Chapitre 11

Matrices

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définition d'une matrice

Soient p et q deux entiers strictement positifs.

Définition 1.
On appelle matrice A à p lignes et q colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$, une famille d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$$

On représente la matrice sous la forme d'un tableau ayant p lignes et q colonnes ; le scalaire $A_{i,j} \in \mathbb{K}$ figurant ligne i colonne j.

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,j} & \cdots & A_{1,q} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,j} & \cdots & A_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,j} & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix}$$

La matrice est dite de type (p, q). L'ensemble des matrices de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Remarque. Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles on même type (p, q) et :

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \forall\, j \in [\![1, q]\!],\ A_{i,j} = B_{i,j}.$$

Exemples.

- $$\begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 3 \\ -1 & 2 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{C})$$
- $$A = (i+j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 3}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{C})$$
- La matrice nulle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est celle dont tous les coefficients sont nuls, notée :
$$O_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$
- Les éléments de $\mathscr{M}_{1,q}(\mathbb{K})$ sont appelés les matrices lignes.
- Les éléments de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ sont appelés les matrices colonnes.

2. Opérations sur les matrices

2.1. Addition de matrices.

2.1.1. *Définition.*

Définition 2.
Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$; la somme des matrices A et B est la matrice notée $A+B$ définie par :

$$A+B = (A_{i,j}+B_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} = \begin{pmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & \cdots & A_{1,q}+B_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1}+B_{p,1} & \cdots & A_{p,q}+B_{p,q} \end{pmatrix}$$

Autrement dit $A+B$ est la matrice de type (p,q) telle que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j}+B_{i,j}$$

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 24 & 26 & 28 \end{pmatrix}$$

2.1.2. *Propriétés de l'addition.*

La somme des matrices s'opérant terme à terme, elle hérite des propriétés de l'addition dans $\mathbb{K}$:

Propriété 1.
Pour toutes matrices A, B, C dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:
– *Commutativité :* $A+B = B+A$.
– *Associativité :* $(A+B)+C = A+(B+C)$.
– $O_{p,q}$ *et l'élément neutre de l'addition :* $A+O_{p,q} = A$.
– *Existence de l'opposé : la matrice notée $-A$ définie par $-A = (-A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ est l'opposée de A : $A+(-A) = O_{p,q}$.*

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 44 \end{pmatrix}$$

L'opposé de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $(-A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. Multiplication par un scalaire.

Remarque. On parle de scalaire, pour désigner un élément de $\mathbb{K}$.

2.2.1. *Définition.*

Définition 3.
Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$; on note $\lambda.A$ la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de A par le scalaire λ. Autrement dit, $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall j \in [\![1,q]\!]$, $(\lambda.A)_{i,j} = \lambda \times A_{i,j}$.

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \cdots & \lambda A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{p,1} & \cdots & \lambda A_{p,q} \end{pmatrix}$$

Remarque. La matrice opposée de A est $(-A) = (-1).A$.

2.2.2. *Propriétés.*

Propriété 2.

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$
$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall(A,B) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2,\quad \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

Démonstration. La multiplication par un scalaire s'effectuant terme à terme sur les coefficients de la matrices, elles découlent toutes immédiatement de l'associativité de la multiplication et de la distributivité de $\times$ sur $+$ dans $\mathbb{K}$. En guise d'exemple ; pour la troisième :
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$[\alpha(A+B)]_{i,j} = \alpha \times (A+B)_{i,j} = \underbrace{\alpha(A_{i,j} + B_{i,j}) = \alpha A_{i,j} + \alpha B_{i,j}}_{\text{par distributivité de } \times \text{ sur } + \text{ dans } \mathbb{K}} = (\alpha A + \alpha B)_{i,j}$$

Puisque les matrices $\alpha(A+B)$ et $\alpha A + \alpha B$ ont même type (p,q) et mêmes coefficients, $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$. ■

2.3. Produit matriciel.

2.3.1. *Définition.*

Définition 4.
Soient n, p, q trois entiers strictement positifs et soient :

$$A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

ou autrement dit :

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Alors le produit de A par B est la matrice notée $C = A \times B$ (ou AB) définie par :
- *C est de type (n,q) ; $C \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$; autrement dit :*
  - *C a autant de lignes que A.*
  - *C a autant de colonnes que B.*
- *Et ses coefficients sont :*
  pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$:

$$C_{i,j} = (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}$$

Remarque. Attention $A \times B$ est défini si et seulement si le nombre de colonne de A est égal au nombre de ligne de B.

• Le calcul du coefficient ligne i colonne j de la matrice produit $A \times B$ s'effectue à l'aide de la ligne i de la matrice A et de la colonne j de la matrice B.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{l}
{\scriptstyle A_{i,1}\times B_{1,j}} \\
\qquad + \\
\qquad\quad {\scriptstyle A_{i,k}\times B_{k,j}} \\
\qquad\qquad\qquad + \\
\qquad\qquad\qquad\quad {\scriptstyle A_{i,p}\times B_{p,j}}
\end{array}
&
\begin{pmatrix}
B_{1,1} & \cdots & \boxed{B_{1,j}} & \cdots & B_{1,q} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
B_{k,1} & \cdots & \boxed{B_{k,j}} & \cdots & B_{k,q} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
B_{p,1} & \cdots & \boxed{B_{p,j}} & \cdots & B_{p,q}
\end{pmatrix}
\\
\begin{pmatrix}
A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} & \cdots & A_{1,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\boxed{A_{i,1}} & \cdots & \boxed{A_{i,k}} & \cdots & \boxed{A_{i,p}} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{n,1} & \cdots & A_{n,k} & \cdots & A_{n,p}
\end{pmatrix}
&
\begin{pmatrix}
C_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & C_{1,q} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \cdots & \boxed{C_{i,j}} & \cdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
C_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & C_{n,q}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$C_{i,j} = A_{i,1} \times B_{1,j} + \cdots + A_{i,k} \times B_{k,j} + \cdots + A_{i,p} \times B_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}$$

Exemples.

• Calculer AB lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Calcul de AB :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f & g+2h+3i \\ 4a+5b+6c & 4d+5e+6f & 4g+5h+6i \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$AB = \begin{pmatrix} a+2b+3c & d+2e+3f & g+2h+3i \\ 4a+5b+6c & 4d+5e+6f & 4g+5h+6i \end{pmatrix}$$

• Calculer AB lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Calcul de AB :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times(-1)+2\times(-4) & 1\times(-2)+2\times(-5) & 1\times(-3)+2\times(-6) \\ 3\times(-1)+4\times(-4) & 3\times(-2)+4\times(-5) & 3\times(-3)+4\times(-6) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & -12 & -15 \\ -19 & -26 & -33 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$$

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, lesquels des produits AB et BA sont-ils bien définis ? Les calculer.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Remarque. Le produit d'une matrice de type (p,q) par une matrice colonne de type $(q,1)$ est une matrice colonne de type $(p,1)$.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & \cdots & A_{p,q} \end{pmatrix}_{(p,q)} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}_{(q,1)} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} A_{1,k} \times x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{q} A_{p,k} \times x_k \end{pmatrix}_{(p,1)}$$

2.4. Propriétés du produit matriciel.

Associativité.
Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ *:*
$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration. Vérifions que les deux matrices sont de même type.
$$\left.\begin{array}{r} AB \text{ est de type } (p,r) \\ C \text{ est de type } (r,s) \end{array}\right\} \Longrightarrow (AB)C \text{ est de type } (p,s)$$
$$\left.\begin{array}{r} A \text{ est de type } (p,q) \\ BC \text{ est de type } (q,s) \end{array}\right\} \Longrightarrow A(BC) \text{ est de type } (p,s)$$
ainsi $(AB)C$ et $A(BC)$ ont même type (p,s).

