

Chapitre 12

Les applications

<http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/>

Dans tout ce chapitre E , F , G et H désignent 4 ensembles non vides.

1. DÉFINITIONS

1.1. Applications.

Définition 1.

Une application, notée :

$$f : E \longrightarrow F$$

est la donnée de deux ensembles non vides :

- E appelé ensemble de départ,
- F appelé ensemble d'arrivée,
- et pour tout $x \in E$, d'un élément de F noté $f(x)$ et appelé image de x par f .

Exemples.

- Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définit pour la donnée de $E \subset \mathcal{D}_f$ et de $F \subset \mathbb{R}$ tel que $f(E) \subset F$, l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

En effet par construction tout élément $x \in E \subset \mathcal{D}_f$ a pour image par f l'élément $f(x) \in f(E) \subset F$.

- Par exemple :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \ln : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \ln : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$$

sont des applications bien définies, tandis que

$$\ln : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

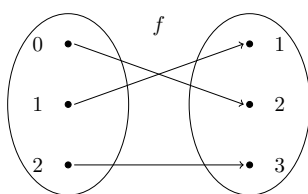
ne le sont pas.

- Dans le cas d'applications réelles, c'est à dire avec pour ensemble de départ et d'arrivée des parties de $\mathbb{R}$, les notions propres aux fonctions réelles, monotonie, stricte monotonie, courbe représentative, etc. conservent leur sens pour les applications.

- Autre exemple :

$$\begin{aligned} f : [0, 2] &\longrightarrow [1, 3] \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

définit une application ayant pour ensemble de départ $[0, 2]$ et pour ensemble d'arrivée $[1, 3]$. On peut la schématiser par :

**Définition 2.**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soit $y \in F$ un élément de l'espace d'arrivée. Un antécédent de y , s'il existe, est un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$, ou autrement dit, pour tout $x \in E$ et $y \in F$:

x est un antécédent de y ssi y est l'image de x

Remarque. Un élément quelconque y de l'espace d'arrivée peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

Exemple : en considérant l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

- Tout élément de $\mathbb{R}_-^*$ n'a aucun antécédent par f . En effet, un carré est toujours positif.
- 0 a pour seul antécédent 0.
- Tout élément $y \in \mathbb{R}_+^*$ a exactement deux antécédents : $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$.

Exemple. Indicatrice d'une partie d'un ensemble.

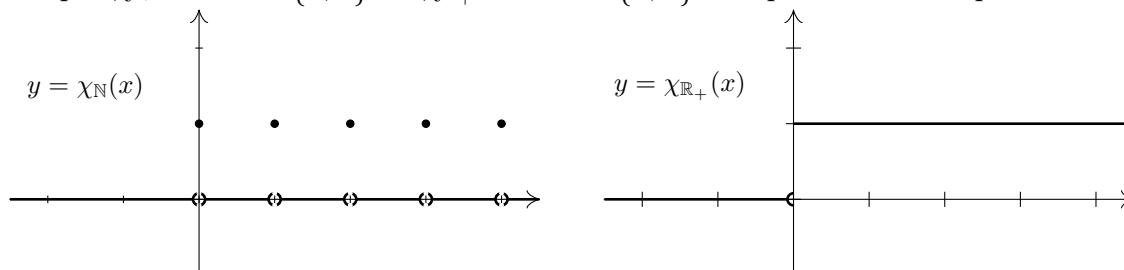
Soit E un ensemble et A une partie de E . On définit l'indicatrice de A dans E comme l'application :

$$\begin{aligned} \chi_A : E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Les antécédents de 1 sont tous les éléments de A .

Les antécédents de 0 sont tous les éléments de $\complement_E(A)$.

