Exercice 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(\lambda.(x,y)+(x',y')) &= f(\lambda.x+x', \lambda.y+y') \\ &= (2(\lambda.x+x')-3(\lambda.y+y'), (\lambda.x+x')+4(\lambda.y+y')) \\ &= \lambda.(2x-3y, x+4y)+(2x'-3y', x'+4y') \\ &= \lambda f(x,y)+f(x',y') \end{aligned}$$

donc f est linéaire.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} & g(\lambda.(x,y,z)+(x',y',z')) \\ &= f(\lambda.x+x', \lambda.y+y', \lambda.z+z') \\ &= ((\lambda.x+x')+(\lambda.y+y'), (\lambda.x+x')+(\lambda.z+z'), (\lambda.x+x')+(\lambda.y+y')) \\ &= \lambda.(x+y, x+z, x+y)+(x'+y', x'+z', x'+y') \\ &= \lambda g(x,y,z)+g(x',y',z') \end{aligned}$$

donc g est linéaire.

2)

$$\begin{aligned} Imf &= Vect(f(1,0), f(0,1)) = Vect((2,1),(-3,4)) \\ Img &= Vect(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)) = Vect((1,1,1),(1,0,1),(0,1,0)) \end{aligned}$$

$$(x,y) \in \ker f \iff (2x-3y, x+4y)=(0,0) \iff \begin{cases} 2x-3y=0 \\ x+4y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -8y-3y=0 \\ x=-4y \end{cases} \iff x=y=0$$

Ainsi $\ker f = \{(0,0\}$.

$$(x,y,z) \in \ker g \iff (x+y, x+z, x+y)=(0,0) \iff \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-x \\ z=-x \end{cases}$$

Ainsi $\ker g = Vect((1,-1,-1))$.

3) Puisque $\ker f = \{(0,0\}$, f est injective ; puisque f est un endomorphisme elle est donc aussi surjective et bijective.

Puis $\ker g \neq \{(0,0,0)\}$ g est non injective ; puisque g est un endomorphisme elle n'est pas non plus surjective (ni bijective).

Exercice 8. Notons $E = \mathbb{K}^p$.

Soit $u \in \ker f$; montrons que $g(u) \in \ker f$:

$$f(g(u)) = f \circ g(u) = g \circ f(u) = g(O_E) = O_E$$

Donc $g(\ker f) \subset \ker f$.

Soit $v \in Imf$; montrons que $g(v) \in Imf$. Par définition $\exists u \in E, v=f(u)$.

$$g(v) = g(f(u)) = g \circ f(u) = f \circ g(u) = f(g(u)) \in Imf$$

Donc $g(Imf) \subset Imf$.

Exercice 3).
On a :

$$mat_{\mathscr{B}}(f(x,y,z)) = M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y-z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+2y-z, 0).$$

Détterminons $\ker f$; $(x,y,z) \in \ker f \iff f(x,y,z)=(0,0,0)$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3z \\ y=2z \end{cases}$$

Ainsi :

$$\ker f = \big\{(-3z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\big\} = Vect((-3,2,1)).$$

D'après le théorème du rang $\dim \ker f + \dim Imf = 3$ et donc $\dim Imf = 2$; Or Imf est engendré par les images par f de la base canonique e_1, e_2, e_3 et :

$$f(e_1) = (1,1,0) \quad ; \quad f(e_2) = (1,2,0) \quad ; \quad f(e_3) = (1,-1,0)$$

Puisque $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont non colinéaires, ils forment une famille libre de Imf qui est de dimension 2 ; c'est donc une base :

$$Imf = Vect((1,1,0),(1,2,0)).$$

Exercice 4)

1) Avec cette matrice dans les bases canonique on a :

$$f(x,y,z) = (x-y+z, -x+y-z)$$

Déterminons $\ker f$: $(x,y,z) \in \ker f \iff f(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y-z \end{cases}$$

Ainsi :

$$\ker f = \left\{(-y-z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = Vect((-1,1,0),(-1,0,1)).$$

De plus les deux vecteurs étant non colinéaires ils forment une base de $\ker f$; ainsi $\dim \ker f = 2$.
D'après le théorème du rang : $\dim \ker f + \dim Imf = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ ainsi $\dim Imf = 3-2 = 1$. Ainsi $Im(f)$ qui est engendré par les images par f des 3 vecteurs de la base canonique :

$$f(e_1) = (1,-1) \quad ; \quad f(e_2) = (-1,1) \quad ; \quad f(e_3) = (1,-1)$$

admet par exemple $(1,-1)$ pour base :

$$Imf = Vect((1,-1)).$$

2a) Chaque fois la matrice s'obtient en prenant pour colonnes la matrice des coordonnées dans la base de l'espace d'arrivée des images par f des vecteurs de la base de départ (et dans l'ordre). Ainsi :

$$mat_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad mat_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'_1}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ici elles s'obtiennent en permutant colonnes (pour les 2 premières) ou lignes (pour la dernière) de la matrice M (puisque seul l'ordre des vecteurs des bases a changé).