Montrons que les deux matrices ont mêmes coefficients. Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,s]\!]$:
$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{r} (AB)_{i,k} \times C_{k,j} = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times B_{t,k} \right) \times C_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j} \\
[A(BC)]_{i,j} &= \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times (BC)_{t,j} = \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \sum_{k=1}^{r} B_{t,k} \times C_{k,j} \\
&= \sum_{t=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j}
\end{aligned}$$
Or :
$$\begin{aligned}
[(AB)C]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{t=1}^{q} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j} \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ 1 \leqslant t \leqslant q}} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j} \\
&= \sum_{t=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} A_{i,t} \times B_{t,k} \times C_{k,j} = [A(BC)]_{i,j}
\end{aligned}$$
Ainsi pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,s]\!]$, $[(AB)C]_{i,j} = [A(BC)]_{i,j}$.
Les matrices $(AB)C$ et $(A(BC)$ ayant même type et mêmes coefficients elles sont égales.
∎

Remarque. Ainsi on pourra noter ABC (ou $A \times B \times C$) pour désigner $(AB)C$ et $A(BC)$.

Distributivité de $\times$ sur $+$.
Pour tout $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* $(B,C) \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})^2$ *:*
$$A \times (B + C) = AB + AC$$

Pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$ *et* $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ *:*
$$(A+B) \times C = AC + BC$$

Démonstration. On montre la première égalité (distributivité à gauche), la preuve de la seconde est analogue.
Les matrices $A(B+C)$ et $AB+AC$ sont de même type (p,r). Montrons qu'elles ont mêmes coefficients ; soient $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$:
$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times (B+C)_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times (B_{k,j} + C_{k,j})\\ &= \sum_{k=1}^{q} (A_{i,k} \times B_{k,j} + A_{i,k} \times C_{k,j})\\ &= \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times B_{k,j} + \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times C_{k,j}\\ &= (AB)_{i,j} + (AC)_{i,j}\\ &= (AB+AC)_{i,j}\end{aligned}$$
Ainsi pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$, $[A(B+C)]_{i,j} = (AB+AC)_{i,j}$. Les matrices $(A+B) \times C$ et $AC+BC$ sont donc égales. ∎

Compatibilité de $\times$ avec la multiplication par un scalaire.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ *:*
$$\lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B)$$

Démonstration. Les 3 matrices sont de type (p,r). Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$:
$$\begin{aligned}[\lambda.(A \times B)]_{i,j} = \lambda \times (AB)_{i,j} = \lambda \times \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times B_{k,j} &= \sum_{k=1}^{q} \lambda \times A_{i,k} \times B_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{q} (\lambda.A)_{i,k} \times B_{k,j} = [(\lambda.A) \times B]_{i,j}\\ &= \sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times (\lambda.B)_{k,j} = [A \times (\lambda.B)]_{i,j}\end{aligned}$$
Elles ont mêmes coefficients, et sont donc égales. ∎

Remarque. Attention, certaines propriétés de la multiplication dans $\mathbb{K}$ ne sont plus vérifiées pour le produit matriciel :
• Le produit matriciel n'est pas commutatif : on peut avoir $AB \neq BA$.
– AB peut être défini sans que BA ne le soit.
– AB et BA peuvent être tous les deux définis mais pas de même type.
Exemple : si A est de type $(2,3)$ et B de type $(3,2)$, alors AB est de type $(2,2)$ et BA est de type $(3,3)$.
– Même lorsque AB et BA sont définies et de même type, on n'a pas en général $AB =$

BA.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcul de AB :

$$\begin{array}{ccl} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & = AB \end{array}$$

Calcul de BA :

$$\begin{array}{ccl} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & = BA \end{array}$$

Ainsi $AB \neq BA$.

• Le produit matriciel est non intègre : on peut avoir $AB = O$ avec $A \neq O$ et $B \neq O$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcul de AB :

$$\begin{array}{ccl} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = O_{2,2} \end{array}$$

3. Les matrices carrées

3.1. Matrices carrées et leurs opérations.

3.1.1. *Définition.*

Dans toute cette partie p désigne un entier strictement positif.

Définition 5.
On appelle matrice carrée d'ordre p toute matrice de type (p, p).

On désignera par $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il est muni des deux opérations :

– L'addition de matrices $+$,

– La multiplication de matrices $\times$; elle est bien définie sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$: le produit de deux matrices carrées d'ordre p est une matrice carrée d'ordre p.

Exemples.

– $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

– $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ est similaire à $\mathbb{K}$; addition et multiplication coïncident avec ces opérations dans $\mathbb{K}$.

Remarque. Addition et multiplication sont des opérations bien définies dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Pour rappel l'addition est associative, commutative, et admet pour élément neutre la matrice nulle d'ordre p, notée O_p. La multiplication est associative et en général n'est pas commutative. Elle admet aussi un élément neutre : la matrice identité notée I_p.

Remarque. La matrice nulle O_p est un élément absorbant pour la multiplication dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$:

$$\forall M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), \quad M \times O_p = O_p \times M = O_p.$$

3.1.2. *La matrice identité.*

Définition 6.
La matrice identité d'ordre p, notée I_p est la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \ (I_p)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit :

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(p,p)}$$

La matrice I_p est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, c'est-à-dire :

Pour tout $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$:

$$A \times I_p = I_p \times A = A$$

Plus généralement :

Propriété 3.
Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, *pour tout* $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *:*
$$I_p \times A = A \qquad \text{et} \qquad A \times I_q = A$$

Démonstration. Puisque $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $I_p \in \mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{K})$ et $I_q \in \mathscr{M}_{q,q}(\mathbb{K})$, les produits $I_p \times A$ et $A \times I_q$ sont bien définis et de type (p,q).
Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$:
$$(I_p \times A)_{i,j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} (I_p)_{i,k} \times A_{k,j} = (I_p)_{i,i} \times A_{i,j}}_{\text{car } (I_p)_{i,k} = 1 \text{ si } k = i \text{ et } 0 \text{ sinon}} = A_{i,j}$$
Donc $I_p \times A = A$. Et :
$$(A \times I_q)_{i,j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{q} A_{i,k} \times (I_q)_{k,j} = A_{i,j} \times (I_q)_{j,j}}_{\text{car } (I_q)_{k,j} = 1 \text{ si } k = j \text{ et } 0 \text{ sinon}} = A_{i,j}$$
Donc $A \times I_q = A$. ∎

3.1.3. *Puissance de matrices.*

Définition 7.
• *Soit* $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *on note :*
$$A^0 = I_p \qquad ; \qquad A^1 = A \qquad ; \qquad A^2 = A \times A$$
et plus généralement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *:*
$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

Les puissances de matrices vérifient les propriétés suivantes :

Propriété 4.
Pour tout $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *et* $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ *:*
$$A^n \times A^m = A^{n+m} \qquad ; \qquad (A^n)^m = A^{n \times m}$$
De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ *:*
$$(\lambda.A)^n = \lambda^n.A^n$$
et :
$$(I_p)^n = I_p$$
Si $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ *et* <u>*si A et B commutent*</u> *(pour* $\times$*) :*
$$(A \times B)^n = A^n \times B^n$$

Démonstration. Elle est analogue à la démonstration des mêmes propriétés des puissances dans $\mathbb{K}$. ∎

Remarque. En particulier toutes les puissance d'une même matrices commutent entre-elles :
$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ A^n \times A^m = A^m \times A^n$$
en effet : $A^n \times A^m = A^{n+m} = A^{m+n} = A^m \times A^n$.
En particulier $I_p = A^0$ commute avec toute matrice A dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Plus généralement :

Propriété 5.
Soient A et B deux matrices dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent entre-elles. Alors $\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2$, A^n et B^m commutent entre elles.

Démonstration. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent entre elles. Montrons que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, A et B^m commutent entre-elles. Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$.

(I) Pour $m = 0$, $B^0 = I_p$ commute avec A. L'assertion est vraie au rang 0.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang m. Alors par associativité de $\times$, par hypothèse de récurrence et car A et B commutent :

$$\begin{aligned} A \times B^{m+1} &= A \times (B^m \times B) = (A \times B^m) \times B \underset{(HR)}{=} (B^m \times A) \times B = B^m \times (A \times B) \\ &= B^m \times (B \times A) = (B^m \times B) \times A = B^{m+1} \times A \end{aligned}$$

Ainsi A et B^{m+1} commutent entre-elles ; l'assertion est vraie au rang $m+1$.