Exemple $\chi_{\mathbb{N}} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$ et $\chi_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$ ont pour courbe représentative :



1.2. Restriction, prolongement d'une application.

Définition 3.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A une partie de E . La restriction de f à A est l'application :

$$\begin{aligned} f|_A : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

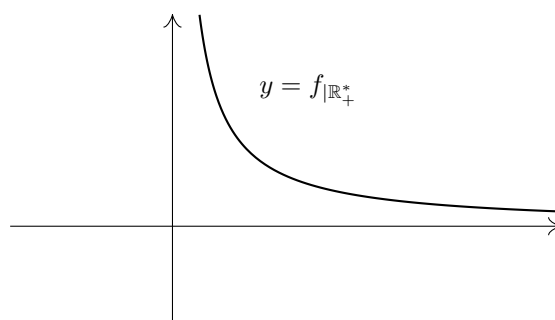
Exemple. Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

L'application n'est pas monotone, tandis que sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f|_{\mathbb{R}_+^*} : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

est strictement décroissante. La courbe représentative de $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ est :



Définition 4.

Soit $f : A \longrightarrow F$ une application avec $A \subset E$. Toute application $g : E \longrightarrow F$ telle que :

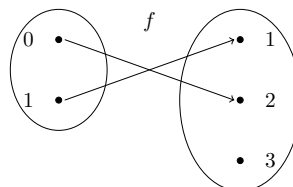
$$\forall x \in A, g(x) = f(x)$$

est un prolongement de f sur E .

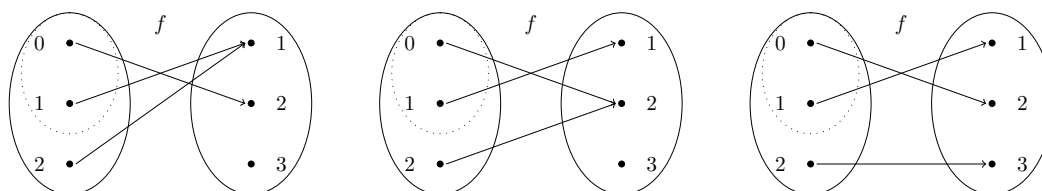
Remarque. La restriction à A d'un prolongement sur E de $f : A \longrightarrow F$ est f . Par contre il peut y avoir plusieurs prolongement de f sur E , chacun étant uniquement déterminé par ses images dans F des éléments de $E \setminus A$.

Exemple. L'application :

$$\begin{aligned} f : \{0, 1\} &\longrightarrow \{1, 2, 3\} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$



admet trois prolongements sur $\llbracket 0, 2 \rrbracket$:



1.3. Image directe.

Définition 5.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soit $A \subset E$. L'image directe de A par f notée $f(A)$ est définie par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Lorsque $A = E$, $f(E)$ est appelé image directe de f .

Remarque. C'est l'ensemble des images par f des éléments de A . C'est une partie de l'ensemble d'arrivée F .

Remarque. Pour une application réelle f , L'image directe $f(I)$ d'un intervalle I sur lequel f est continue et strictement monotone est facile à déterminer : c'est un intervalle d'après le T.V.I., qui est d'une des formes suivantes :

Intervalle	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_b f[$	$] \lim_b f, f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_a f, f(b)]$	$[f(b), \lim_a f[$
$]a, b[$	$] \lim_a f, \lim_b f[$	$] \lim_b f, \lim_a f[$

en effet, dans le cas d'un intervalle fermé $[a, b]$:

$$f \text{ strictement croissante sur } [a, b] \implies a \leq x \leq b \iff f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

$$f \text{ strictement décroissante sur } [a, b] \implies a \leq x \leq b \iff f(b) \leq f(x) \leq f(a)$$

Quant aux autres cas, on les admet pour l'instant ; ils découleront du théorème de la limite monotone (cf. Chapitre "Limites").

Propriété 1.

Si A et B sont deux parties de E :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$$

Démonstration.

•? $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?

Montrons deux inclusions.

