Chapitre 13

Les polynômes

http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Polynômes, coefficients, degré

1.1. Définitions.

Définition 1.
Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une application définie sur $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 2.
En notant l'application identité de $\mathbb{K}$ sous la forme :

$$\begin{array}{rccc} X : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

le polynôme P s'écrit aussi :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Lorsque $a_k \neq 0$, $a_k X^k$ est appelé monôme de degré k.
– Le polynôme identiquement nul, est noté $O_{\mathbb{K}[X]}$:

$$\begin{array}{rccc} O_{\mathbb{K}[X]} : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Remarque. En particulier un polynôme P non nul est somme de monômes.

Définition 3. *On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Exemples.
• $1 - X + 2X^2 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.
• $(i + X)^n \in \mathbb{C}[X]$;

$$(\mathrm{i} + X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^{\,n-k} X^k$$

a pour coefficient de degré k : $a_k = \binom{n}{k} \times \mathrm{i}^{\,n-k}$, et pour degré n.
• exp : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas un polynôme : en effet, pour un polynôme P :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{x^{n+1}} = 0$$

or, $\forall n \in \mathbb{N}$, par croissance comparée :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^{n+1}} = +\infty$$

On a la propriété fondamentale :

Propriété fondamentale.
• *Soit :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Si $P = O_{\mathbb{K}[X]}$, *alors* $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = 0$.
• *Soient* $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ *et :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad ; \qquad Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$$

avec $a_n \neq 0$ *et* $\beta_m \neq 0$.
Si $P = Q$ *alors* $n = m$ *et* $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$.

Démonstration.

• Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = O_{\mathbb{K}[X]}$; c'est à dire si $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = 0$.

Montrons par récurrence sur n que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = 0$.

(I) Si $n = 0$, $P(x) = a_0 = 0 \implies a_0 = 0$.

(H) Supposons l'hypothèse vérifiée à un rang $n \in \mathbb{N}$. Soit :'

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k \quad \text{tel que } \forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = 0$$

Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{K}$, en particulier $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$; or P est dérivable sur $\mathbb{R}$ à dérivée :

$$P'(x) = \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^k \right)' = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \times k \times x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} \times (k+1) \times x^k = 0$$

puisque P est constante sur $\mathbb{R}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & a_1 = 2a_2 = 3a_3 = \cdots = (n+1)a_{n+1} = 0 \\ \implies & a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} = 0 \\ \implies & P(x) = a_0 = 0 \end{aligned}$$

donc $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $a_k = 0$.

• Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, tels que $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = Q(x)$.

– Si $n > m$ on complète les coefficients de Q par des zéros en posant $\forall k \in [\![m+1, n]\!]$, $b_k = 0$.

– Si $n < m$ on complète les coefficients de P par des zéros en posant $\forall k \in [\![n+1, m]\!]$, $a_k = 0$.

Ainsi, en posant $N = \max(n, m)$, $P = Q$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall x \in \mathbb{K},\ \sum_{k=0}^{N} a_k x^k = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k \\
&\iff \forall x \in \mathbb{K},\ \sum_{k=0}^{N} a_k x^k - \sum_{k=0}^{N} b_k x^k = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{K},\ \sum_{k=0}^{N} (a_k - b_k) x^k = 0 \\
&\iff \forall k \in [\![1, N]\!],\ a_k - b_k = 0 \qquad \text{d'après le point précédent}
\end{aligned}$$

ainsi $n = m$ et $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$. ■

Remarque. Ce résultat justifie la méthode d'identification appliquée aux polynômes et permet de définir :

Définition 4.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

– Si $a_n \neq 0$, *alors l'entier* n *est appelé degré du polynôme* P *et noté* $\deg(P)$. *Les scalaires* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *sont ses coefficients.*
– Par convention le polynôme nul $O_{\mathbb{K}[X]}$ *a pour degré :*

$$\deg\left(O_{\mathbb{K}[X]}\right) = -\infty$$

La propriété fondamentale se reformule alors :

Deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ *sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients.*

Définition 5.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note* $\mathbb{K}_n[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *de degré au plus* n.