Ainsi pour tout $m \in \mathbb{N}$, A et B^m commutent. En appliquant ce que l'on vient de démontrer à B^m et A, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n et B^m commutent. ■

Exercice 2.
On considère les suites réelles (x_n) et (y_n) définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Nous allons appliquer le calcul matriciel pour déterminer les expressions de x_n et y_n en fonction de n.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$$

a) Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = A \times X_n.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n \times X_0.$$

c) Calculer A^2. En déduire A^{2m} et A^{2m+1} pour tout $m \in \mathbb{N}$.

d) En déduire les coefficients X_{2m} et X_{2m+1} en fonction de m.

e) En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de n.

Remarque. Comme on vient de le voir sur un exemple, beaucoup de problèmes se ramènent au calcul des puissances d'une matrice carrée, ce qui constitue un exercice assez difficile. Nous verrons dans la suite, et en TD, d'autres méthodes pour calculer les puissances d'une matrice carrée.

3.1.4. *La formule du binôme.*

Dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ en général $(A+B)^2 \neq A^2 + 2.AB + B^2$. En effet :

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)\times(A+B)\\ &= A\times(A+B) + B\times(A+B)\\ &= A\times A + A\times B + B\times A + B\times B\\ &= A^2 + AB + BA + B^2\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & (A+B)^2 = A^2 + 2.AB + B^2\\ \iff\ & A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2.AB + B^2\\ \underset{-A^2-B^2}{\iff}\ & A^2 + AB + BA + B^2 - A^2 - B^2 = A^2 + 2.AB + B^2 - A^2 - B^2\\ \iff\ & AB + BA = 2.AB\\ \underset{-AB}{\iff}\ & AB + BA - AB = 2.AB - AB\\ \iff\ & BA = AB\\ \iff\ & A \text{ et } B \text{ commutent}\end{aligned}$$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$,

$$(A+B)^2 = A^2 + 2.AB + B^2 \iff A \textit{ et } B \textit{ commutent}$$

Ainsi la formule du binôme donnant le développement de $(A+B)^n$ n'est pas vérifiée dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ lorsque A et B ne commutent pas. Il s'avère qu'elle l'est lorsque A et B commutent :

Théorème 6.
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Remarque. On étend la notation $\sum$ aux matrices; les propriétés algébriques d'une somme (linéarité, changement d'indice, décrochage, télescopage) restent vraies.

Démonstration. Elles est demeure identique à celle effectuée dans $\mathbb{K}$ (par récurrence et en appliquant la relation de Pascal, cf. Chapitre "Somme, produit, Identités remarquables"), dès que l'on a remarqué que si A et B commutent alors toute puissance de A commute avec toute puissance de B (propriété 5). ■

Exemple. Déterminons pour tout $n \in \mathbb{N}$ les coefficients de A^n lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A = I_3 + B$. Or I_3 et B commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme pour développer $A^n = (I_3+B)^n$. Déterminons les puissance de I_3 et de B :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_3^n = I_3$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall n \geqslant 3,\ B^n = O_3$$

Comme elles sont particulièrement simples, on peut simplifier le développement donné par la formule du binôme pour obtenir les coefficients de A^n :

$$\begin{aligned} A^n = (I_3+B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} B^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k && \text{car } I_3^{n-k} = I_3 \\ &= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} B^k}_{=O_3} && \text{Décrochage} \\ &= 1.I_3 + n.B + \frac{n(n-1)}{2}.B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3. Appliquer le même argument pour calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les coefficients de A^n lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. En déduire les expressions en fonction de n de x_n, y_n, z_n où (x_n), (y_n), (z_n) sont les suites définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = \phantom{x_n + {}} y_n + z_n \\ z_{n+1} = \phantom{x_n + y_n + {}} z_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x_0 = y_0 = z_0 = 1$$

3.2. **Les matrices inversibles.**

Définition 8.
Une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ tel que :

$$AB = BA = I_p.$$

Dans ce cas la matrice B peut se noter A^{-1} et est appelée l'inverse de A.

Propriété 7.
L'inverse d'une matrice A, lorsqu'elle existe, est unique.

Démonstration. Soient B et C deux inverses de la matrice A ; *i.e.* $AB = AC = BA = CA = I_p$. Alors :

$$\begin{aligned}
& AB = AC & \\
\Longrightarrow\ & B(AB) = B(AC) & \text{en multipliant à gauche par } B\\
\Longrightarrow\ & (BA)B = (BA)C & \text{par associativité}\\
\Longrightarrow\ & I_pB = I_pC & \text{car } BA = I_p\\
\Longrightarrow\ & B = C &
\end{aligned}$$

D'où l'unicité. ■

Remarque. Clairement, si A est inversible, A^{-1} aussi et A est l'inverse de A^{-1}.

Si A est inversible, son inverse A^{-1} l'est aussi et

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

Exemples.

- $I_p^{-1} = I_p$; la matrice identité est son propre inverse, puisque $I_p \times I_p = I_p$.
- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; A et B sont inverses l'une de l'autre.
- Toute matrice carrée n'est pas inversible !

Exemple : la matrice nulle n'est pas inversible, puisque pour tout $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $O_p \times A = O_p$. Ce n'est pas la seule : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, n'est pas inversible puisque si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \neq I_2$. On peut trouver beaucoup d'autre exemples.

Remarque. En général, pour des matrices $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

Exemple : puisque la multiplication matricielle n'est pas intègre, il existe A et B deux matrices non nulles de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ tel que $A \times B = O_p$. Ainsi :

$$A \times B = O_p = A \times O_p \quad \text{et} \quad B \neq O_p.$$

Par contre, lorsque $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible et $B, C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} & AB = AC \\ \Longrightarrow\ & A^{-1} \times (AB) = A^{-1} \times (AC) \\ \Longrightarrow\ & (A^{-1}A) \times B = (A^{-1}A) \times C \\ \Longrightarrow\ & I_p \times B = I_p \times C \\ \Longrightarrow\ & B = C \end{aligned}$$

Ainsi lorsque A est inversible, $AB = AC \implies B = C$.

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice <u>inversible</u> ; alors :
- $\forall (B, C) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2, \quad AB = AC \implies B = C.$
- $\forall (B, C) \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})^2, \quad BA = CA \implies B = C.$

Étudions la stabilité de l'inversibilité par les opérations matricielles.

Propriété 8.
Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice <u>inversible</u>. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, la matrice $\lambda.A$ est inversible et :

$$(\lambda.A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}.A^{-1}.$$

Démonstration. En effet :

$$\lambda.A \times \frac{1}{\lambda}.A^{-1} = (\lambda \times \frac{1}{\lambda}).(AA^{-1}) = 1.I_p = I_p$$
$$\frac{1}{\lambda}.A^{-1} \times \lambda.A = (\frac{1}{\lambda} \times \lambda).(A^{-1}A) = 1.I_p = I_p$$

■

La somme de deux matrices inversibles n'est en général pas inversible. Exemple : I_p et $(-I_p)$ sont inversibles, tandis que $I_p + (-I_p) = O_p$ n'est pas inversible.
Par contre produit et puissances de matrices inversibles sont aussi inversible :

Propriété 9.
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ inversibles. Alors :
- *Leur produit $A \times B$ est aussi inversible et :*

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est inversible et :*

$$(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$$

Démonstration.
• Inversibilité d'un produit de matrices inversibles :

$$\left.\begin{aligned} AB \times B^{-1}A^{-1} = A \times I_p \times A^{-1} = A \times A^{-1} = I_p \\ B^{-1}A^{-1} \times AB = B^{-1} \times I_p \times B = B^{-1} \times B = I_p \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} AB \text{ est inversible} \\ \text{et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \end{array}$$

• Inversibilité d'une puissance de matrice inversible :
Soit A une matrice inversible. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que A^n est inversible et que $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

(I) Pour $n = 0$, $A^n = I_p$ est inversible, d'inverse $I_p = (A^{-1})^n$; l'assertion est vérifiée.