$\subseteq$ Soit $y \in f(A \cup B)$; alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On a :

$$\begin{cases} x \in A \implies y = f(x) \in f(A) \\ \text{ou} \\ x \in B \implies y = f(x) \in f(B) \end{cases} \implies y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \implies y \in f(A) \cup f(B).$$

$\supseteq$ Soit $y \in f(A) \cup f(B)$; alors :

$$\begin{cases} y \in f(A) \implies \exists x \in A, y = f(x) \\ \text{ou} \\ y \in f(B) \implies \exists x \in B, y = f(x) \end{cases} \implies \exists x \in A \cup B, y = f(x) \implies y \in f(A \cup B).$$

•? $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$?

Supposons que $A \subset B$. Soit $y \in f(A)$ un élément quelconque : il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$; mais puisque $A \subset B$, $x \in B$ et donc $y \in f(B)$. Ainsi $f(A) \subset f(B)$. ■

Exercice 1.

1) En considérant $f : x \mapsto x^2$, $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$, vérifier qu'en général on n'a pas égalité entre $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

2) Montrer qu'en toute généralité une seule des deux inclusions est vraie. Laquelle ?

Méthode. Pour déterminer l'image directe d'un intervalle $A \subset \mathbb{R}$ par f lorsque f est une application réelle continue et strictement monotone par intervalles.

On décompose A comme réunion d'intervalle sur lesquels f est strictement monotone :

$$A = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$$

alors

$$\begin{aligned} f(A) &= f(I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n) \\ &= f(I_1) \cup f(I_2) \cup \dots \cup f(I_n) \end{aligned}$$

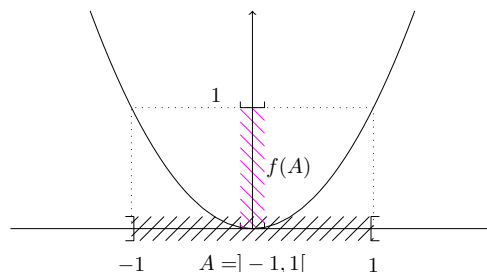
et les intervalles $f(I_1), f(I_2), \dots, f(I_n)$ s'obtiennent à partir des variations de f .

Exemple. Lorsque :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

et $A =]-1; 1[$; alors $f(A) = [0, 1[$; à l'aide du tableau de variation ou de la courbe :

x	-1	0	1
$f(x)$	1		1
		0	



Car :

$$A =]-1; 0] \cup [0; 1[$$

f est continue et strictement décroissante sur $] -1; 0]$, strictement croissante sur $[0; 1[$:

$$\left. \begin{aligned} f(]-1; 0]) &= [f(0); f(-1)[= [0; 1[\\ f([0; 1[) &= [f(0); f(1)[= [0; 1[\end{aligned} \right\} \implies f(A) = f(]-1; 0]) \cup f([0; 1[) = [0; 1[$$

Exercice 2. Déterminer l'image directe de l'intervalle $[0; 3[$ par l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2 \end{aligned}$$

1.4. Composition d'applications.

Définition 6.

Soient E, F, G trois ensembles non vides et les deux applications :

$$f : E \longrightarrow F \quad \text{et} \quad g : F \longrightarrow G$$

La composée de f par g , notée $g \circ f$ est l'application :

$$g \circ f : E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x))$$

Remarque. Schématiquement :

$$g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \\ x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$

Exemples.

- Soient :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}$$

Alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies et puisque :

$$(\sqrt{x})^2 = x \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

on obtient :

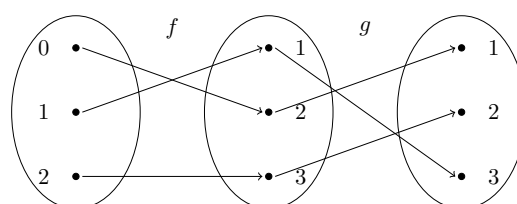
$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \quad \text{et} \quad f \circ g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x$$

- Soient :

$$f : \llbracket 0, 2 \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \llbracket 1, 3 \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ x \longmapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Alors $g \circ f$ est bien défini et :

$$g \circ f : \llbracket 0, 2 \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