Exercice 5)

1) Déterminons le rang de M :

$$rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Donc la matrice est inversible, donc f est un endomorphisme bijectif (ou automorphisme).

2) La matrice de la fonction réciproque de f dans $\mathscr{B}$ est l'inverse de la matrice de f dans $\mathscr{B}$. Inversons donc la matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ainsi =

$$mat_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

TD21 : Correction des exercices non traités
Applications linéaires.

Ex2 : Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1) $f_1((x,y)) = (1, x+y)$

NON : car $f_1(0_{\mathbb{R}^2}) = f_1((0,0)) = (1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$

2) $f_2((x,y)) = (|x|,|y|)$

NON : car $f_2((-1,-1)) = (1,1) = f_2((1,1))$

$\Rightarrow f_2((-1)\cdot(1,1)) \neq (-1)\cdot f_2((1,1))$.

3) $f_3((x,y)) = (0, x-y)$.

OUI : Soit $u=(x,y)$; $v=(x',y')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda . u + v = (\lambda x + x' ; \lambda y + y')$

$$\begin{aligned} f_3(\lambda u + v) &= (0, \lambda x + x' - (\lambda y + y')) \\ &= (0, \lambda x - \lambda y) + (0, x' - y') \\ &= \lambda . (0, x-y) + (0, x'-y') \\ &= \lambda \cdot f(u) + f(v). \end{aligned}$$

4) $f_4((x,y)) = (x^2, y^2)$

NON : $f_4((1,1)) = (1,1)$.

$f_4(2\cdot(1,1)) = f_4((2,2)) = (4,4) \neq 2\cdot f_4((1,1))$

<u>Ex9</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

1). Ici par "produit" il faut entendre "composée". Les opérations $+$ et $\circ$ vérifient les mêmes propriétés que $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}$, on s'attend à avoir la "factorisation" :

$$f^p - id_E = (f - id_E) \circ \sum_{k=0}^{p-1} f^k \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

Montrons-le par récurrence :

- <u>Initialisation</u> : $f^1 - id_E = f - id_E$.

et $(f - id_E) \circ \sum_{k=0}^{p-1} f^k = (f - id_E) \circ f^0$

$= (f - id_E) \circ id_E$

$= f - id_E$.

Donc la propriété est vraie pour $p = 1$.

- <u>Hérédité</u> : Supposons que $f^p - id_E = (f - id_E) \circ \sum_0^{p-1} f^k$

Alors $(f - id_E) \circ \sum_{k=0}^{p} f^k = (f - id_E) \circ \left(\sum_{k=0}^{p-1} f^k + f^p\right)$

$\underset{\substack{\text{distributivité} \\ \text{de } \circ \text{ sur } +}}{=} (f - id_E) \circ \sum_0^{p-1} f^k + (f - id_E) \circ f^p$

$\underset{HR}{=} f^p - id_E + f^{p+1} - f^p = f^{p+1} - id_E$

$\Rightarrow$ héréditaire.

Ainsi d'après le principe de récurrence :

<u>$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall f \in \mathcal{L}(E)$</u> :

$$\boxed{f^p - id_E = (f - id_E) \circ \sum_{k=0}^{p-1} f^k}$$

Ainsi ; en appliquant la formule :

$$\boxed{f^3 - id_E = (f - id_E) \circ (id_E + f + f^2)}$$, et :

$$f^3 + id_E = -(-f^3 - id_E)$$
$$= -((-f)^3 - id_E)$$
$$= -(-f - id_E) \sum_{k=0}^{2} (-f)^k$$

car : $(-f)^3 = (-f)\circ(-f)\circ(-$
$(-f)^3(u) = -f(-f(-f(u$
$= -f(+f^2(u)) = -f^3(u$

$$\Rightarrow \boxed{f^3 + id_E = (f + id_E)(id_E - f + f^2)}$$

On a bien exprimé $f^3 - id_E$ et $f^3 + id_E$ comme composées de 2 endomorphismes de E puisque
$f - id_E$; $f + id_E$; $id_E + f + f^2$; $id_E - f + f^2 \in \mathcal{L}(E$
(car combinaison linéaire et composée d'endomorphism

2) On suppose que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors d'après 1) :

$$0_{\mathcal{L}(E)} - id_E = (f - id_E) \circ (id_E + f + f^2)$$

$$\Rightarrow (f - id_E) \circ (-id_E - f - f^2) = id_E$$

$\boxed{\text{Rappel : } f \circ g \text{ surjectif} \Rightarrow f \text{ surjectif}}$

Ainsi $f - id_E$ est surjectif.
Or c'est un endomorphisme, donc $f - id_E$ est aussi injectif et bijectif : $(f - id_E)$ est un isomorphisme
Même argument et conclusion pour $(f + id_E)$.