(H) Supposons l'assertion vérifiée au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors $A^{n+1} = A \times A^n$ est inversible comme produit de matrices inversibles, d'inverse

$$(A^n)^{-1} \times A^{-1} \underset{HR}{=} \left(A^{-1}\right)^n \times A^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n+1}$$

L'assertion reste donc vraie au rang $n+1$. ■

Par définition une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ tel que $A \times B = B \times A = I_p$; il s'avère qu'il suffit en fait de vérifier une seule des deux égalités $AB = I_p$ ou $BA = I_p$; l'autre sera alors automatiquement vérifiée. Cependant ce résultat très utile est assez difficile et technique à démontrer avec les seuls outils dont nous disposons pour l'instant. Aussi nous repoussons la démonstration au chapitre "Applications linéaires" où les matrices seront interprétées sous un nouvel angle.

Propriété 10.
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$; alors :

$$B = A^{-1} \iff AB = I_p \iff BA = I_p.$$

Démonstration. Voir Chapitre "Applications linéaires". ■

Exercice 5. Calcul de l'inverse d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur.
Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que $A^2 - A = 2.I_2$.
2) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

4. Transposée d'une matrice

Dans cette partie les matrices ne sont pas nécessairement carrées ; p et q désignent deux entiers strictement positifs.

4.1. **Définition.**

Définition 9.
Soit A une matrice de type (p,q) ; la matrice transposée de A, ,notée ${}^tA$, est la matrice de type (q,p) dont les coefficient sont :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!],\ ({}^tA)_{i,j} = A_{j,i}$$

Remarque. C'est à dire que :
– la ligne i de ${}^tA$ est la colonne i de A,
– la colonne j de ${}^tA$ est la ligne j de A.

Exemples.

•
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K}) \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K})$$

•
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{K}) \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{K})$$

•
$${}^tI_p = I_p.$$

4.2. **Propriétés.**

Propriété 11.
Soient A et B deux matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

•
$${}^t({}^tA) = A$$

• *Si la somme $A+B$ est bien définie, alors ${}^tA + {}^tB$ est bien définie et :*
$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

• *Si le produit $A \times B$ est bien défini, alors ${}^tB \times {}^tA$ est bien défini et :*
$${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$$

• *Si A est une matrice carrée :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left({}^tA\right)^n = {}^t\left(A^n\right)$$

• *Si A est une matrice inversible :*
$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

Démonstration. On les démontre dans l'ordre :
• Soit A de type (p,q), alors ${}^tA$ est de type (q,p) et ${}^t({}^tA)$ est de type (p,q) : A et ${}^t({}^tA)$ ont même type. De plus soit $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$:
$$\left({}^t\left({}^tA\right)\right)_{i,j} = \left({}^tA\right)_{j,i} = A_{i,j}$$
Ainsi ${}^t({}^tA) = A$.
• Soient A et B de même type (p,q) de sorte que $A+B$ est défini. Alors ${}^tA$ et ${}^tB$ sont

de type (q,p) donc ${}^tA + {}^tB$ est bien défini ; ${}^t(A+B)$ et ${}^tA + {}^tB$ sont de même type (q,p). De plus, soit $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$\left({}^t(A+B)\right)_{i,j} = (A+B)_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i} = {}^tA_{i,j} + {}^tB_{i,j}.$$

Donc ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

• Soient A de type (p,q) et B de type (q,r) de sorte que $A \times B$ soit défini et de type (p,r). Alors ${}^tB$ est de type (r,q), ${}^tA$ est de type (q,p), ainsi ${}^tB \times {}^tA$ est défini et de type (r,p) tout comme ${}^t(A \times B)$. Soit $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$\begin{aligned}\left({}^t(A \times B)\right)_{i,j} &= (A \times B)_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^{q} A_{j,k} \times B_{k,i} = \sum_{k=1}^{q} {}^tA_{k,j} \times {}^tB_{i,k} = \sum_{k=1}^{q} {}^tB_{i,k} \times {}^tA_{k,j} = \left({}^tB \times {}^tA\right)_{i,j}\end{aligned}$$

Donc ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

• Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left({}^tA\right)^n = {}^t\left(A^n\right)$.

Puisque A est carrée, il en est de même de sa transposée ${}^tA$.

(I) Pour $n = 0$, $\left({}^tA\right)^n = I_p$ et ${}^t\left(A^n\right) = {}^tI_p = I_p$. L'assertion est donc vraie.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang n. En appliquant la transposée d'un produit :

$$\left({}^tA\right)^{n+1} = \left({}^tA\right)^n \times {}^tA = {}^t\left(A \times A^n\right) = {}^t\left(A^{n+1}\right)$$

Ainsi l'assertion reste vraie au rang $(n+1)$.

• En appliquant la transposée d'un produit :

$$\begin{aligned}{}^tA \times {}^t\left(A^{-1}\right) &= {}^t\left(A^{-1} \times A\right) = {}^tI_p = I_p \\ {}^t\left(A^{-1}\right) \times {}^tA &= {}^t\left(A \times A^{-1}\right) = {}^tI_p = I_p\end{aligned}$$

Ainsi ${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$. ■

Remarque. En appliquant plusieurs fois la transposée d'un produit :

$${}^t(A \times B \times C) = {}^t((A \times B) \times C) = {}^tC \times {}^t(A \times B) = {}^tC \times {}^tB \times {}^tA$$

$${}^t(A \times B \times C \times D) = {}^t((A \times B \times C) \times D) = {}^tD \times {}^t(A \times B \times C) = {}^tD \times {}^tC \times {}^tB \times {}^tA$$

etc...

5. Matrices remarquables

Dans cette partie toutes les matrices sont carrées d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$. Nous passons en revue certains types de matrices remarquables vérifiant des propriétés qui simplifient leur manipulation.

5.1. Matrices scalaires.

Définition 10.
Une matrice scalaire d'ordre p est une matrice de la forme $\lambda.I_p$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda.I_p = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Remarque. Multiplier une matrice A par la matrice scalaire $\lambda.I_p$ revient à multiplier A par le scalaire λ :

$$(\lambda.I_p) \times A = \lambda.(I_p \times A) = \lambda.A$$
$$A \times (\lambda.I_p) = \lambda.(A \times I_p) = \lambda.A$$

En particulier :

Propriété 12.
Une matrice scalaire commute avec toute matrice carrée de même ordre.

Les opérations entre matrices scalaires sont particulièrement simples puisqu'elles reviennent à opérer sur les scalaires :

Propriété 13.
- *Somme, produit, puissances de matrices scalaires sont des matrices scalaires et :*

$$\lambda.I_p + \mu.I_p = (\lambda + \mu).I_p \quad ; \quad \lambda.I_p \times \mu.I_p = (\lambda \times \mu).I_p \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda.I_p)^n = \lambda^n.I_p$$

- *Une matrice scalaire $\lambda.I_p$ est inversible si et seulement si λ est inversible (i.e. $\lambda \neq 0$), et dans ce cas :*

$$(\lambda.I_p)^{-1} = \frac{1}{\lambda}.I_p$$

Démonstration. Elle est immédiate. ■

5.2. Matrices diagonales.

Définition 11.
Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les coefficients non diagonaux sont nuls :

$$A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \text{ est diagonale si } \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \implies A_{i,j} = 0$$

On note alors :

$$A = Diag(A_{1,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{p,p}) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

Remarques.

• Ainsi toute matrice scalaire est diagonale. La réciproque est fausse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonale et non scalaire.