Remarque. Plus généralement données les deux applications :

$$f : E \longrightarrow F \quad \text{et} \quad g : G \longrightarrow H$$

dès que :

$$f(E) \subset G$$

on peut définir l'application :

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

comme la composée $g|_{f(E)} \circ \bar{f}$ de $\bar{f}$ par $g|_{f(E)}$ avec :

$$\begin{aligned} \bar{f} : E &\longrightarrow f(E) & \text{et} & & g|_{f(E)} : f(E) &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto f(x) & & & x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

C'est par abus de notation qu'on la notera plus simplement $g \circ f$.

- Exemple : la composée des deux applications :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{suivie de} & & \sqrt{} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x) & & & x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

est l'application :

$$\begin{aligned} \sqrt{\exp} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\exp(x)} \end{aligned}$$

qui est bien définie puisque $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$.

2. APPLICATIONS INJECTIVES, SURJECTIVES, BIJECTIVES

Dans toute cette partie, $f : E \longrightarrow F$ désigne une application.

2.1. Injectivité.

Pour tout couple $(x, x') \in E^2$:

$$x = x' \implies f(x) = f(x')$$

Dans quel cas a-t-on aussi la réciproque ? C'est-à-dire :

$$x = x' \iff f(x) = f(x').$$

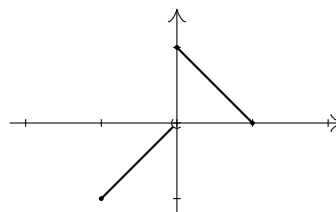
On sait que c'est notamment le cas lorsque f est une application réelle strictement monotone. Mais ça peut être aussi le cas pour des applications qui ne sont pas strictement monotone.

Exemple.

Soit :

$$f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Alors f est strictement monotone sur $[-1; 0[$ et sur $[0; 1]$ et

$$f([-1; 0]) = [-1; 0] \quad \text{et} \quad f([0; 1]) = [0; 1] \implies f([-1; 1]) = [-1; 1]$$

Soient $x, x' \in [-1; 1]$ tels que $f(x) = f(x')$.

Premier cas : si $f(x) \in [-1; 0[$ alors $x, x' \in [-1; 0[$ et donc :

$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Deuxième cas : si $f(x) \in [0; 1]$ alors $x, x' \in [0; 1]$ et donc :

$$f(x) = f(x') \implies 1 - x = 1 - x' \implies x = x'.$$

Ainsi, pour tout $(x, x') \in [-1; 1]^2$, $f(x) = f(x') \implies x = x'$.

Définition 7.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite injective si pour tout $(x, x') \in E^2$:

$$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

Remarque. L'assertion $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ est la contraposée de $f(x) = f(x') \implies x = x'$. Ainsi les applications injectives sont exactement celles pour lesquels $\forall (x, x') \in E^2, x = x' \iff f(x) = f(x')$. Autrement dit :

Pour une application $f : E \longrightarrow F$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est injective,
- $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x'$
- $\forall (x, x') \in E^2, x = x' \iff f(x) = f(x')$.

Exemples.

• L'application : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2$ n'est pas injective ; en effet $-1 \neq 1$ tandis que $f(-1) = f(1)$.

• Une application (réelle) strictement monotone est injective, en effet, si $f : E \longrightarrow F$

est, par exemple, strictement croissante :

$$x \neq x' \implies \begin{cases} x < x' \\ \text{ou} \\ x' < x \end{cases} \xRightarrow{f \nearrow} \begin{cases} f(x) < f(x') \\ \text{ou} \\ f(x') < f(x) \end{cases} \implies f(x) \neq f(x')$$

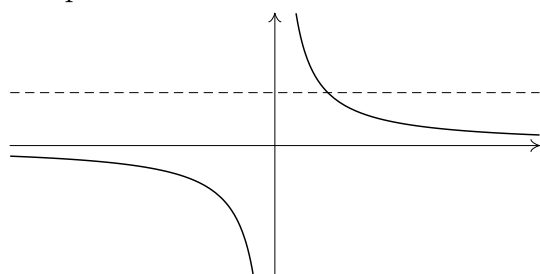
Par exemple $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application injective car strictement croissante.

