Ex7 $u_1=(1,0,2,4)$; $u_2=(3,2,0,1)$; $u_3=(0,-2,2,-1)$
$u_4=(1,0,1,1)$

$$M=\mathrm{Mat}(u_1,u_2,u_3,u_4)$$

$$=\begin{pmatrix}1&3&0&1\\0&2&-2&0\\2&0&2&1\\4&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ L_3-2L_1\\ L_4-4L_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&1\\0&2&-2&0\\0&-6&2&-1\\0&-11&-1&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ L_3+3L_2\\ 2L_4+11L_2\end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&0&1\\0&2&-2&0\\0&0&-4&-1\\0&0&-24&-6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ L_4-6L_3\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}\boxed{1}&3&0&1\\0&\boxed{2}&-2&0\\0&0&\boxed{-4}&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3,u_4)=\boxed{3}$ (que ce soit dans $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{C}^5$...)

En particulier la famille est liée.

Pour déterminer une relat° : soit a,b,c,d 4 scalaires tels que

$au_1+bu_2+cu_3+du_4=0_E$ $\quad$ ($E=\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{C}^5$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+3b+d=0\\2b-2c=0\\2a+2c+d=0\\4a+b-c+d=0\end{cases}$$

Le système se résout par les mêmes opérat° élémentaires que ci-dessus, soit finalt :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+3b+d=0\\2b-2c=0\\-4c-d=0\\0=0\end{cases}$$

Ainsi le système admet une ∞té de solutions ; chaque solut° $\neq(0,0,0,0)$ donne une relation entre les vecteurs

Par exemple avec $d=-4$ $\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\\d=-4\end{cases}$

$\Rightarrow u_1+u_2+u_3-4u_4=0$

$\Rightarrow \boxed{u_4=\frac{1}{4}(u_1+u_2+u_3)}$