Exemples.
- L'ensemble des polynômes constants et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est $\mathbb{K}_0[X]$.
- $O_{\mathbb{K}[X]}$, $1 - X + X^2$ et X^3 sont des éléments de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = P(2x)$$

2. Opérations sur les polynômes

2.1. Multiplication par un scalaire.

Proposition-Définition 6.
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; le polynôme $\lambda.P$ est défini par :

$$\text{si } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{alors} \quad \lambda.P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda.a_k) X^k$$

De plus :

$$\text{si } \lambda \neq 0, \text{ alors } \deg(\lambda.P) = \deg(P)$$
$$\text{si } \lambda = 0, \text{ alors } \deg(\lambda.P) = -\infty$$

Démonstration. Si $\deg(P) = -\infty$ alors P est nul, $\lambda.P$ aussi, donc $\deg(\lambda.P) = -\infty$. La conclusion est vérifiée.

Si $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$; alors $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

Si $\lambda = 0$ alors $\lambda.P = O_{\mathbb{K}[X]}$ donc $\deg(\lambda.P) = -\infty$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda.P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda.a_k) X^k$ avec $\lambda.a_n \neq 0$. Donc $\deg(\lambda.P) = n = \deg(P)$. ■

2.2. Somme de polynômes.

Convention : on étend la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ à $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -\infty < n.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\max(-\infty, n) = n \quad ; \quad \max(-\infty, -\infty) = -\infty$$

Propriété 1.
Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$:
Leur somme $P + Q$ est un polynôme et :

$$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$$

de plus si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors :

$$\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$$

Exemple. Soient :

$$P = 1 + X + X^2 \quad ; \quad Q = 1 - X - X^2 \quad ; \quad R = -X^2 + X^3$$

Alors :

$$P + Q = 2 \quad ; \quad \deg(P+Q) = 0$$
$$P + R = 1 + X + X^3 \quad ; \quad \deg(P+R) = 3$$

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $\deg(P) \leqslant \deg(Q)$.

• 1er cas : si $P = O_{\mathbb{K}[X]}$ alors :

$$P + Q = Q \implies \deg(P+Q) = \deg(Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$$

donc la conclusion est vérifiée.

• 2eme cas : si P et Q sont de degré $> -\infty$. Alors :

$$\begin{cases} P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \text{avec } a_n \neq 0 \text{ donc } \deg(P) = n \\ Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k & \text{avec } b_m \neq 0 \text{ donc } \deg(Q) = m \end{cases} \quad \text{avec } n \leqslant m.$$

• 1er sous-cas : si $n < m$. Alors :

$$\deg(P+Q) = m = \deg(Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$$

• 2eme sous-cas : si $n = m$. Alors :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$$

et donc $\deg(P+Q) \leqslant n = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Dans les deux cas la conclusion est vérifiée. ■

2.3. **Produit de polynômes.**

Convention. On étend l'addition de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ en posant :

$$\begin{aligned} -\infty + (-\infty) &= -\infty \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad -\infty + n &= -\infty \end{aligned}$$

Propriété 2.

Le produit de 2 polynômes :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$$

est le polynôme :

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \qquad \text{avec} \quad c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant m}} a_i \times b_j$$

De plus :

$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$$

Exemples.

• Le produit de $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3$ est le polynôme de degré 5 :

$$\begin{aligned} P \times Q = a_0 \times b_0 &+ (a_0 \times b_1 + a_1 \times b_0) X + (a_0 \times b_2 + a_1 \times b_1 + a_2 \times b_0) X^2 \\ &+ (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1) X^3 + (a_1 b_3 + a_2 b_2) X^4 + a_2 b_3 X^5 \end{aligned}$$

• Développer $(1+X)(1+2X+3X^2)$:

$= (1 \times 1) + (1 \times 2 + 1 \times 1) X + (1 \times 3 + 1 \times 2) X^2 + (1 \times 3) X^3 = 1 + 3X + 5X^2 + 3X^3$

Démonstration.