3) Le même argument s'applique :

$$f^m - id_E = (f - id_E) \circ \sum_{k=0}^{m-1} f^k$$

$$f^m + id_E = (f + id_E) \circ \sum_{k=0}^{m-1} (-f)^k$$

$f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$: Alors :

$$(f - id_E) \circ \sum_{k=0}^{m-1} - f^k = id_E$$

et $(f + id_E) \circ \sum_{k=0}^{m-1} (-f)^k = id_E$

Donc $f - id_E$ et $f + id_E$ sont des endomorphismes surjectifs, donc des isomorphismes.

Leurs bijections réciproques sont :

$$\boxed{\begin{aligned}(f - id_E)^{-1} &= \sum_0^{m-1} - f^k = - \sum_0^{m-1} f^k. \\ (f + id_E)^{-1} &= \sum_0^{m-1} (-f)^k\end{aligned}}$$

<u>Ex10</u> Projecteur de $\mathbb{K}^p$: $p \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$ et $p \circ p = p$

1) ∘ Puisque $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont des s.e.v de $\mathbb{K}^p$

on a l'inclusion $\{0_{\mathbb{K}^p}\} \subset \ker p \cap \operatorname{Im} p$

∘ Montrons l'inclusion réciproque :

Soit $u \in \ker p \cap \operatorname{Im} p$

donc $p(u) = 0_{\mathbb{K}^p}$ et $\exists v \in \mathbb{K}^p$ tq $u = p(v)$

$\Rightarrow p(p(v)) = 0_{\mathbb{K}^p}$

$\Rightarrow p \circ p(v) = 0_{\mathbb{K}^p}$

$\Rightarrow p(v) = 0_{\mathbb{K}^p}$

Donc $u = 0_{\mathbb{K}^p}$.

Ainsi $\ker p \cap \operatorname{Im} p \subset \{0_{\mathbb{K}^p}\}$

$\Rightarrow \ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$.

2) $B_1 = (e_1, \dots, e_k)$ base de $\ker p \subset \mathbb{K}^p$

$B_2 = (e'_1, \dots, e'_\ell)$ —— $\operatorname{Im} p \subset \mathbb{K}^p$

$B = (e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_\ell)$

a) Montrons que B est libre.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_\ell$ $k+\ell$ scalaires, tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_\ell e'_\ell = 0_{\mathbb{K}^p}$$

à prouver : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \mu_1 = \dots = \mu_\ell = 0$

en composant par p :

$p(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_\ell e'_\ell) = p(0_{\mathbb{K}^p}) = 0_{\mathbb{K}^p}$

linéarité

$$p(\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k}_{\in \ker p}) + p(\underbrace{\mu_1 e'_1 + \dots + \mu_\ell e'_\ell}_{\in \operatorname{Im} p}) = 0_{\mathbb{K}^p}$$

$$\Rightarrow p(\underbrace{\mu_1 e'_1 + \dots + \mu_\ell e'_\ell}_{\in \operatorname{Im} p}) = 0_{\mathbb{K}^p}$$

$$\Rightarrow \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_\ell e'_\ell \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_\ell e'_\ell = 0_{\mathbb{K}^p}$$

$$\underset{B_2 \text{ base}}{\Rightarrow} \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\ell = 0$$

Ainsi $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k = 0_{\mathbb{K}^p}$

$$\underset{B_1 \text{ base}}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \mu_1 = \dots = \mu_\ell = 0$

Donc B est libre.

b) Puisque B est libre, pour que la famille soit une base, il faut et il suffit que son cardinal $(k+\ell)$ soit égal à $\dim \mathbb{K}^p$.

D'après le Théorème du rang :

$$\dim \mathbb{K}^p = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} p}_{k} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} p}_{\ell}$$
$$= k + \ell$$

puisque B_1 et B_2 sont des bases de Ker p et Im p

$\Rightarrow$ B est une base de $\mathbb{K}^p$.

3) Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$: $\exists z \in \mathbb{K}^p$ tel que $y = p(z)$

$\Rightarrow p(y) = p(p(z)) = p\circ p(z) = p(z) = y$.

4) Ainsi $\forall i \in [\![1,k]\!]$ $\quad p(e_i) = 0_{\mathbb{K}^p}$

$\forall j \in [\![1,\ell]\!]$ $\quad p(e'_j) = e'_j$

La matrice de p dans la base B est donc de la forme suivante :

$$\mathrm{Mat}_B(p) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p(e_1)\cdots p(e_k) & p(e'_1)\cdots p(e'_\ell) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ 0 & \\ \hline & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_k \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_\ell \end{array}$$

<u>Exemple</u> : Dans l'espace muni de la base canonique, la projection sur le plan $(O,\vec{j},\vec{k})$ orthogonale (parallèlement à $\vec{i}$) est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ pour lequel :

$p\circ p = p$ $\quad \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Vect}(\vec{i})$ $\quad \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Vect}(\vec{j},\vec{k})$

$$\mathrm{Mat}(p) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p(\vec{i}) & p(\vec{j}) & p(\vec{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{array}$$