- Une application monotone n'est pas en général injective. Par exemple l'application partie entière : $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective puisque $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$.
- Toute restriction d'une application injective est injective. Un prolongement d'une application injective n'est pas en général injective.

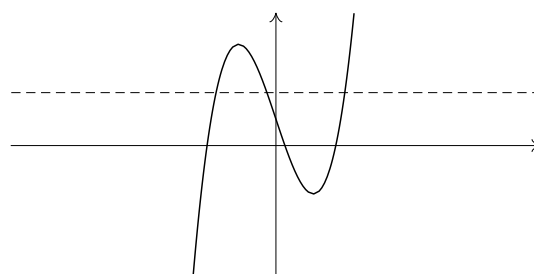
Remarques. Interprétation graphique pour une application réelle :

$f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si toute droite horizontale intersecte la courbe représentative de f en au plus un point.

Exemple :



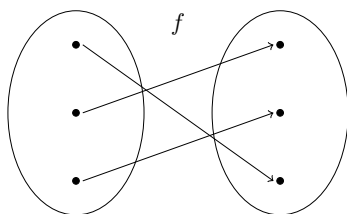
injective



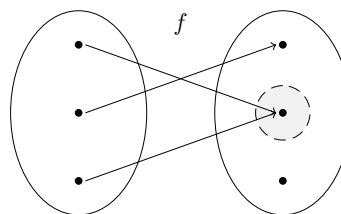
non injective

- Interprétation ensembliste.

$f : E \longrightarrow F$ est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f .



injective



non injective

Propriété 2.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si l'équation :

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in E$ et de paramètre $y \in F$, admet pour chaque valeur du paramètre y au plus une solution.

Démonstration. Montrons que les négations des deux assertions sont équivalentes : f n'est pas injective ssi il existe $x_1 \neq x_2$ des éléments de E avec $f(x_1) = f(x_2)$ ssi pour le paramètre $y = f(x_1) \in F$ l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet au moins deux solutions dans E . ■

Méthode. Pour déterminer si une application $f : E \longrightarrow F$ est injective, on peut considérer l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$, et étudier pour chaque valeur du paramètre $y \in F$, si elle admet au plus une solution.

Exercice 3.

1) Montrer que les applications :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1-x}{1+x} \end{array}$$

sont injectives.

2) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 - x + 1} \end{array}$$

n'est pas injective.

Remarque. Il s'avère que pour une application réelle définie et continue sur un intervalle, être injectif est équivalent à être strictement monotone.

Nous n'avons pas encore les outils pour démontrer ce résultat et ne l'utiliserons pas comme argument, même si on peut le garder à l'esprit. Attention, ce n'est vrai que pour une application réelle, sous l'hypothèse de continuité, et sur un intervalle !

Une composée d'applications injectives est injective :

Propriété 3.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications injectives. Alors la composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une application injective.

Démonstration. La composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bien définie. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \neq y$.

$$\begin{aligned} x \neq y &\implies f(x) \neq f(y) && \text{car } f \text{ injective} \\ &\implies g(f(x)) \neq g(f(y)) && \text{car } g \text{ injective} \\ &\implies g \circ f(x) \neq g \circ f(y) \end{aligned}$$

donc $g \circ f$ est injective. ■

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles injectives ?

$$\begin{array}{ll} F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp\left(\frac{1-x}{1+x}\right) & ; \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \end{array}$$

2.2. Surjectivité.

On se rappelle que $f : E \longrightarrow F$ est injective ssi tout élément de F admet au plus une antécédent par f .

Définition 8.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f .