• 1er cas : si $\deg(P) = -\infty$ ou $\deg(Q) = -\infty$. Alors

$$P \times Q = O_{\mathbb{K}[X]} \implies \deg(P \times Q) = -\infty = \deg(P) + \deg(Q)$$

• 2eme cas : si P et Q sont $\neq O_{\mathbb{K}[X]}$. Par récurrence forte sur $\deg(P) + \deg(Q)$:

(I) Si $\deg(P) + \deg(Q) = 0$.

Alors $P = a_0$ et $Q = b_0$ avec $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$. Ainsi :

$$P \times Q = a_0 \times b_0 \neq 0 \implies \deg(P \times Q) = 0 = \deg(P) + \deg(Q)$$

et $P \times Q = c_0$ avec :

$$c_0 = \sum_{\substack{i+j=0 \\ 0 \leqslant i \leqslant 0 \\ 0 \leqslant j \leqslant 0}} a_i \times b_j = a_0 \times b_0$$

(H) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n + m \in \mathbb{N}^*$.

Supposons l'assertion vraie lorsque $\deg(P) + \deg(Q) < n + m$, et soient :

$$\begin{cases} P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \text{avec } a_n \neq 0 \text{ donc } \deg(P) = n \\ Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} b_k X^k & \text{avec } b_m \neq 0 \text{ donc } \deg(Q) = m \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} P \times Q &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n \right) \times \left(\sum_{k=0}^{m-1} b_k X^k + b_m X^m \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \times \sum_{k=0}^{m-1} b_k X^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \times b_m X^m + a_n X^n \times \sum_{k=0}^{m-1} b_k X^k + a_n X^n \times b_m X^m \end{aligned}$$

$$\underset{(HR)}{\implies} P \times Q = \sum_{k=0}^{n+m-2} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ i<n \\ j<m}} a_i \times b_j \right) X^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_m X^{k+m} + \sum_{k=0}^{m-1} a_n b_k X^{n+k} + a_n b_m X^{n+m}$$

Le monôme de plus haut degré est $a_n b_m X^{n+m}$ de degré $n + m$ (car $a_n b_m \neq 0$). Donc :

$$\deg P \times Q = \deg P + \deg Q$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} P \times Q = &\sum_{k=0}^{n+m-2} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ i<n \\ j<m}} a_i \times b_j \right) X^k + \sum_{k=m}^{n+m-1} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ i<n \\ j=m}} a_i b_j \right) X^k \\ &+ \sum_{k=n}^{n+m-1} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ i=n \\ j<m}} a_i b_j \right) X^k + \left(\sum_{\substack{i+j=n+m \\ i=n \\ j=m}} a_i b_j \right) X^{n+m} \\ = &\sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ i \leqslant n \\ j \leqslant m}} a_i b_j \right) X^k \end{aligned}$$

Donc l'assertion reste vraie lorsque $\deg(P) = n$ et $\deg(Q) = m$. ■

Exercice 2. Soit :

$$P = 1 + 2X + 3X^2 \qquad \text{et} \qquad Q = a + bX + cX^2 + dX^3$$

Donner le degré et les coefficients de $P \times Q$:

2.4. Dérivation.

Définition 7.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$. *Son polynôme dérivé est :*

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \in \mathbb{K}[X]$$

Plus généralement, si k *est un entier,* $P^{[k]}$ *est le polynôme dérivée* k*-ième de* P *(avec la convention* $P^{[0]} = P$*).*

Remarque. Les coefficients peuvent être complexes. Aussi on étend aux polynômes complexes la notion de polynômes dérivés.

Toutes les propriétés sur le calcul des dérivées et primitives de polynômes demeurent vraies, notamment :

$$(P+Q)' = P' + Q' \qquad ; \qquad (P \times Q)' = P'Q + PQ', \qquad \text{etc.}$$

Propriété 3.