• Le calcul du produit d'une matrice par une matrice diagonale est simple à calculer :

– Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ à gauche par $D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ revient à multiplier chaque ligne i de la matrice A par le scalaire λ_i :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.a_{1,1} & \lambda_1.a_{1,2} & \cdots & \lambda_1.a_{1,q} \\ \lambda_2.a_{2,1} & \lambda_2.a_{2,2} & \cdots & \lambda_2.a_{2,q} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_p.a_{p,1} & \lambda_p.a_{p,2} & \cdots & \lambda_p.a_{p,q} \end{pmatrix}$$

En effet :

$$(D \times A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} D_{i,k} \times a_{k,j} = D_{i,i} \times a_{i,j} = \lambda_i \times a_{i,j}$$

– Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ à droite par $D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ revient à multiplier chaque colonne i de la matrice A par le scalaire λ_i :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.a_{1,1} & \lambda_2.a_{1,2} & \cdots & \lambda_p.a_{1,p} \\ \lambda_1.a_{2,1} & \lambda_2.a_{2,2} & \cdots & \lambda_p.a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1.a_{q,1} & \lambda_2.a_{q,2} & \cdots & \lambda_p.a_{q,p} \end{pmatrix}$$

En effet :

$$(A \times D)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times D_{k,j} = a_{i,j} \times D_{j,j} = a_{i,j} \times \lambda_j$$

Entre des matrices diagonales toutes les opérations se font terme à terme ; cela rend leur calcul très simple :

Propriété 14.

Pour des matrices diagonales de même ordre p :

• *La somme de matrices diagonales est diagonale :*

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p) + Diag(b_1, b_2, \dots, b_p) = Diag((a_1 + b_1), (a_2 + b_2), \dots, (a_p + b_p))$$

• *Le produit de matrices diagonales est diagonal :*

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p) \times Diag(b_1, b_2, \dots, b_p) = Diag((a_1 \times b_1), (a_2 \times b_2), \dots, (a_p \times b_p))$$

• *Une puissance de matrice diagonale est diagonale :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ Diag(a_1, a_2, \dots, a_p)^n = Diag(a_1^n, a_2^n, \dots, a_p^n)$$

• *Une matrice diagonale est inversible si set seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls ; dans ce cas :*

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p)^{-1} = Diag\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_p}\right)$$

Démonstration. Le premier point découle immédiatement de la définition de l'addition de matrices.

Le deuxième point découle immédiatement de la remarque ci-dessus.

Le troisième point s'en déduit par récurrence sur n.

Pour le quatrième point il découle du deuxième que si les a_i sont tous non nuls :

$$Diag(a_1, a_2, \dots, a_p) \times Diag\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_p}\right) = Diag\left(\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \dots, \frac{a_p}{a_p}\right) = I_p$$

Montrons que si $A = Diag(a_1, a_2, \dots, a_p)$ est inversible alors tous les a_i sont non nuls. Par contraposée : supposons que l'un des a_i soit nul. Alors pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $A \times M$ n'a que des zéros sur sa ligne i, et ne peut donc pas être égal à I_p. Ainsi A n'est pas inversible. ■

Remarque. Toutes les matrices diagonales de même ordre commutent entre-elles.

Exercice 6. Soit $\alpha \neq \beta$; déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice diagonale $Diag(\alpha, \beta)$.

5.3. Les matrices triangulaires.

Définition 12.
Une matrice carrée A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si :

$$i > j \text{ (respectivement } i < j) \implies A_{i,j} = 0$$

Une matrice triangulaire supérieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,p} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire inférieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{p,1} & \cdots & \cdots & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

Exemples.

• Les matrices diagonales sont les seules matrices qui sont à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures.

• La transposée d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est triangulaire inférieure (resp. supérieure).

Propriété 15.
Pour des matrices triangulaires de mêmes ordres :
• *La somme de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).*
• *Le produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure). De plus ses coefficients diagonaux s'obtiennent en faisant le produit terme à terme.*
• *Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas son inverse est aussi triangulaire supérieure (resp. inférieure).*

Démonstration. Elles sont menées pour les matrices triangulaires supérieures. En transposant on les déduit pour les triangulaires inférieures.
Considérons A et B deux matrices triangulaires supérieures d'ordre p et $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.
• Si $i > j$ alors $A_{i,j} = B_{i,j} = 0$ et donc $A_{i,j} + B_{i,j} = 0$; ainsi $i > j \implies (A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} = 0$. Donc $A+B$ est triangulaire supérieure.
• Par la formule du produit matriciel :

$$(A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}$$

$$\text{si } i > j \text{ alors } (A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} \times B_{k,j} + \sum_{k=i}^{p} A_{i,k} \times \underbrace{B_{k,j}}_{=0} = 0$$

donc $A \times B$ est triangulaire supérieure

$$\begin{aligned} \text{si } i = j \text{ alors } (A \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} \times B_{k,j} + A_{i,i} \times B_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{p} A_{i,k} \times \underbrace{B_{k,j}}_{=0} \\ &= A_{i,i} \times B_{i,i} \end{aligned}$$

et donc le terme diagonal ligne i colonne i de $A \times B$ est le produit des termes diagonaux ligne i colonne i de A et B.
• Quant à l'inversibilité d'une matrice triangulaire supérieure, on repousse la démonstration à §6.5 (page 34). ■

5.4. Matrices symétriques.

Définition 13.
Une matrice carrée A est dite symétrique si elle est égale à sa transposée :

$${}^tA = A$$

Autrement dit, une matrice symétrique est une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_{p-1,p} \\ A_{1,p} & \cdots & A_{p-1,p} & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

Exemples.
• Les matrices I_p et O_p sont symétriques ; plus généralement, toute matrice scalaire,

toute matrice diagonale est symétrique.
• La matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

est symétrique et non diagonale.

Exercice 7. Soit A une matrices carrée.
1) Montrer que la matrice $A + {}^tA$ est symétrique.
2) Montrer que la matrice $A \times {}^tA$ est symétrique.

Propriété 16.
• *La somme de matrices symétriques est symétrique.*
• *Une puissance de matrice symétrique est symétrique.*
• *L'inverse d'une matrice symétrique inversible est symétrique.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices symétriques d'ordre p.
• Puisque ${}^tA = A$ et ${}^tB = B$:

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A + B$$

donc $(A + B)$ est symétrique.
• Puisque ${}^tA = A$; soit $n \in \mathbb{N}$:

$${}^t\left(A^n\right) = \left({}^tA\right)^n = A^n$$

donc A^n est symétrique.
• Soit A une matrice symétrique et inversible ; puisque ${}^tA = A$:

$${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1} = A^{-1}$$

Donc l'inverse A^{-1} de A est symétrique. ■

Remarque. Attention, le produit de matrices symétriques n'est pas en général une matrice symétrique.
Exemple : soient les marices symétriques A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

leur produit $A \times B$ n'est pas symétrique.

Exercice 8. Soient A et B deux matrices symétriques. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $A \times B$ soit une matrice symétrique.

6. Matrices et systèmes linéaires

6.1. Écriture matricielle d'une système linéaire.

Étant donné un système de n équations linéaires à p inconnues (avec $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$) et à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$$

on pose :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$\text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

alors le produit AX est la matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$$

et le système (S) est équivalent à l'équation d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$(S) \iff AX = B$$

C'est l'<u>écriture matricielle</u> du système. La matrice A est la <u>matrice associée</u> au système linéaire.

Exemple.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.2. Structure des solutions.

Définition 14.
Étant donné le système (S) d'écriture matricielle $AX = B$, le système homogène associé est le système d'écriture matricielle $AX = O_{n,1}$, c'est à dire :

$$(S_H) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{array} \right.$$

Remarque. Un système homogène est toujours compatible puisque $X = O_{p,1}$ en est solution : $A \times O_{p,1} = O_{n,1}$.

Théorème 17. *Les solutions du système (S) sont sommes d'une solution particulière de (S) et des solutions générales du système homogène associé.*

Démonstration. Soit X_p une solution particulière de (S) : $A \times X_p = B$. Alors X est solution de (S) ssi :

$$AX = B \iff AX - AX_p = B - B \iff A \times (X - X_p) = O_{n,1}$$

et donc si et seulement si $(X - X_p)$ est solution du système homogène associé, c'est à dire si set seulement si X est somme de X_p et d'une solution du système homogène associé. ∎

Théorème 18.
Un système linéaire admet 0, 1, ou une infinité de solutions.