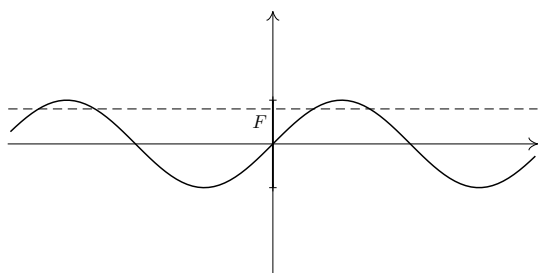
Autrement dit f est surjective si :

$$f(E) = F.$$

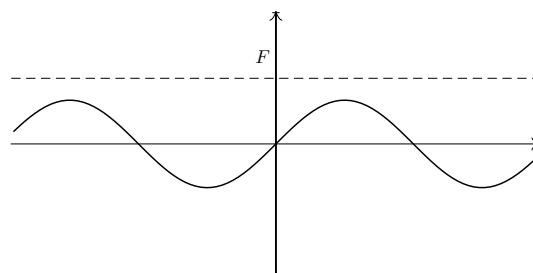
Remarques. Interprétation graphique pour une application réelle :

$f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si toute droite horizontale d'équation $y = a$ avec $a \in F$ intersecte la courbe représentative de f en au moins un point.

Exemple :



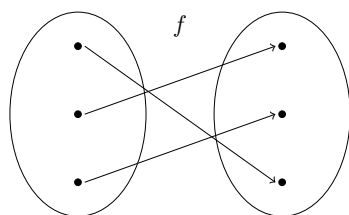
$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1]$ est surjective



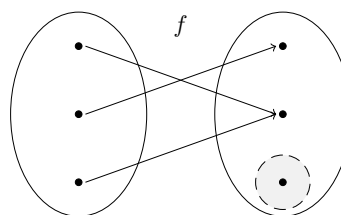
$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective

• Interprétation ensembliste.

$f : E \longrightarrow F$ est surjective si tout élément de F a au moins un antécédent par f .



surjective



non surjective

Remarque. La surjectivité d'une application dépend que du choix de l'espace d'arrivée. Plus précisément, pour toute application $f : E \longrightarrow F$ on peut construire une

application ayant même espace de départ et mêmes images et qui soit de plus surjective :

$$\text{Pour toute application } \begin{array}{ccc} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \bar{f} : E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \text{ est surjective}$$

Propriété 4.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si l'équation :

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in E$ et de paramètre $y \in F$, admet pour chaque valeur du paramètre y au moins une solution.

Démonstration. Montrons que les négations des deux assertions sont équivalentes : f n'est pas surjective ssi il existe $y \in F$ n'ayant aucun antécédent par f ssi pour cette valeur du paramètre $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x n'admet aucune solution. ■

Méthode. Pour déterminer si une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, on peut considérer l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$, et étudier pour chaque valeur du paramètre $y \in F$, si elle admet au moins une solution.

Exercice 5. Déterminer les espaces d'arrivée adéquats pour que chacune des 3 applications suivantes soit surjective :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & \frac{1-x}{1+x} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 - x + 1} \end{array}$$

Une composée d'applications surjectives est surjective :

Propriété 5.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications surjectives. Alors la composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une application surjective.

Démonstration. La composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bien définie. Soit $z \in G$ quelconque.

$$\exists y \in F, z = g(y) \quad \text{car } g \text{ surjective}$$

$$\text{et pour ce } y, \exists x \in E, y = f(x) \quad \text{car } f \text{ surjective}$$

$$\implies \exists x \in E, z = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Ainsi tout élément de G admet un antécédent par $g \circ f : g \circ f$ est surjective. ■

2.3. Bijectivité.

Définition 9.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si tout élément de F a exactement un antécédent par f ; c'est à dire :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x).$$

Exemples.

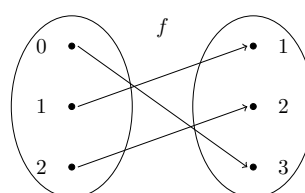
- Si $a \neq 0$, l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

est bijective : $y \in \mathbb{R}$ a pour seul antécédent $x = \frac{y}{a}$.