- *Degré de la dérivée :*

$$\begin{array}{rcl} \deg(P) \geqslant 1 & \Longrightarrow & \deg(P') = \deg(P) - 1 \\ \deg(P) < 1 & \Longrightarrow & \deg(P') = -\infty \end{array}$$

- *Degré de la dérivée* k*-ième :*

$$\begin{array}{rcl} \deg(P) \geqslant k & \Longrightarrow & \deg(P^{[k]}) = \deg(P) - k \\ \deg(P) < k & \Longrightarrow & \deg(P^{[k]}) = -\infty \end{array}$$

Démonstration. On démontre successivement les deux points.

- (1) On considère deux cas :

– 1er cas : si $\deg(P) \geqslant 1$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{avec } a_n \neq 0 \implies \deg(P) = n \geqslant 1$$

$$\implies P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \quad \text{avec } n a_n \neq 0 \implies \deg(P') = n - 1$$

on a bien $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

– 2eme cas : si $\deg(P) < 1$, alors $P = a_0$, donc $P' = O_{\mathbb{K}[X]}$ c'est à dire $\deg(P') = -\infty$.

- (2) Le deuxième point se montre par récurrence sur k en utilisant le premier.

(I) Si $k = 0$: $P^{[0]} = P$ a même degré que P et donc la conclusion est vraie :

$$\begin{array}{rcl} \deg(P) \geqslant 0 & \Longrightarrow & \deg(P^{[0]}) = \deg(P) - 0 \\ \deg(P) < 0 & \Longrightarrow & \deg(P^{[0]}) = -\infty \end{array}$$

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $k \in \mathbb{N}$.
Par hypothèse de récurrence :
– Si $\deg(P) \geqslant k+1 \geqslant k$ alors $\deg(P^{[k]}) = \deg(P) - k \geqslant 1$.
Donc d'après le premier point (1) :

$$\deg\left(P^{[k+1]}\right) = \deg\left(P^{[k]\prime}\right) = \deg\left(P^{[k]}\right) - 1 = \deg(P) - k - 1 = \deg(P) - (k+1)$$

– Si $\deg(P) < k+1$ alors :

$$\begin{cases} \deg(P) = k \underset{HR}{\Longrightarrow} \deg\left(P^{[k]}\right) = 0 \underset{(1)}{\Longrightarrow} \deg\left(P^{[k+1]}\right) = -\infty \\ \text{ou} \\ \deg(P) < k \underset{HR}{\Longrightarrow} \deg\left(P^{[k]}\right) = -\infty \underset{(1)}{\Longrightarrow} \deg\left(P^{[k+1]}\right) = -\infty \end{cases}$$

Ainsi l'assertion reste vraie au rang $k+1$. ■

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer le polynôme dérivée k-ième de $P = (X-a)^n$.

$P^{[0]} = P = (X-a)^n \qquad P^{[1]} = P' = n(X-a)^{n-1} \qquad P^{[2]} = P'' = n(n-1)(X-a)^{n-2}$
Montrons par récurrence (finie) sur $k \in [\![0, n]\!]$ que :

$$P^{[k]} = \frac{n!}{(n-k)!}(X-a)^{n-k}$$

(I) Pour $k = 0$; c'est vrai.
(H) Supposons que $k < n$ et :

$$P^{[k]} = \frac{n!}{(n-k)!}(X-a)^{n-k}$$

Alors :

$$P^{[k+1]} = \left(P^{[k]}\right)' = \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)(X-a)^{n-k-1}$$

Or $k < n \implies n-k \geqslant 1 \implies (n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$, ainsi :

$$P^{[k+1]} = \frac{n!}{(n-k-1)!}(X-a)^{n-k-1}$$

Donc l'assertion reste vraie au rang $(k+1) \in [\![0, n]\!]$.
En particulier $\forall k \in [\![0, n]\!]$:

$$P^{[k]} = k!\binom{n}{k}(X-a)^{n-k}$$

Or si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$ et $P^{[k]} = O_{\mathbb{K}[X]}$. Ainsi, plus généralement :

$$P = (X-a)^n \implies \forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{[k]} = k! \times \binom{n}{k} \times (X-a)^{n-k}$$

3. Racines d'un polynôme

3.1. Racine.

Définition 8.
Un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si $P(\alpha) = 0$.