Démonstration. Le système homogène associé (S_H) est compatible est admet donc au moins une solution (il suffit de considérer une matrice colonne nulle). Montrons que si (S_H) admet une deuxième solution $X_1 \neq O_{p,1}$, alors il en admet une infinité ; en effet :

$$A \times X_1 = O_{n,1} \implies \forall \lambda \in \mathbb{K}, A \times (\lambda.X_1) = \lambda.(A \times X_1) = \lambda.O_{n,1} = O_{n,1}$$

ainsi chaque valeur de $\lambda \in \mathbb{K}$ donne une nouvelle solution $\lambda.X_1$ de (S_H), puisque $X_1 \neq O_{p,1}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \lambda_1.X_1 \neq \lambda_2.X_1$. Le système (S_H) admet donc une seule ou une infinité de solutions.

D'après le théorème précédent, si (S) admet une solution, alors il en admet une seule ou une infinité. ∎

Remarque. Si l'existence de solutions dépend de B, l'unicité ne dépend que de la matrice associée au système.

6.3. Interprétation matricielle des opérations élémentaires.

Définition 15.
Étant donnée une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dont on note les lignes $L_1, L_2, \dots, L_n$; $L_i = (A_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant p}$. On considère les opérations élémentaires sur ses lignes, qui la transforment en une matrice de même type :
- *$L_i \leftrightarrow L_j$: échange des lignes L_i et L_j.*
- *$L_i \leftarrow \lambda L_i$: multiplier la ligne L_i par un scalaire $\lambda \neq 0$.*
- *$L_i \leftarrow L_i + L_j$: ajouter la ligne L_i à la ligne L_j avec $i \neq j$.*

Propriété 19.
Appliquer à la matrice A la transformation :
- *$L_i \leftarrow \lambda L_i$ revient à multiplier à gauche par :*

$$M_n(i,\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

$M_n(i,\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

- *$L_i \leftrightarrow L_j$ revient à multiplier à gauche par :*

$$E_n(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

$E_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.

- *$L_i \leftarrow L_i + L_j$ revient à multiplier à gauche par :*

$$T_n(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$T_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$.
De plus les matrices $M_n(i,\lambda)$, $E_n(i,j)$ et $T_n(i,j)$ sont inversibles.

Démonstration. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$M_n(i,\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $M_n(i,\lambda)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{L_1} \\ \vdots \\ \boxed{L_i} \\ \vdots \\ \boxed{L_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{L_1} \\ \vdots \\ \boxed{\lambda L_i} \\ \vdots \\ \boxed{L_n} \end{pmatrix}$$

Ainsi lorsque $\lambda \neq 0$ appliquer à une matrice l'opération $L_i \leftarrow \lambda.L_i$ suivie de l'opération $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda}.L_i$ ne change rien à cette matrice. En particulier en les appliquant à la matrice identité :

$$M_n(i,\frac{1}{\lambda})\times M_n(i,\lambda)\times I_n = I_n \implies M_n(i,\frac{1}{\lambda})\times M_n(i,\lambda) = I_n \implies M_n(i,\frac{1}{\lambda}) = M_n(i,\lambda)^{-1}$$

Ainsi la matrice $M_n(i,\lambda)$ est inversible dès que $\lambda \neq 0$, d'inverse $M_n(i,\frac{1}{\lambda})$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$E_n(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.

Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $E_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\qquad L_i \qquad} \\ \vdots \\ \boxed{\qquad L_j \qquad} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\qquad L_j \qquad} \\ \vdots \\ \boxed{\qquad L_i \qquad} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Or appliquer deux fois l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ à une matrice A ne change pas cette matrice. En particulier lorsque $A = I_n$:

$$E_n(i,j) \times E_n(i,j) \times I_n = I_n \implies E_n(i,j) \times E_n(i,j) = I_n \implies E_n(i,j) = E_n(i,j)^{-1}.$$

Ainsi la matrice $E_n(i,j)$ est inversible et a pour inverse elle-même.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$T_n(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \text{et} \quad T'_n(i,j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$T_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$; $T'_n(i,j)$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en lui appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_j$.

Multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $T_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + L_j$ à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\qquad L_i \qquad} \\ \vdots \\ \boxed{\qquad L_j \qquad} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\qquad L_i + L_j \qquad} \\ \vdots \\ \boxed{\qquad L_j \qquad} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

et de même multiplier une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à gauche par $T'_n(i,j)$ revient à appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_j$ à la matrice A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_i \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\quad L_i - L_j \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad L_j \quad} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Or appliquer à une matrice A l'opération $L_i \leftrightarrow L_i + L_j$ suivie de $L_i \leftarrow L_i - L_j$ ne change pas cette matrice. En particulier lorsque $A = I_n$:

$$T'_n(i,j) \times T_n(i,j) \times I_n = I_n \implies T'_n(i,j) \times T_n(i,j) = I_n \implies T'_n(i,j) = T_n(i,j)^{-1}.$$

Ainsi la matrice $T_n(i,j)$ est inversible et a pour inverse $T'_n(i,j)$. ■

Corollaire 20.
Appliquer membre à membre une opération élémentaire à une équation matricielle $AX = B$, la change en une équation équivalente (c'est à dire ayant mêmes solutions).

Démonstration. Appliquer une opération élémentaire revient à multiplier les deux membres de l'égalité par une matrice M inversible avec $M = M_n(i,\lambda)$, $E_n(i,j)$ ou $T_n(i,j)$. Ainsi :

$$AX = B \underset{M\times}{\implies} MAX = MB$$

$$MAX = MB \underset{M^{-1}\times}{\implies} M^{-1}MAX = M^{-1}MB \implies I_nAX = I_nB \implies AX = B$$

ainsi $AX = B \iff MAX = MB$ avec $M = M_n(i,\lambda)$, $E_n(i,j)$ ou $T_n(i,j)$. ■

Remarque. Ainsi, pour la résolution matricielle d'un système, effectuer une opération élémentaire <u>simultanément</u> sur la matrice du système et sur la matrice colonne des seconds membres transforme le système en un système équivalent.

Si la suite des opérations élémentaires s'effectue selon la méthode du pivot de Gauss, on parle de résolution (matricielle) par pivot de Gauss.

Exemple. Résolution matricielle par pivot de Gauss du système :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$$

On le retranscrit à l'aide d'une matrice 3×4 ; une ligne verticale sépare la matrice des coefficients de la matrice second membre :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Définition 16.
Un système linéaire de n équations à n inconnues est dit de Cramer si il admet une unique solution.

Remarque. Pour un système de Cramer, la résolution peut se mener par la méthode du pivot de Gauss en appliquant des opérations élémentaires jusqu'à aboutir à un système équivalent dont la matrice associée est la matrice identité.

Théorème 21.
Un système linéaire de n équations à n inconnues est de Cramer si et seulement si sa matrice associée est inversible.
Dans ce cas, la solution du système $AX = B$ d'inconnue X est $X = A^{-1}B$.

Démonstration. Soit $AX = B$ l'écriture matricielle du système avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $X, B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A est inversible :

$$AX = B \underset{A^{-1}\times}{\Longrightarrow} A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow I_nX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Donc il existe une unique solution.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si le système admet une solution unique, alors en appliquant le pivot de Gauss, une suite d'opérations élémentaires transforme l'équation $AX = B$ en une équation équivalente de la forme $X = C$; c'est à dire qu'appliquée à la matrice A du système cette suite d'opérations élémentaires transforme A en la matrice identité I_n et appliquée à la matrice colonne B elle la transforme en la matrice colonne C, pour finalement aboutir à l'équation $I_nX = C$. D'après la propriété 19 en considérant la suite de matrices inversibles $M_1, M_2, \dots, M_t$ correspondant à cette suite d'opérations élémentaires, on a :

$$M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \times A = I_n$$

Donc la matrice A est inversible et a pour inverse :

$$A^{-1} = M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1.$$

■

Remarque. En particulier, pour un système linéaire de n équations à n inconnues, être de Cramer ne dépend que de la matrice associée au système ; ça ne dépend pas des seconds membres.