- L'application :

$$\begin{aligned} f : \llbracket 0, 2 \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$



est une bijection :

1 a pour unique antécédent 1
2 a pour unique antécédent 2
3 a pour unique antécédent 0

- Pour tout ensemble E non vide, l'application :

$$\begin{aligned} Id_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

est une bijection appelée l'application identité de E .

Propriété 6.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si f est injective et surjective.

Démonstration. Par définition f est bijective si et seulement si tout élément de F admet exactement un antécédent,

$$\begin{aligned} \iff & \text{tout élément de } F \text{ a au plus un antécédent} \\ & \text{et tout élément de } F \text{ a au moins un antécédent} \\ \iff & f \text{ est injective et surjective} \end{aligned}$$

■

La bijectivité d'une application permet de définir son application réciproque :

Proposition-Définition 10.

Si une application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est bijective, alors on peut définir son application réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

par :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Démonstration. Lorsque f est bijective l'équation $y = f(x)$ admet pour tout $y \in F$ une unique solution $x \in E$. Noter $x = f^{-1}(y)$ cette solution pour chaque $y \in F$, définit l'application $f^{-1} : F \longrightarrow E$. ■

Exemples.

- Soit $a \neq 0$; l'application bijective :

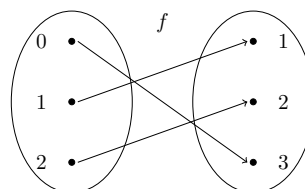
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

a pour application réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{y}{a} \end{aligned}$$

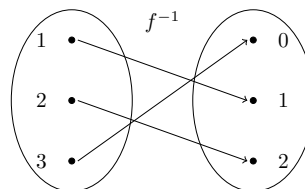
- L'application bijective :

$$\begin{aligned} f : \llbracket 0, 2 \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$



a pour bijection réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \llbracket 1, 3 \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 0, 2 \rrbracket \\ x &\longmapsto f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$



- L'application identité est sa propre application réciproque :

$$Id_E^{-1} = Id_E.$$

Exercice 6. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} f :]1; +\infty[&\longrightarrow]1; +\infty[\\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \end{aligned}$$

est bijective et déterminer son application réciproque.

Propriété 7.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Son application réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi bijective et a pour application réciproque :

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Démonstration. Puisque f^{-1} est définie par :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

l'équation $x = f^{-1}(y)$ d'inconnue y admet pour toute valeur du paramètre $x \in E$ une unique solution $y = f(x) \in F$; ainsi $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est bijective de réciproque f . ■

Remarque. Ainsi f^{-1} s'appelle aussi bijection réciproque de f .

Une composée d'applications bijective est bijective :

Propriété 8.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications bijectives ; leur composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration. Les applications f et g sont injectives et surjectives. Leur composée $g \circ f$ est donc injective et surjective, et donc bijective.

De plus pour tout $x \in E$ et $z \in G$:

$$\begin{aligned} z = g \circ f(x) &\iff z = g(f(x)) \\ &\iff f(x) = g^{-1}(z) && \text{car } g \text{ bijective, } z \in G \text{ et } f(x) \in F \\ &\iff x = f^{-1}(g^{-1}(z)) && \text{car } f \text{ bijective, } g^{-1}(z) \in F \text{ et } x \in E \\ &\iff x = f^{-1} \circ g^{-1}(z) \end{aligned}$$

donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

On peut toujours composer une bijection et sa bijection réciproque ; on obtient une application identité :

Propriété 9.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Alors :

$$f^{-1} \circ f = Id_E \quad ; \quad f \circ f^{-1} = Id_F$$

Démonstration. Les composées $f^{-1} \circ f : E \longrightarrow E$ et $f \circ f^{-1} : F \longrightarrow F$ sont bien définies.