Remarque. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut n'avoir aucune racine (réelle) ; exemples : X^2+1, X^4+1, X^2+X+1.

Par contre, lorsque son degré est impair il aura forcément au moins une racine (réelle) ; cela découle du théorème de valeurs intermédiaires, puisque tout polynôme est continu, et que pour un polynôme P de degré impair, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty$ ou $\mp\infty$.

Fait. *Dans $\mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair admet toujours au moins une racine réelle.*

Propriété 4.
Le scalaire α est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $(X-\alpha)$ divise P, c'est à dire ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X-\alpha) \times Q$$

De plus ce polynôme Q est unique.

Démonstration. Le sens réciproque est immédiat car si $P = (X-\alpha)\times Q$ alors $P(\alpha) = 0$. L'unicité de Q découlera alors du sens direct.

Soit α une racine de P ; montrons qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q$. Si $\deg(P) = -\infty$, c'est à dire $P = O_{\mathbb{K}[X]}$; la conclusion est immédiate en prenant $Q = O_{\mathbb{K}[X]}$, et l'unicité découle de la propriété 2 car nécessairement $\deg(Q) = -\infty$.

Aussi supposons dans la suite que $P \neq O_{\mathbb{K}[X]}$, c'est à dire que $\deg(P) \in \mathbb{N}$. Alors, nécessairement $\deg(P) \in \mathbb{N}^*$ car autrement $P(\alpha) = a_0 \neq 0$.

D'après le propriété 2, si Q existe nécessairement $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrons l'existence de $Q = \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ tel que :

$$P = (X-\alpha)Q$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } (X-\alpha)\times Q &= (X-\alpha)\times \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha b_k X^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} X^k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha b_k X^k \\
&= -\alpha b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k-1} - \alpha b_k) X^k + b_{n-1} X^n
\end{aligned}$$

$$\text{et} \quad P = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k X^k + a_n X^n$$

Ainsi $P = (X-\alpha)Q$ si et seulement si il existe des scalaires $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ solutions du système linéaire :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrl} -\alpha b_0 & & & & & & = a_0 & & L_0 \\ b_0 & -\alpha b_1 & & & & & = a_1 & & L_1 \\ & b_1 & -\alpha b_2 & & & & = a_2 & & L_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & \\ & & & & b_{n-2} & -\alpha b_{n-1} & = a_{n-1} & & L_{n-1} \\ & & & & & b_{n-1} & = a_n & & L_n \end{array} \right.$$

Pour se ramener à un système réduit, on applique l'opération élémentaire :

$$L_0 \leftarrow L_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha^k L_k$$

C'est à dire :

$$\begin{array}{rcll} L_0 \leftarrow L_0 + \alpha L_1 & ; & L_0 \text{ devient :} & -\alpha^2 b_1 = a_0 + a_1\alpha \\ L_0 \leftarrow L_0 + \alpha^2 L_2 & ; & L_0 \text{ devient :} & -\alpha^3 b_2 = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 \\ L_0 \leftarrow L_0 + \alpha^3 L_3 & ; & L_0 \text{ devient :} & -\alpha^4 b_3 = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 \\ & & \vdots & \\ L_0 \leftarrow L_0 + \alpha^m L_m & ; & L_0 \text{ devient :} & -\alpha^{m+1} b_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k\alpha^k \\ & & \vdots & \\ L_0 \leftarrow L_0 + \alpha^{n-1} L_{n-1} & ; & L_0 \text{ devient :} & -\alpha^n b_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\alpha^k \\ L_0 \leftarrow L_0 + \alpha^n L_n & ; & L_0 \text{ devient :} & 0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^k = P(\alpha) \end{array}$$

Pour obtenir le système trapézoïdal d'inconnue $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$:

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrl} & & & & & & 0 = P(\alpha) & & L_0 \\ b_0 & -\alpha b_1 & & & & & = a_1 & & L_1 \\ & b_1 & -\alpha b_2 & & & & = a_2 & & L_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & \\ & & & & b_{n-2} & -\alpha b_{n-1} & = a_{n-1} & & L_{n-1} \\ & & & & & b_{n-1} & = a_n & & L_n \end{array} \right.$$

et puisque $P(\alpha) = 0$ par hypothèse, le système est compatible et admet une solution unique. Ainsi il existe un unique polynôme Q tel que $P = (X-\alpha) \times Q$. ■

Exercice 3. Soit $P = 1 + mX + mX^2 + X^3$.
a) Déterminer une racine évidente de P.
b) En déduire une factorisation de P.

Corollaire 5.
Des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ 2 à 2 distincts sont racines de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p)Q$$

En particulier le nombre de racines distinctes d'un polynôme $P \neq O_{\mathbb{K}[X]}$ est inférieur ou égal à son degré.

3.2. Ordre de multiplicité d'une racine.

Définition 9.
Soient $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{O_{\mathbb{K}[X]}\}$ et α une racine de P. L'ordre de multiplicité de la racine α est le plus grand entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-\alpha)^m$ divise P, i.e. tel qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = (X-\alpha)^m Q$.

- *Si $m = 1$, on dit que α est une racine simple de P.*
- *Si $m = 2$, on dit que α est une racine double de P.*
- *Si $m \geqslant 2$, on dit que α est une racine multiple de P.*

Remarque.
• En corollaire de la propriété 2, l'ordre de multiplicité d'une racine de $P \neq O_{\mathbb{K}[X]}$ est un entier inférieur ou égal au degré de P.
• Ainsi si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ a strictement plus de n racines distinctes, nécessairement $P = O_{\mathbb{K}[X]}$.

Exemple. Un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{R}[X]$ (ou dans $\mathbb{C}[X]$) admet une racine double si et seulement si son discriminant Δ est nul.

On a la caractérisation suivante de l'ordre de multiplicité d'une racine :

Propriété 6.
Un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre de multiplicité m du polynôme P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X-\alpha)^m Q$$
$$\text{et } Q(\alpha) \neq 0.$$

Démonstration. On montre deux implications.
$(\Rightarrow)$ Par l'absurde : Soit α une racine de P de d'ordre de multiplicité m. Par définition il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^m Q$. Supposons que $Q(\alpha) = 0$. Alors d'après la propriété 4, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = (X-\alpha)R$. Mais alors $P = (X-\alpha)^{m+1}R$,

ce qui contredit le fait que α ait pour ordre de multiplicité m.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par l'absurde ; supposons que $P = (X-\alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ et que α soit une racine de P avec pour ordre de multiplicité $n \neq m$. Par définition, nécessairement $n > m$, disons $n = m + p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$\exists R \in \mathbb{K}[X],\ P = (X-\alpha)^{m+p} \times R = (X-\alpha)^m \times Q$$

Montrons que $(X-\alpha)^p R = Q$. Soit $x \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha\}$, alors :

$$P(x) = (x-\alpha)^{m+p} \times R(x) = (x-\alpha)^m \times Q(x)$$
$$\underset{(x-\alpha)^m \neq 0}{\Longrightarrow} (x-\alpha)^p \times R(x) = Q(x)$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha\},\ (x-\alpha)^p R(x) - Q(x) = 0$$

Ainsi le polynôme $(X-\alpha)^p R - Q$ a une infinité de racines distinctes, c'est donc le polynôme nul. On en déduit :

$$(X-\alpha)^p R - Q = O_{\mathbb{K}[X]} \implies (X-\alpha)^p R = Q \implies Q(\alpha) = \underbrace{(\alpha-\alpha)^p}_{=0} R(\alpha) = 0$$

ce qui est contradictoire puisqu'on a supposé que $Q(\alpha) \neq 0$. ■

Exercice 4. Déterminer les racines ainsi que leur ordre de multiplicité pour le polynôme :

$$P = X^3 - 3X + 2$$

et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

(Indication : chercher d'abord une racine évidente.)