6.4. **Application à l'inversion de matrice.**

Le théorème précédent (théorème 21) fournit une méthode pour déterminer si une matrice A est inversible et calculer son inverse :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; posons :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

et considérons le système d'inconnue X et de paramètres Y :

$$(S)\quad AX=Y \iff \begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = y_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \cdots + a_{nn}\cdot x_n = y_n \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système ; on aboutit :

• Soit à une système qui n'est pas de Cramer (lorsque le système réduit obtenu n'est pas triangulaire). Dans ce cas la matrice A n'est pas inversible.

• Soit à une solution unique ; dans ce cas A est inversible et :

$$X=A^{-1}Y \quad \textit{soit :} \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}\cdot y_1 + \alpha_{12}\cdot y_2 + \cdots + \alpha_{1n}\cdot y_n \\ x_2 = \alpha_{21}\cdot y_1 + \alpha_{22}\cdot y_2 + \cdots + \alpha_{2n}\cdot y_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n = \alpha_{n1}\cdot y_1 + \alpha_{n2}\cdot y_2 + \cdots + \alpha_{nn}\cdot y_n \end{cases}$$

Les coefficients apparaissant au second membre sont ceux de la matrice A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple. Déterminer l'inversibilité des matrices suivantes et le cas échéant calculer leur inverse :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&5&1\\2&1&2\end{pmatrix}$$

• Inversibilité de A ; on résout le système d'inconnues (x,y,z) et de paramètres (a,b,c) :

$$\begin{cases} x+2y+z=a \\ 2x+y+z=b \\ x+y+2z=c \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+2y+z &= a \\ -3y-z &= -2a+b \\ -y+z &= -a+c \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow -L_3 \\ L_2\leftrightarrow L_3}}{\iff} \begin{cases} x+2y+z &= a \\ y-z &= a-c \\ -3y-z &= -2a+b \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+3L_2}{\iff} \begin{cases} x+2y+z &= a \\ y-z &= a-c \\ -4z &= a+b-3c \end{cases}$$

Le système est triangulaire supérieur : A est inversible ; on poursuit la résolution à l'aide d'opérations élémentaires pour calculer A^{-1}.

$$\underset{L_3\leftarrow -\frac14 L_3}{\iff} \begin{cases} x+2y+z &= a \\ y-z &= a-c \\ z &= \frac14(-a-b+3c) \end{cases} \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3 \\ L_2\leftarrow L_2+L_3}}{\iff} \begin{cases} x+2y &= \frac14(5a+b-3c) \\ y &= \frac14(3a-b-c) \\ z &= \frac14(-a-b+3c) \end{cases}$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-2L_2}{\iff} \begin{cases} x &= \frac14(-a+3b-c) \\ y &= \frac14(3a-b-c) \\ z &= \frac14(-a-b+3c) \end{cases} \implies \boxed{A^{-1} = \frac14\begin{pmatrix}-1&3&-1\\3&-1&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}}$$

• Inversibilité de B ; on résout le système d'inconnues (x,y,z) et de paramètres (a,b,c) :

$$\begin{cases} x+2y+z=a \\ x+5y+z=b \\ 2x+y+2z=c \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+2y+z &= a \\ 3y &= -a+b \\ -3y &= -2a+c \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{lcl} x+2y+z & = & a \\ \quad 3y & = & -a+b \\ \qquad 0 & = & -3a+b+c \end{array} \right.$$ Le système n'admet pas une unique solution.

Ainsi la matrice B n'est pas inversible.

• Cette méthode d'inversibilité peut aussi se retranscrire matriciellement par une méthode que certains appellent <u>méthode miroir</u>. On résout le système matriciellement dans une matrice $n \times 2n$:

$$\begin{array}{c} \qquad A \qquad\qquad\qquad\qquad I_n \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

à gauche on place la matrice A à inverser, et à droite on place la matrice identité, plutôt qu'une matrice colonne (c'est la matrice des coefficients des seconds membres $y_1, \dots, y_n$). Puis on applique la méthode du pivot de Gauss en appliquant des opérations élémentaires jusqu'à ce que la matrice de gauche soit la matrice identité, si possible.

– Si l'application du pivot de Gauss aboutit à gauche à une matrice non inversible, typiquement une matrice triangulaire ayant au moins un zéro sur sa diagonale, alors la matrice A n'est pas inversible.

– Sinon une fois abouti à la matrice identité sur la partie gauche la partie de droite est la matrice inverse recherchée :

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) \\ \qquad I_n \qquad\qquad\qquad\qquad A^{-1} \end{array}$$

• *Appliquer la méthode du pivot de Gauss à la matrice :*

$$\begin{array}{c} \qquad A \qquad\qquad\qquad\qquad I_n \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

• *si on aboutit à :*

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) \\ \qquad I_n \qquad\qquad\qquad\qquad A^{-1} \end{array}$$

alors A est inversible et A^{-1} apparaît dans la partie droite du tableau.

• *Si l'on ne peut pas parvenir à la matrice identité dans la partie gauche, alors A n'est pas inversible.*

Cette méthode s'interprète aussi de la manière suivante : d'après le théorème 21, A est inversible si et seulement si il existe une suite d'opérations élémentaires permettant de la transformer en la matrice identité. C'est à dire (propriété 19) s'il existe une suite de matrices d'opérations élémentaires $M_1, M_2, \dots, M_t$ telles que :

$$\begin{aligned} & M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \times A = I_n \\ \Longrightarrow\ & A^{-1} = M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \\ \Longrightarrow\ & A^{-1} = M_t \times M_{t-1} \times \cdots \times M_2 \times M_1 \times I_n \end{aligned}$$

et donc appliquer la même suite d'opérations élémentaires à la matrice I_n aboutit à la matrice A^{-1}.

Exemple. Déterminer l'inversibilité des matrices suivantes et le cas échéant calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

• Inversibilité de A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

La partie gauche est triangulaire supérieure sans 0 sur sa diagonale : A est inversible ; on poursuit la résolution pour calculer A^{-1}.

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

• Inversibilité de B :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ La matrice de gauche n'est pas inversible.

Ainsi la matrice B n'est pas inversible.

Exercice 9. Déterminer l'inversibilité, et le cas échéant calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6.5. **Application à l'inversibilité et à l'inverse d'une matrice triangulaire.**

On rappelle que le résultat suivant reste à démontrer (propriété 15) :

• *Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas son inverse est aussi triangulaire supérieure (resp. inférieure).*

Démonstration. Il suffit d'établir le résultat pour les matrices triangulaire supérieures ; le cas des matrices triangulaires inférieures s'en déduira par transposition.

Soit A une matrice triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Alors A est inversible si et seulement si le système suivant est de Cramer :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\quad a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{p,p}x_p = y_p \end{cases}$$

c'est à dire si et seulement si tous les coefficients diagonaux $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{p,p}$ sont non nuls.

Considérons maintenant que A est triangulaire supérieure et inversible ; ainsi :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ a_{i,i} \neq 0 \text{ et } i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ l'inverse de A. En particulier :

$$M \times A = I_p$$

Montrons à l'aide d'une récurrence forte que pour tout $n \in [\![1,p]\!]$:

$$\mathscr{P}(n)\ :\ \forall i \in [\![n+1,p]\!], m_{i,n} = 0$$

c'est à dire que pour toute colonne $n \in [\![1,p]\!]$ de M, les coefficients en dessous de la diagonale sont tous nuls, ou autrement dit M est triangulaire supérieure.