Soit $y \in F$ et $x \in E$ tels que $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$,

$$\begin{aligned} \implies f \circ f^{-1}(y) &= f(x) = y \implies f \circ f^{-1} = Id_F \\ \text{et } f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(y) = x \implies f^{-1} \circ f = Id_E \end{aligned}$$

La réciproque est aussi vraie :

Propriété 10.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ tel que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Démonstration. Soit $y \in F$ quelconque, montrons que l'équation (E) , $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in E$, et que cette solution est $x = g(y)$.

$$(E) : y = f(x) \implies g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = Id_E(x) = x$$

Donc si (E) admet une solution, ce ne peut être que $x = g(y)$. Vérifions que $g(y)$ est solution de (E) :

$$f(g(y)) = f \circ g(y) = Id_F(y) = y$$

Ainsi (E) admet $x = g(y)$ comme unique solution. Ainsi f est bijective, et puisque :

$$y = f(x) \iff x = g(y)$$

l'application réciproque est $f^{-1} = g$. ■

Méthode. Pour montrer que $f : E \longrightarrow F$ est bijective :

- Soit montrer séparément que f est injective et surjective.
- Soit montrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ et de paramètre $y \in F$ admet toujours une unique solution.
- Soit montrer l'existence de $g : F \longrightarrow E$ tel que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
(Attention les deux conditions sont nécessaires.)

Toute application injective $f : E \longrightarrow F$ permet de définir une bijection $\bar{f} : E \longrightarrow f(E)$ par $\bar{f}(x) = f(x)$. On dira que f réalise une bijection de E vers $f(E)$. Plus généralement

Définition 11.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, et A une partie non vide de E , B une partie non vide de F .

Si :

– la restriction $f|_A$ de f à A est injective, et

– $f(A) = B$,

alors on dit que f réalise une bijection de A vers B .

Dans ce cas, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \bar{f} : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est bijective.

Exemple. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est ni bijective, ni injective, ni surjective.

Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$, mais aussi de $\mathbb{R}_-$ vers $\mathbb{R}_+$, et de $[1; 2]$ vers $[1; 4]$, etc.

Rappelons que les courbes représentatives d'une application réelle bijective et de son application réciproque sont symétriques l'une de l'autre (cf. Chapitre 8 : "Fonctions usuelles").

Propriété 11.

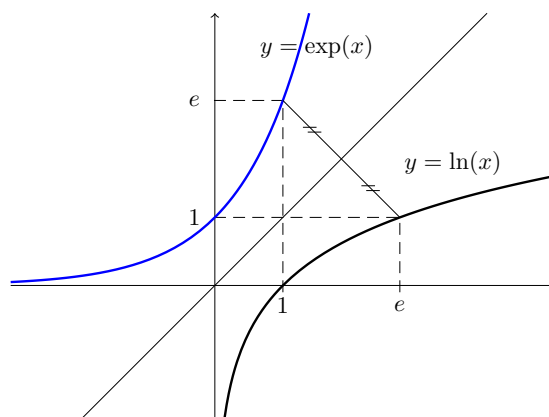
Soient E et F des parties non vides de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F$ une application bijective.

Alors les courbes représentatives de f et de sa bijection réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemples.

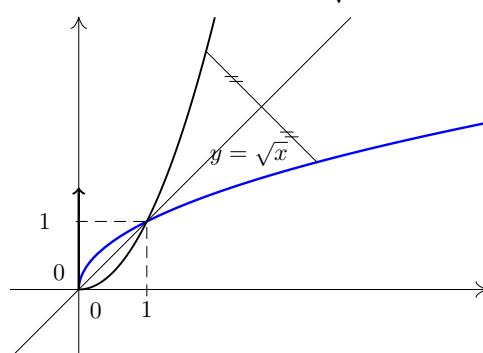
- Pour les bijections :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$



- Pour les bijections :

$$X^2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \sqrt{} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$



- Pour les bijections :

$$\tan]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[:]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