L'ordre de multiplicité d'une racine se caractérise aussi à l'aide des polynômes dérivés. C'est un résultat important.

Propriété 7.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$; un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P d'ordre de multiplicité $m > 1$ si et seulement si :

α est racine de P, et
α est racine d'ordre de multiplicité $(m-1)$ de P'

Démonstration. Soit α une racine de P d'ordre de multiplicité > 1 ; alors par définition il existe $m > 1$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X-\alpha)^m Q$$

Dérivons P à l'aide de la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} P' &= (X-\alpha)^m Q' + m(X-\alpha)^{m-1}Q \\ &= (X-\alpha)^{m-1}\left((X-\alpha)Q' + mQ\right) \\ &= (X-\alpha)^{m-1} \times R \end{aligned}$$

avec $R \in \mathbb{K}[X]$. Ainsi α est aussi racine de P' et de plus :

$$\begin{aligned} R(\alpha) \neq 0 &\iff \underbrace{(\alpha-\alpha)Q'(\alpha)}_{=0} + mQ(\alpha) \neq 0 \\ &\iff Q(\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$

D'après la propriété 6, α racine de P a pour ordre de multiplicité $m > 1$ si et seulement si α est aussi racine du polynôme dérivé P' avec pour ordre de multiplicité $(m-1)$.■

Corollaire 8.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$; un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine multiple de P si set seulement si :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0.$$

On peut établir un résultat plus précis :

Propriété 9.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$; un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P d'ordre de multiplicité $m \geqslant 1$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0, m-1]\!],\ P^{[k]}(\alpha) &= 0 \\ \text{et}\ \ P^{[m]}(\alpha) &\neq 0 \end{aligned}$$

Démonstration. Par récurrence sur $m \geqslant 1$.

(I) Si $m = 1$. D'après la propriété 6 :

$$\begin{aligned} & P = (X-\alpha)Q \qquad \text{avec} \qquad Q(\alpha) \neq 0 \\ \implies & P' = (X-\alpha)Q' + Q \\ \implies & P'(\alpha) = \underbrace{(\alpha-\alpha)}_{=0}Q'(\alpha) + \underbrace{Q(\alpha)}_{\neq 0} \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi l'assertion est vérifiée au rang 1.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $m \geqslant 1$. Supposons que α soit une racine de P d'ordre de multiplicité $(m+1)$.

D'après la propriété 7, si et seulement si α est racine de P ainsi que racine de P' avec pour ordre de multiplicité m. Donc par hypothèse de récurrence si et seulement si :

$$\begin{aligned} & P(\alpha) = 0 \ \text{ et } \ \forall k \in [\![0, m-1]\!],\ P'^{[k]}(\alpha) = 0 \\ & \qquad\qquad \text{et } \ P'^{[m]}(\alpha) \neq 0 \\ \iff & P(\alpha) = 0 \ \text{ et } \ \forall k \in [\![0, m-1]\!],\ P^{[k+1]}(\alpha) = 0 \\ & \qquad\qquad \text{et } \ P^{[m+1]}(\alpha) \neq 0 \\ \iff & P(\alpha) = 0 \ \text{ et } \ \forall k \in [\![1, m]\!],\ P^{[k]}(\alpha) = 0 \\ & \qquad\qquad \text{et } \ P^{[m+1]}(\alpha) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\iff \forall k \in [\![0, m]\!],\ P^{[k]}(\alpha) = 0$$
$$\text{et}\ \ P^{[m+1]}(\alpha) \neq 0$$

L'assertion reste donc vraie au rang $m+1$. ■

Exercice 5. Retrouver les ordres de multiplicité des racines de $P = X^3 - 3X + 2$ obtenues à l'exercice précédent en appliquant ce résultat.

Corollaire 10.
Un polynôme P est divisible (ou factorisable) par $(X-\alpha)^m$ si et seulement si pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $P^{[k]}(\alpha) = 0$.