(I) Colonne $n = 1$. Soit $i \in [\![1,p]\!]$:

$$\begin{aligned} (M \times A)_{i,1} &= \sum_{k=1}^{p} m_{i,k} \times a_{k,1} \\ &= m_{i,1} \times a_{1,1} + \sum_{k=2}^{p} m_{i,k} \times a_{k,1} && \text{décrochage du premier terme} \\ &= m_{i,1} \times a_{1,1} + \sum_{k=2}^{p} m_{i,k} \times \underbrace{a_{k,1}}_{=0} && \text{car } A \text{ triangulaire supérieure} \\ &= m_{i,1} \times a_{1,1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$M \times A = \left(\begin{array}{c|c} m_{1,1}a_{1,1} & \\ m_{2,1}a_{1,1} & \\ m_{3,1}a_{1,1} & \boxed{} \\ \vdots & \\ m_{p,1}a_{1,1} & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} m_{1,1} = a_{1,1}^{-1} \\ m_{2,1} = 0 \\ \vdots \\ m_{p,1} = 0 \end{cases}$$

ainsi pour tout $i \in [\![2,p]\!]$, $m_{p,1} = 0$: $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

(H) Supposons $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \ldots, \mathscr{P}(n-1)$ vraies. Ainsi :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} m_{1,1} & \cdots & \cdots & \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & m_{n-1,n-1} & \boxed{} \\ 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)$$

Soit $i \in [\![n,p]\!]$,

$$\begin{aligned}(MA)_{i,n} &= \sum_{k=1}^{p} m_{i,k} \times a_{k,n}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{m_{i,k}}_{=0\ (HR)} \times a_{k,n} + m_{i,n} \times a_{n,n} + \sum_{k=n+1}^{p} m_{i,k} \times \underbrace{a_{k,n}}_{=0}\\ &= m_{i,n} \times a_{n,n}\end{aligned}$$

Donc :

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,n}a_{n,n} & \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & m_{p,n}a_{n,n} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} m_{n,n} = a_{n,n}^{-1}\\ m_{n+1,n} = 0\\ m_{n+2,n} = 0\\ \vdots\\ \vdots\\ m_{p,n} = 0 \end{cases}$$

et donc pour tout $i \in [\![n+1,p]\!]$, $m_{i,n} = 0$: $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Ainsi pour tout $n \in [\![1,p]\!], \forall i \in [\![n+1,p]\!], m_{i,n} = 0$, ou autrement dit $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$:

$$i > j \implies m_{i,j} = 0$$

La matrice M est triangulaire supérieure. ■

Remarque. Comme on le voit dans la preuve, mais comme on pourrait le déduire aussi du produit de matrices symétriques, la matrice inverse d'une matrice triangulaire A a sur sa diagonale les inverses des coefficients diagonaux de A.

Exercice 10. Donner sans calcul l'inverse de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.6. Cas particulier : inversion d'une matrice 2×2.

Pour une matrice de type $(2,2)$ une formule simple permet de déterminer si la matrice est inversible et de calculer son inverse.

Définition 17.
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix}$$

le déterminant de A est le scalaire :

$$\det(A) = ad - bc$$

L'intérêt de cette notion découle du résultat suivant :

Propriété 22.
Avec les mêmes notations, la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si

$$\det(A) \neq 0.$$

De plus dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration. On est amené à résoudre le système :

$$(S) \quad \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$$

• 1^er^ cas : Si $a \neq 0$.

On applique l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow aL_2 - cL_1$ pour obtenir :

$$(S) \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ (ad-bc)x_2 = -cy_1 + ay_2 \end{cases}$$

Si $\det(A) = ad - bc = 0$ le système n'a pas une solution unique, et la matrice A n'est pas inversible. La conclusion est vérifiée.

Si $\det(A) \neq 0$:

$$(S) \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ x_2 = -\dfrac{c}{ad-bc} y_1 + \dfrac{a}{ad-bc} y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} ax_1 = y_1 + \dfrac{bc}{ad-bc} y_1 - \dfrac{ab}{ad-bc} y_2 \\ x_2 = -\dfrac{c}{ad-bc} y_1 + \dfrac{a}{ad-bc} y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ax_1 = \dfrac{ad}{ad-bc} y_1 - \dfrac{ab}{ad-bc} y_2 \\ x_2 = -\dfrac{c}{ad-bc} y_1 + \dfrac{a}{ad-bc} y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{d}{ad-bc} y_1 - \dfrac{b}{ad-bc} y_2 \\ x_2 = -\dfrac{c}{ad-bc} y_1 + \dfrac{a}{ad-bc} y_2 \end{cases}$$

$$\implies A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{la conclusion est vérifiée.}$$

• 2^eme^ cas : Si $a = 0$.

$$(S) \quad \begin{cases} bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$$

Si $b = 0$ ou $c = 0$ le système n'a pas une unique solution, A n'est pas inversible et $\det(A) = ad - bc = 0 - 0 = 0$. La conclusion est vérifiée.

Si $b \neq 0$ et $c \neq 0$ le système est équivalent à :

$$(S) \iff \begin{cases} cx_1 = -\dfrac{d}{b} y_1 + y_2 \\ x_2 = \dfrac{y_1}{b} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\dfrac{d}{bc} y_1 + \dfrac{1}{c} y_2 \\ x_2 = \dfrac{y_1}{b} \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire, puisque $a = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{d}{ad-bc} y_1 + \dfrac{-b}{ad-bc} y_2 \\ x_2 = \dfrac{-c}{ad-bc} y_1 + \dfrac{a}{ad-bc} y_2 \end{cases} \implies A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et ici encore la conclusion est vérifiée. ∎

Exercice 11. Soit $m \in \mathbb{C}$; discuter de l'inversibilité de
$$A = \begin{pmatrix} m+2 & 4 \\ -5 & m-2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$
et le cas échéant calculer son inverse.

6.7. **Application : formules de Cramer pour la résolution d'une système 2×2.**

Soit le système :
$$(S) \qquad \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \gamma \end{cases}$$
Le système est de Cramer si et seulement si sa matrice est inversible si et seulement si :
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0$$
Dans ce cas :
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha d - b\gamma \\ a\gamma - \alpha c \end{pmatrix}$$
On en déduit les formules de Cramer :

Théorème 23.
Si $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$, *le système*
$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \gamma \end{cases}$$
a une solution unique donnée par :
$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha & b \\ \gamma & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \qquad ; \qquad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & \alpha \\ c & \gamma \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

Exercice 12. Appliquer ces formules pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} mx - y = m \\ x + my = m \end{cases}$$
de paramètre $m \in \mathbb{R}$.

6.8. Rang d'une matrice.

On rappelle que le rang d'un système ne dépend pas du second membre mais seulement de la matrice associée.

Définition 18.
Le rang d'une matrice A est défini comme le rang de n'importe quel système linéaire de matrice associée A. On le note $rang(A)$.

Bien sûr le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes :

Appliquer une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.

On pourra alors calculer le rang en appliquant des opérations élémentaires jusqu'à l'obtention d'une matrice échelonnée.

Proposition-Définition 19.
Une matrice est dite échelonnée si un système linéaire associée est échelonné, c'est à dire si le nombre de zéros en début de ligne augmente strictement ligne après ligne.
Le premier coefficient non nul sur chaque ligne d'une matrice échelonnée s'appelle un pivot. Le rang de la matrice est égal au nombre de pivots.

Avec le théorème 21, on a le résultat fondamental :

Théorème 24.
Une matrice carrée d'ordre p est inversible si et seulement si son rang est égal à p.

Le calcul du rang permet donc de déterminer si une matrice carrée est inversible ou non. Pour son calcul il s'avère qu'on peut aussi effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes.

Définition 20.
Une opération élémentaire sur les colonnes d'une matrices peut-être :
- $C_i \leftrightarrow C_j$ *: échanger les colonnes i et j.*
- $C_i \leftarrow \lambda.C_i$ *avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$: multiplier la colonne i par le scalaire λ.*
- $C_i \leftarrow C_i + \mu.C_j$ *avec $i \neq j$ et $\mu \in \mathbb{K}$: ajouter à la colonne i la colonne j multipliée par le scalaire μ.*

On admet pour l'instant le résultat suivant. Une preuve figure au Chapitre "Applications linéaires".

Propriété 25.

$$rang({}^tA) = rang(A)$$

Corollaire 26.
Appliquer des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne change pas son rang.

Démonstration. Appliquer une opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice revient à appliquer les opérations analogues sur les lignes de sa transposée avant de prendre la transposée de la matrice obtenue. Puisque le rang de A et de sa transposée sont égaux, et qu'une opération sur les lignes ne change pas le rang, on ne change pas le rang de A. ∎

Exercice 13. Calculer le rang des matrices suivantes pour en déduire lesquelles sont inversibles :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$